

Введение Известно, что одной из первых моделей хаотической динамики является ставшая классической модель долгосрочного прогноза погоды Лоренца (1963), представляющая собой систему трех (3D) автономных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) [1]. В модели Лоренца хаотический режим существует в «узкой» области значений параметров, при которых все три равновесия становятся неустойчивыми. Несмотря на прошедшие пятьдесят лет, вопросы моделирования сложной динамики остаются актуальными (см., например, [2-10]). В частности, в последнее время установлено, что хаос может быть описан простыми трехмерными моделями с единственным и устойчивым равновесием [11] и даже без равновесий [12]. В то же время многие вопросы о свойствах хаотических систем остаются открытыми: 1) что такое хаос и какова природа его возникновения; 2) какова минимальная размерность непрерывных моделей хаоса; 3) что представляют собой простейшие модели хаоса? Одним из интересных публикаций в этом направлении являются работы Диксона с соавторами [3-4], в которых приведены модели, описывающие сложную апериодическую динамику («S-хаос») простыми непрерывными автономными двумерными (2D) системами ОДУ, табл. 1. Интерактивная видеодемонстрация базовой модели Диксона (в нашей кодировке Dixon0) доступна на сайте [13].

Таблица 1 - Базовая модель Диксона [3] и ее модификации [14], демонстрирующие хаос при начальных условиях $x_0 = (0.1, 0)$

Модель Уравнения Параметры

Dixon0 $\dot{x} = xy/(x^2 + y^2) - ax$, $\dot{y} = y^2/(x^2 + y^2) - by + b - 1$ $a=0$, $b=0.7$

Dixon1 $\dot{x} = xy/(x^2 + y^2) - ax$, $\dot{y} = y^2/(x^2 + y^2) - by - c$ $a=0$, $b=1$, $c=0.3$

Dixon2 $\dot{x} = xy/(x^2 + y^2) - ax$, $\dot{y} = y^2/(x^2 + dy^2) - by - 1$ $a=0$, $b=1$, $d=0.6$

Dixon3 $\dot{x} = xy/(x^2 + y^2) - ax$, $\dot{y} = y^2/(x^2 + y^2) - by - c$ $a=1$, $b=1$, $c=0.1$

Dixon4 $\dot{x} = xy/(ex^2 + y^2) - ax$, $\dot{y} = y^2/(x^2 + y^2) - by - c$ $a=0$, $b=0$, $c=0.5$, $e=2$

Приведенные в табл. 1 двумерные модели получены из 3D модели магнитного поля нейтронной звезды $\dot{x} = lxz/(x^2 + z^2) - ex$, $\dot{y} = 1$, $\dot{z} = lz^2/(x^2 + z^2) - mz - (l-m)$, описывающей хаос при $e/l=0.8$, $m/l=0.8$ или $e/l=0.4$, $m/l=0.5$ [4]. После исключения y и линейной замены переменных $z \rightarrow u$ модель становится двумерной, но свойство хаотичности сохраняется. Авторы [4] связали хаотическое поведение сокращенной 2D модели с ее недифференцируемостью в точке (0,0) и выдвинули гипотезу о том, что любая физическая система, описываемая аналогичными уравнениями, претерпевает стохастические изменения вблизи сингулярности. Этот вопрос также остается открытым и обсуждается ниже. До настоящего времени, кроме моделей Dixon0-Dixon4, не найдено новых примеров 2D моделей хаоса и поэтому нахождение новых 2D моделей и исследование причин их странного поведения остается актуальным [14]. Так, в работе [15] предпринята попытка уточнить свойства моделей Диксона за счет исследования их поведения на больших временных интервалах. Авторы [15] пришли к выводу о том, что отсутствие ярко выраженного фрактального характера динамических портретов, возможно, свидетельствует об отсутствии истинного хаоса. Исследование этой гипотезы

также актуально. В связи с изложенным, ниже рассматриваются различные обобщения моделей Диксона, приводится ряд новых неописанных ранее непрерывных автономных 2D моделей хаоса, а также обсуждаются возможные причины хаотического поведения сингулярных динамических систем на плоскости. Результаты и их обсуждение

Выделим вначале основные особенности 2D моделей Диксона: 1) не удовлетворяют критерию отсутствия предельных циклов Пуанкаре-Бендиксона-Дюлака [16, 17]; 2) имеют особенность (сингулярность) в некоторой изолированной точке; 3) характеризуются положительным старшим показателем Ляпунова (проверено нами); 4) чувствительны к малым возмущениям. Все это подтверждает существование двумерного хаоса. Однако, при этом возникает вопрос - не противоречат ли свойства этих моделей классической теории динамических систем на плоскости ? В работах школы Андронова [16, 17] показано, что предельные состояния динамических систем на плоскости могут быть только равновесиями или периодическими колебаниями (автоколебаниями). Соответственно появление хаоса должно быть возможным только в системах размерности не ниже трех. Однако, понятие динамической системы, рассматриваемое в этих работах, предполагает отсутствие сингулярных точек. Это означает, что ее правые части должны быть определены на всей (или хотя бы части) фазовой плоскости и могут быть разложены в степенной ряд, сходящийся в окрестности этой точки (аналитичны в окрестности этой точки). Этих условий достаточно для того, чтобы динамическая система удовлетворяла теореме существования и единственности, которая может выполняться и при более слабых предположениях [18]. Для моделей Диксона свойство аналитичности нарушается в окрестности особой точки и на них не распространяются базовые выводы теории динамических систем на плоскости. Следовательно, экзотическая динамика 2D моделей Диксона не противоречит существующей теории динамических систем на плоскости. Покажем далее, что примеры новых модификаций моделей Диксона можно найти с помощью различных преобразований координат - нелинейных и даже кусочно-линейных. Анализ показал чувствительность этих моделей не только к начальным условиям, но и к различным алгоритмам численного интегрирования соответствующих ОДУ, что свидетельствует о необходимости особенного тщательного исследования влияния различного рода «шумов». Как справедливо отмечено в [14], для таких моделей показатели Ляпунова могут быть плохо определены и их расчет вблизи сингулярности является проблематичным. Как показывает наш опыт, эти показатели считаются лучше при удалении н.у. от сингулярной точки. Проведенные ниже численные расчеты показывают, что все найденные нами модели, как и модели Диксона, характеризуются положительным старшим показателем Ляпунова, чувствительны к малым возмущениям, н.у. и алгоритмам интегрирования. Все эти признаки подтверждают существование хаотического

поведения в приведенных ниже новых моделях. Обобщенная модель Диксона. Из табл. 1 видно, что модель Dixon4 обобщает все модели Диксона. Линейные преобразования. Анализ показал, и в этом нетрудно убедиться, что линейные преобразования, соответствующие параллельному переносу и повороту осей координат, полностью сохраняют все свойства исходных моделей. Поэтому детализация этого случая здесь не приводится. Квадратичные преобразования. Рассмотрим плоскую квадратичную деформацию $x = a_1x^2 + b_1x + c_1$, $y = a_2y^2 + b_2y + c_2$, (1) где x и y - новые координаты; $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ - коэффициенты (действительные числа); $D \neq \det(a_1, b_1; a_2, b_2) \neq 0$ (условие физичности). Квадратичные инварианты модели Диксона. Применим преобразование (1) к любой из моделей Диксона, например, к базовой модели Dixon0 и получим обобщенную квадратичную модель Диксона $x\phi = \{(a_1x^2 + b_1x + c_1)(a_2y^2 + b_2y + c_2) / [(a_1x^2 + b_1x + c_1)^2 + (a_2y^2 + b_2y + c_2)^2] - a(a_1x^2 + b_1x + c_1)\} / (2a_1x + b_1)$, (2) $y\phi = \{(a_2y^2 + b_2y + c_2)^2 / [(a_1x^2 + b_1x + c_1)^2 + (a_2y^2 + b_2y + c_2)^2] - b(a_2y^2 + b_2y + c_2) + b - 1\} / (2a_2y + b_2)$, которая включает в себя все известные модели Dixon0-Dixon4. Варьируя коэффициенты (2), можно получить бесконечное множество новых частных случаев, следующих из обобщенной модели (2), качественные свойства которых могут отличаться от известных моделей Dixon0-Dixon4. В частности, приведенные ниже модели отличаются от моделей Dixon0-Dixon4 и построены при других н.у.=(1,1). При исследовании этих моделей для идентификации хаотических режимов дополнительно рассчитывались показатели Ляпунова L1 и L2. Положительность старшего (максимального) из этих показателей подтверждает наличие хаоса. Модели 1.1 - 1.2. При $a_1 = a_2 = c_1 = c_2 = 0$ из (2) получим новую линейную деформацию модели Dixon0 $x\phi = b_2xy / [(b_1x)^2 + (b_2y)^2] - ab_1x$, $y\phi = b_2y^2 / [(b_1x)^2 + (b_2y)^2] - b(b_2y) + b - 1$. (1.1) При $b_2 = 1$ модель (3) принимает вид $x\phi = xy / [b_1^2x^2 + y^2] - ab_1x$, $y\phi = y^2 / [b_1^2x^2 + y^2] - by + b - 1$, (1.2) которая аналогична модели Dixon4 при $b_1 = 0$ е, но несколько отличается от нее, см. рис. 1. Рис. 1 - Зависимости $x(t)$, $y(t)$ для модели 1.2, $L_1 = 0.136$, $L_2 = -1.15$ Модели 1.3 - 1.4. При $a_1 = a_2 = 0.1$, $b_1 = b_2 = 1$, $c_1 = c_2 = 0$ и $c_1 = c_2 = 1$ из (2) получим еще две новых квадратичных модификации базовой модели Диксона ($a=0$, $b=0.7$) $x\phi = (a_1x^2 + x)(a_2y^2 + y) / [(a_1x^2 + x)^2 + (a_2y^2 + y)^2] / (2a_1x + 1)$, (1.3) $y\phi = \{(a_2y^2 + y)^2 / [(a_1x^2 + x)^2 + (a_2y^2 + y)^2] - b(a_2y^2 + y) + b - 1\} / (2a_2y + 1)$, $x\phi = \{(a_1x^2 + x + 1)(a_2y^2 + y + 1) / [(a_1x^2 + x + 1)^2 + (a_2y^2 + y + 1)^2] - a(a_1x^2 + x + 1)\} / (2a_1x + 1)$, (1.4) $y\phi = \{(a_2y^2 + y + 1)^2 / [(a_1x^2 + x + 1)^2 + (a_2y^2 + y + 1)^2] - b(a_2y^2 + y + 1) + b - 1\} / (2a_2y + 1)$, которые также отличаются от известных моделей Диксона. На рис. 2 приведена иллюстрация модели (1.3). Рис. 2 - Зависимости $x(t)$, $y(t)$ для модели 1.3, $L_1 = 1.64$, $L_2 = -2.38$ Отметим, что численный расчет показателей Ляпунова для моделей 1.1-1.4 на временном интервале $t=[0,30]$ с точностью равной 10^{-6} подтверждает наличие диссипативного хаоса - старший из них положителен, а сумма - отрицательна. С ростом верхней границы интервала до $t=50$ сумма значений показателей Ляпунова, в некоторых случаях,

становилась положительной, что являлось следствием ошибок численного счета, характерных для сингулярных систем. Для контроля были проведены дополнительные расчеты показателя Ляпунова с помощью других программ, которые подтвердили наличие хаоса. Кубические преобразования. Рассмотрим кубическое преобразование вида $x = a_1x^3 + b_1x + c_1$, $y = a_2y^3 + b_2y + c_2$. (3) Кубические инварианты модели Диксона. Применим (3) к базовой модели Dixon0 и получим ее кубическое обобщение $x\phi = \{(a_1x^3 + b_1x + c_1)(a_2y^3 + b_2y + c_2) / [(a_1x^3 + b_1x + c_1)^2 + (a_2y^3 + b_2y + c_2)^2] - a(a_1x^3 + b_1x + c_1)\} / (3a_1x^2 + b_1)$, (4) $y\phi = \{(a_2y^3 + b_2y + c_2)^2 / [(a_1x^3 + b_1x + c_1)^2 + (a_2y^3 + b_2y + c_2)^2] - b(a_2y^3 + b_2y + c_2) + b - 1\} / (3a_2y^2 + b_2)$. Варьируя коэффициенты (4) получим любое число новых кубических модификаций моделей Диксона. Модели 2.1-2.2. При $a_1 = a_2 = 0.1$, $b_1 = b_2 = 1$, $c_1 = c_2 = 0$ и $c_1 = c_2 = 1$ из (4) получим еще две новых кубических модификации базовой модели Диксона $x\phi = (a_1x^3 + x)(a_2y^3 + y) / [(a_1x^3 + x)^2 + (a_2y^3 + y)^2] / (3a_1x^2 + 1)$, (2.1) $y\phi = \{(a_2y^3 + y)^2 / [(a_1x^3 + x)^2 + (a_2y^3 + y)^2] - b(a_2y^3 + y) + b - 1\} / (3a_2y^2 + 1)$, (2.2) которые также отличаются от известных моделей Диксона и демонстрируют хаос. Кусочно-линейные преобразования. Рассмотрим преобразования вида $x = a_1\ddot{x} + b_1x + c_1$, $y = b_2y + c_2$. (5) Кусочно-линейные инварианты модели Диксона. Применим (5) к базовой модели Dixon0 и получим ее квазилинейное обобщение $x\phi = \{(a_1\ddot{x} + b_1x + c_1)(b_2y + c_2) / [(a_1\ddot{x} + b_1x + c_1)^2 + (b_2y + c_2)^2] - a(a_1\ddot{x} + b_1x + c_1)\} / (\pm a_1 + b_1)$, x^1_0 , (6) $y\phi = \{(b_2y + c_2)^2 / [(a_1\ddot{x} + b_1x + c_1)^2 + (b_2y + c_2)^2] - b(b_2y + c_2) + b - 1\} / b_2$. Варьируя коэффициенты (6), найдем новые квазилинейные модификации моделей Диксона. Модели 3.1-3.2. При $a_1 = 0.1-0.4$, $b_1 = b_2 = 1$, $c_1 = c_2 = 0$ и $a_1 = 0.1-0.4$, $c_1 = c_2 = 1$ из (6) получим две новые квазилинейные модели Диксона $x\phi = \{(a_1\ddot{x} + x)(y) / [(a_1\ddot{x} + x)^2 + (y)^2] - a(a_1\ddot{x} + x)\} / (\pm a_1 + 1)$, x^1_0 , (3.1) $y\phi = \{(y)^2 / [(a_1\ddot{x} + x)^2 + (y)^2] - b(y) + b - 1\} / b_2$. $x\phi = \{(a_1\ddot{x} + b_1x + 1)(b_2y + 1) / [(a_1\ddot{x} + b_1x + 1)^2 + (b_2y + 1)^2] - a(a_1\ddot{x} + b_1x + 1)\} / (\pm a_1 + b_1)$, x^1_0 , (3.2) $y\phi = \{(b_2y + 1)^2 / [(a_1\ddot{x} + b_1x + 1)^2 + (b_2y + 1)^2] - b(b_2y + 1) + b - 1\} / b_2$. которые также отличаются от моделей Диксона и демонстрируют хаос. Новые двумерные непрерывные автономные модели хаоса. Покажем далее, что кроме приведенных выше модификаций и обобщений моделей Диксона, полученных различными преобразованиями координат, существуют и другие модели хаоса, обладающие похожими свойствами. Приведенные в табл. 2 модели являются новыми, т.к. они не следуют из каких-то наперед заданных преобразований, а получены вариацией (в сторону уменьшения или увеличения) отдельных термов различных модификаций моделей Диксона. Таблица 2 - Новые 2D модели хаоса, н.у. = (0.1,0), t = [0,300-10000] Мо- дель Уравнения Параметры Показатели Ляпунова

4.1 $x\phi = xy / (x^2 + y^2)$, $y\phi = y^2 / (x^2 + y^2) - by - b$ $b = 0.5$ $L_1 = 4.41$; $L_2 = - 4.71$

4.2 $x\phi = xy / (x^2 + y^2)$, $y\phi = y^2 / (x^2 + y^2) - bx - b$ $b = 0.5$ $L_1 = 2.67$; $L_2 = -2.79$

4.3 $x\phi = xy / (x^2 + y^2) - ay$, $y\phi = y^2 / (x^2 + y^2) - by - c$ $a = 1$, $b = 1$, $c = 0.5$ $L_1 = 6.19$; $L_2 = -7.82$

4.4 $x\phi = xy / (x^2 + y^2) - ay$, $y\phi = y^2 / (x^2 + y^2) - bx - c$ $a = -1$, $b = 1$, $c = 0.1$ $L_1 = 1.51$; $L_2 = -1.22$

4.5 $x\phi = xy / (x^2 + y^2) - ay$, $y\phi = y^2 / (x^2 + y^2) - bx - c$ $a = -1$, $b = 1$, $c = 0.1$ $L_1 = 1.51$; $L_2 = -1.22$

$= xy/(x^2 + y^2) + a$, $y' = y^2/(x^2 + y^2) + b$ $a = -0.2$, $b = -0.4$ $L_1 = 0.86$; $L_2 = -0.38$ 4.6
 $x' = xy/(x^2 + y^2) - ay - cx$, $y' = y^2/(x^2 + y^2) - bx - c$ $a = -1$, $b = 1$, $c = 0.1$ $L_1 = 2.59$; $L_2 = -2.25$
 4.7 $x' = xy/(x^2 + y^2) - ay$, $y' = y^2/(x^2 + y^2) - b$ $a = -1$, $b \in [0.45, 0.5]$ $L_1 = 8.73$; $L_2 = -$
 8.06 4.8 $x' = xy/(x^2 + y^2) + a$, $y' = y^2/(x^2 + y^2) + b$ $a = 0.2$, $b \in [-0.5, -0.2]$ $L_1 = 3.66$;
 $L_2 = 1.53$ 4.9 $x' = x^2/(x^2 + y^2) + a$, $y' = xy/(x^2 + y^2) + b$ $a = -0.2$, $b = -0.3$ $L_1 = 0.11$;
 $L_2 = -0.15$ 4.10 $x' = x^2/(x^2 + y^2) + a$, $y' = xy/(x^2 + y^2) + b$ $a = -0.2$, $b = 0.3$ $L_1 = 0.11$;
 $L_2 = -0.15$ Как видно, численный расчет показателей Ляпунова для моделей

табл. 2 подтверждает наличие хаоса - старший показатель положителен.

Исследуем подробнее наиболее простые из них - модели 4.7 и 4.8. Модель 4.7 описывается уравнениями $x' = xy/(x^2 + y^2) - ay \triangleq P(x,y)$, $y' = y^2/(x^2 + y^2) - b \triangleq Q(x,y)$. (4.7) Эта система из двух ОДУ имеет особенность в точке (0,0), в которой производные не существуют (обращаются в бесконечность), т.е. неаналитические (негладкие) правые части. Как отмечено выше, такие динамические системы могут демонстрировать различные неожиданные свойства. В равновесии правые части (4.7) равны нулю $P = Q = 0$. Из первого уравнения равновесия получим $y_1 = 0$. Подстановка во второе уравнение равновесия дает x_1 - любое число при $b = 0$ (неизолированное решение, т.е. вырожденный случай) или нет решений при $b \neq 0$ (случай общего положения, т.е. невырожденный случай). Предполагая далее, что $y \neq 0$ и исключая особенность $x^2 + y^2 \neq 0$ (*) из первого уравнения равновесия получим $x^2 + y^2 = x/a$ или $y = \pm (x/a - x^2)^{1/2}$. Подставляя во второе уравнение равновесия, получим $x[x + (b-1)/a] = 0$, откуда $x = (1-b)/a$, $y_{1,2} = \pm [b/(1-b)]^{1/2}/a$. Отсюда видно, что при $0 \leq b < 1$ **существуют два действительных равновесия, а в противном случае эти равновесия сдвигаются в комплексную область (становятся нефизическими).** Отметим, что случай $x=y=0$ (особая точка) противоречит условию (*), т.е. не является равновесием. Исследуем устойчивость модели (4.7). Ее собственные числа определяются корнями характеристического уравнения $\lambda^2 - s\lambda + D = 0$, где $P_x = y(y^2 - x^2)/(x^2 + y^2)$, $P_y = x(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2) - a$, $Q_x = -2xy^2/(x^2 + y^2)$, $Q_y = 2x^2y/(x^2 + y^2)$. Отсюда $s = P_x + Q_y = y/(x^2 + y^2)$, $D = P_x Q_y - P_y Q_x = -2axy^2/(x^2 + y^2)$. Следовательно, в линейном приближении, траектории системы устойчивы при $y = 0$ и неустойчивы при $y > 0$. Вычислим значения коэффициентов характеристического уравнения в двух изолированных равновесиях (случай общего положения) $s_{1,2} = \pm a[b/(1-b)]^{1/2}$, $D_{1,2} = -2a^2b$. В случае двух действительных корней, т.е. при $0 \leq b < 1$ обе величины $D_{1,2}$ всегда отрицательны. Это означает, что собственные числа имеют разные знаки в каждом равновесии и эти равновесия неустойчивы. При этом окрестность особой точки оказывает возмущающее, непредсказуемое (квазихаотическое) воздействие на динамику системы. Численный анализ показал, что сложные колебания сохраняются практически неограниченно долго ($a = -1$; $b = 0.5$; $s_{1,2} = \pm 1$, $D_{1,2} = -1$, $I = (\pm 1 \pm 5i/2)/2$, x

$= -0.5$, $y_{1,2} = \pm 0.5$ (см. рис. 3). Рис. 3 - Зависимости $x(t)$, $y(t)$ для модели 4.7

Модель 4.8. Эта модель и ее аналог 4.5 не имеют изолированных равновесий и для них не выполняется свойство показателей Ляпунова о том, что для диссипативных систем сумма этих показателей должна быть отрицательной. При больших значениях параметра b они демонстрируют хаотические колебания с ограниченной амплитудой, но при уменьшении b амплитуда колебаний становится неограниченной. Вид уравнений для обеих этих моделей одинаков, см. табл. 2. Умножая первое из уравнений равновесия на b , а второе на a и вычитая из первого второе, нетрудно убедиться, что модели 4.8 и 4.5 не имеют изолированных равновесий. В вырожденном же случае $a=b=0$ существует неизолрированное равновесие $x=y=0$, совпадающее с особой точкой. Исследуем устойчивость модели 4.8. Коэффициенты характеристического уравнения $s = P_x + Q_y = y/(x^2+y^2)$, $D = P_x Q_y - P_y Q_x = 0$, где $P_x = y(y^2-x^2)/(x^2+y^2)$, $P_y = x(x^2-y^2)/(x^2+y^2)$, $Q_x = -2xy^2/(x^2+y^2)$, $Q_y = 2x^2y/(x^2+y^2)$ показывают, что одно из собственных чисел $\lambda_1 = y/(x^2+y^2)$ может менять знак, а второе равно нулю $\lambda_2 = 0$ (негрубая система). Соответственно, при отрицательных значениях y система сохраняет устойчивость, а при положительных значениях y - становится неустойчивой. При этом окрестность особой точки также (как в модели 4.7) оказывает возмущающее воздействие на динамику системы. Численный анализ показал, что сложные колебания сохраняются неограниченно долго, например при $a=0.2$; $b \in [-0.4, -0.2]$, рис. 4.

Рис. 4 - Зависимости $x(t)$, $y(t)$ для модели 4.8, $L_1=3.66$, $L_2=1.53$

Отметим, что все рассмотренные модели подтверждают гипотезу [4] о том, что двумерные динамические системы демонстрируют хаос в окрестности особых точек. В то же время нетрудно найти контрпримеры к этой гипотезе. Например, в моделях типа $\dot{x} = xy/(x^2 + y^2)$, $\dot{y} = y^2/(x^2 + y^2)$ особенность есть, а хаоса нет. В качестве контрпримеров можно привести и более простые модели - с линейным знаменателем или с одним мономом в знаменателе и т.д. Таким образом, нами приведены квадратичные, кубические и кусочно-линейные обобщения двумерных непрерывных автономных моделей Диксона, демонстрирующие хаотическое поведение. Кроме того, найдены новые примеры 2D непрерывных автономных систем ОДУ, описывающих хаотическую динамику при некоторых значениях параметров. Расчеты показателей Ляпунова подтверждают эти выводы. Все эти модели, также как и известные модели Диксона, характеризуются негладкими правыми частями и не противоречат базовым положениям теории динамических систем на плоскости. Численное исследование таких моделей, зачастую, связано с вычислительными трудностями, обусловленными спецификой приближенного интегрирования ОДУ в окрестности особой точки. Эти

проблемы иногда можно преодолеть с помощью приведенных выше или других преобразований координат: деформации времени, пространства, преобразований Пуанкаре $t=1/z$, $y=x/z$ или $t=x/z$, $y=1/z$ [19], а также различных эвристических методик.