Введение Дискретные динамические системы (ДДС, каскады), описываемые дискретными отображениями, представляют собой новый и малоизученный класс нелинейных систем. В таких системах фазовая траектория «распадается» на последовательность точек, а предельные множества (аттракторы) носят фрактальный характер и могут быть неподвижными точками (дискретные аналоги равновесий), периодическими (дискретные циклы), квазипериодическими (с переменным периодом) или непериодическими (дискретный хаос) орбитами. Одним из наиболее интересных свойств ДДС является способность к непредсказуемому поведению при простом, детерминированном законе эволюции (минимальная нелинейность) и минимальной их размерности (3D). Критериями дискретного хаоса являются показатели Ляпунова (дискретные, обобщенные), фрактальная (дробная) размерность, цикл периода три, «подкова» Смейла, энтропия Колмогорова и др. Основной причиной сложной динамики ДДС, по-видимому, является неустойчивость. Дискретные отображения могут рассматриваться как автономные динамические системы или неавтономные проекции (многошаговые) систем более высокой размерности [1-3]. В отличие от них непрерывные динамические системы (НДС, потоки), описываемые автономными обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ), способны демонстрировать хаотическую динамику (истинный хаос, «Т-хаос») при размерности не менее трех (^{3}3D) [4-9]. Критериями Т-хаоса являются: чувствительность к малым возмущениям (эффект бабочки), положительные показатели Ляпунова, удвоение периода и др. Причинами истинного хаоса является неустойчивость или недостижимость всех предельных состояний и границ. Недавно обнаружена хаотическая динамика в двумерных (2D) автономных системах ОДУ с сингулярностью (сингулярный хаос, «S-хаос») [10-13]), которые также удовлетворяют критериям истинного хаоса. Новые примеры и инварианты непрерывных 3D и 2D-моделей хаоса приведены нами в работах [14-15]. Спецификой S-хаоса являются подвижные особые точки, в которых нарушается непрерывность динамических систем. Примеры нерегулярной динамики в одномерных (1D) системах с сингулярностью (квазихаос, «Q-хаос») рассмотрены нами в [16]. Отличительной чертой Q-хаоса является нарушение некоторых критериев истинного хаоса (отрицательные или небольшие положительные показатели Ляпунова, характеризующие только линейное приближение, близость к нулю может означать недостаточность линейного анализа для суждения о неустойчивости траектории по Ляпунову [4, 5]). Основная причина одномерного Q-хаоса квазихаоса аналогична причине двумерного S-хаоса. Между НДС и ДДС прослеживается определенная взаимосвязь. Непрерывной системе ОДУ можно поставить в соответствие различные дискретные отображения. Если это соответствие построить простым переходом к дискретному времени (дискретизация без преобразований), то размерности непрерывной и дискретной моделей будут одинаковыми, а информационная полнота сохранится при малом шаге дискретизации, хотя может измениться с его ростом. Если же это соответствие построить как проекцию в пространство меньшей размерности (например, фазовое пространство или сечение Пуанкаре), то полученная модель станет менее информативной. При этом могут измениться ее качественные свойства (непрерывность, аналитичность, автономность), в результате чего можно надеяться получить дискретные модели хаоса меньшей размерности, чем в непрерывном случае. ДДС также можно поставить в соответствие различные НДС, инвариантные относительно некоторых свойств. Коллекции и демонстрации известных дискретных отображений можно найти на сайтах [9,13 и др.]. Приведем их в дополненном и измененном нами виде, табл. 1. Вопрос о том возможен ли истинный хаос в реальных динамических системах размерности меньше трех, и можно ли описать его простыми дискретными моделями - остается открытым. Таблица 1 - Известные дискретные хаотические 1D и 2D-отображения Отображение Комментарий xn+1= 1-lxn2 Логистик (одномерное) xn+1= Rxn(1-xn) Логистик (инвариант замены переменной и параметра) xn+1 = A min(xn,1-xn) Тент xn+1 = 2xn(mod 1) º {2xn} Пила (удвоение и отбрасывание целой части) xn+1=1-axn2+byn, yn+1 = xn Хенона [1] (двумерное обобщение логистического) xn+1=1-axn2+bxn-1 Хенона (одномерная двухшаговая модификация) xn+1= xn+{yn}, yn+1 = xn+{2yn} Кот Арнольда (консервативное) xn+1= Sxn-yn-(eyn2+xn2), yn+1= Jxn-(yn2+xn2)/5 Универсальное Кузнецовых [2]. S и J - след и Якобиан в неподвижной точке x=y=0. Результаты и их обсуждение Общие методы построения дискретных динамических моделей хаоса отсутствуют. В то же время мы, часто не замечая этого, имеем дело с ДДС, например, при численном исследовании НДС. Рассмотрим возможные соответствия между НДС и ДДС и сконструируем инварианты хаотических дискретных систем малой размерности, представляющих наибольший интерес с точки зрения понимания закономерностей рождения и эволюции хаоса. Построение дискретных моделей хаоса, соответствующих непрерывным. Рассмотрим непрерывную автономную систему ОДУ (модель эволюции) dxi /dt = fi(x,w), i=1,2,…,D (1) где x=(xi) - вектор фазовых переменных; D - размерность фазового пространства; t - время; f=fi(x) - вектор законов эволюции; w - вектор параметров (константы эволюции); x(t0)=x0 - начальные условия (н.у.). Установим соответствие между непрерывными и дискретными динамическими системами методом перехода к дискретному времени. Для этого разложим неизвестное решение x(t) системы (1) в ряд вблизи н.у. с минимальной точностью x(t0+e) » x0+x¢(t0)e+…= x0+f(x0)e+…, где e - малый параметр (шаг дискретизации). Перепишем это соотношение в рекуррентной (итерационной) форме для любых моментов дискретного времени n=0,1,2,…,N с теми же н.у. (простая дискретизация) xi,n+1 = xi,n+fi(xn,w)e º

Fi(xn), i=1,2,…,D. (2) Полученное соотношение представляет собой простейший дискретный аналог непрерывной системы (1), имеющий ту же размерность. Покажем, что модель (2) может сохранять инвариантными некоторые свойства исходной системы (1). Заметим, что уравнения равновесия fi(x,w)=0 системы (1) совпадают с уравнениями равновесия fi(xn,w)=0 для дискретного отображения (2), которое следует из условия неподвижности ее предельных точек xn+1=xn. Значит число и координаты равновесий у них одинаковы, причем не зависят от e. Однако устойчивость и динамика этих систем может различаться, т.к. они имеют разные правые части, которые зависят от e. Отметим, что соотношение (2) совпадает с численным методом Эйлера первого порядка точности для решения ОДУ [17]. Это означает, что при исследовании непрерывных систем на цифровых компьютерах фактически приходиться иметь дело с их дискретными моделями той или иной точности, что вносит неустранимую погрешность. Например, погрешность соотношения (2) очевидно составляет ~ e2. При исследовании гладких ОДУ такая точность может быть приемлемой. При исследовании нестандартных ОДУ могут потребоваться более специализированные алгоритмы (жесткие и др.). Добавляя в (2) новые слагаемые более высокого порядка малости, можно построить модели большей точности. Исключая в (1) некоторые переменные можно получить дискретные проекции меньшей размерности, но более сложного вида и менее информативные. Например, исключим независимую переменную - время. Для этого разделим все уравнения системы (1) на любое одно из них (допустим с индексом k) и получим d различных неавтономных проекций размерности d-1 с потенциальной особенностью fk(x,w)=0 в знаменателе dxi /dxk = fi(x,w)/fk(x,w), i,k =1,2,…,d, (3) что эквивалентно нелинейному преобразованию времени по закону xk(t), т.е. переходу к новому времени xk. Системе (3) соответствуют d различных неавтономных проекций размерности d-1 с потенциальной сингулярностью fk(xm,w)=0 в знаменателе xi,m+1=xi,m+fi(xm,w)/fk(xm,w)eºFi(xm)/Fk(xm), (4) где m=0,1,2,…,M - новое дискретное время (не нарушая общности далее будем считать m=n). Повторяя аналогичные преобразования нужное число раз, в конце концов, получим d различных неавтономных проекций минимальной размерности d=1 с потенциальной сингулярностью в знаменателе. Кроме перечисленных дискретных 1D-3D моделей, можно построить их линейные и нелинейные инварианты, сохраняющие свойство хаотичности, аналогично тому, как это было показано нами для непрерывных моделей [14-15]. Рассмотрим описанные процедуры на примерах систем малой размерности. 3D-системы. В этом случае система (1) может быть записана в виде dx /dt=f(x,y,z), dy /dt=g(x,y,z), dz /dt =h(x,y,z), (5) а ее дискретный 3D-аналог (2) запишется xn+1= xn+f(xn,yn,zn)e , yn+1= yn+g(xn,yn,zn)e, zn+1 = z+f(xn,yn,zn)e. (6) Три непрерывные 2D-проекции (3) примут сингулярный вид, характеризующийся подвижными особыми точками (о.т.), в которых система становится недифференциируемой x¢z = f(x,y,z)/h(x,y,z), y¢z = g(x,y,z)/h(x,y,z), где z - новое время (7.1) x¢y = f(x,y,z)/g(x,y,z), z¢y = h(x,y,z)/g(x,y,z), где y - новое время (7.2) y¢x = g(x,y,z)/f(x,y,z), z¢x = h(x,y,z)/f(x,y,z), где x - новое время (7.3) и соответствующие им три дискретных 2D-проекции (4) запишутся xn+1 = xn +efn/hn, yn+1 = yn + egn/hn, (8.1) xn+1 = xn +efn/gn, zn+1 = zn + ehn/gn, (8.2) yn+1 = yn +egn/fn, zn+1 = zn + ehn/fn. (8.3) Продолжая понижение размерности, получим три непрерывных сингулярных 1D-проекции, в которых появляется новый параметр x¢y = f(x,y,z)/g(x,y,z), (9.1) где y - новое время, z- новый параметр x¢z = f(x,y,z)/h(x,y,z), (9.2) где z - новое время, y- новый параметр y¢z = g(x,y,z)/h(x,y,z), (9.3) где z - новое время, x- новый параметр и соответствующие три дискретных 1D-проекции минимальной размерности с этими параметрами xn+1 = xn +efn/gn, (10.1) xn+1 = xn +efn/hn, (10.2) yn+1 = yn +egn/hn. (10.3) Пример 1. Известная 3D-модель Лоренца [1] в непрерывной форме (1) x¢ = -ax+ay, y¢ = bx-xz-y, z¢ = xy-gz, (11) демонстрирует истинный хаос при значениях параметров a=10, b>28, g=8/3 и н.у. (0,1,0). Построим для нее дискретный 3D-аналог (2) xn+1= xn+(-axn+ayn)e=F(xn), yn+1= yn+(bxn-xnzn-yn)e=G(xn), zn+1 = zn+(xnyn-gzn)e=H(xn). (12) Сравним системы (11) и (12). Как отмечено выше, число и координаты равновесий этих систем одинаковы и не зависят от e, но устойчивость этих систем различна и динамика может различаться в зависимости от e. Кроме того, инварианты системы (12), полученные некоторым преобразованием xn=j(F(xn)), yn=y(G(xn)), zn=q(H(xn)) также могут сохранять свойство хаотичности. Например, в [14-15] нами показано, что инварианты линейных преобразований j=(xn-b1)/a1, y=(yn-b2)/a2, q=(zn-b3)/a3 модели (12), аналогично модели (11), имеют центральное равновесие xn¥= -b1/a1, yn¥= -b2/a2, zn¥= -b3/a3 и при b>1 еще два периферийных xn¥=a2yn/a1+(b2-b1)/a1, yn¥= [-b2 ±Ög((b-1)]/a2, zn¥= (b-b3-1)/a3. При b=1 они сливаются с центральным. При a1>-(1+g)/a центральное равновесие неустойчиво. Если при этом существуют и неустойчивы два периферийных равновесия, то рождается хаос. Численный анализ показал, что при малых значениях e дискретный аналог модели Лоренца (12) сохраняет основные черты непрерывной модели Лоренца (11) - «бабочка» (но дискретная) на фазовой плоскости и хаос (дискретный) на динамических зависимостях. С ростом e первоначальные свойства постепенно меняются, а затем скачком переводят дискретную (7.1-7.3) модели Лоренца (11) примут вид x¢z=(-ax+ay)/(xy-gz), y¢z=(bx-xz-y)/(xy-gz), z - новое время (13.1) x¢y=(-ax+ay)/(bx-xz-y), z¢y=(xy-gz)/(bx-xz-y), y - новое время (13.2) y¢x = (bx-xz-y)/(xy-gz), z¢x = (xy-gz)/(xy-gz), x - новое время (13.3) и соответствующие им три дискретных сингулярных 2D-проекции (8.1-8.3) запишутся xn+1 = xn+e(-axn+ayn)/(xnyn-gzn), yn+1 = yn+ e(bxn- xnzn-yn)/(xnyn-gzn), zn=n - время (14.1) xn+1 = xn+e(bxn-xnnz-yn)/(xnyn-gzn), zn+1 = zn+ e(bxn-xnzn-yn)/(xnyn-gzn), zn=n - время (14.2) yn+1 = yn+e(bxn-xnzn-yn)/(xnyn-gzn), zn+1 = zn+ e(xnyn-gzn)/(xnyn-gzn), xn=n - время. (14.3) Сравним системы (13.1) и (14.1). Число и координаты равновесий этих систем одинаковы и не зависят от e, но зависят от нового времени и отличаются от 3D-модели (11). Инварианты дискретных 2D-систем, полученные преобразованиями координат также могут сохранять свойство хаотичности. Например, в [14-15] нами показано, что модель (13.1), а следовательно и (14.1), могут иметь три неустойчивых равновесия и демонстрировать хаос. Отличие 2D-моделей от (11) состоит в появлении подвижных особых точек (о.т.) zn=xnyn/g, способных приводить к новым хаотическим режимам. Графическая иллюстрация модели (14.1) приведена на рис. 1. Рис. 1 - Модель 14.1. Зависимости xn(n), yn(n) N=100 000, e=0.2 Как видно из этого рисунка, двумерные дискретные проекции модели Лоренца при малых e также сохраняют хаотические свойства (S-хаос). С ростом e хаос пропадает. 1D-системы. Три непрерывных, сингулярных 1D-проекции (9.1-9.3) модели (11) содержат новый параметр z и примут вид x¢y =(-ax+ay)/(bx-xz-y), y -время (15.1) x¢z = (-ax+ay)/(xy-gz), z время (15.2) y¢z = (bx-xz-y)/(xy-gz), z - время (15.3) и соответствующие три дискретных сингулярных 1D-проекции (10.1-10.3) модели (11) запишутся xn+1=xn+e(-axn+ayn)/(bxn-xnzn-yn), yn=n - время (16.1) xn+1=xn+e(-axn+ayn)/(xnyn-gzn), zn=n - время (16.2) yn+1=yn+e(bxn-xnzn-yn)/(xnyn-gzn), zn=n - время. (16.3) Инварианты дискретных 1D-систем, полученные преобразованиями координат, также могут сохранять свойство хаотичности. Сравним (15.1) и (16.1). Число и координаты равновесий этих систем одинаковы и не зависят от e, но зависят от нового времени и отличаются от 3D-модели (11). Как видно из уравнений (15.1) и (16.1), 1D-модели могут иметь только одно неустойчивое, причем неизолированное равновесие xn=yn и о.т. bxn-xnzn=yn, способных приводить к новым хаотическим режимам. Графическая иллюстрация модели (16.1) приведена на рис. 2. Рис. 2 - Модель 16.1. Зависимость xn(n) при z0=10 000, e=0.001 Анализ показал, что 1D-проекции модели Лоренца также обладают хаотическими свойствами (S-хаос). При малых значениях z0 и e поведение оставалось квазилинейным. С ростом z0 проявляются признаки неустойчивости и хаоса, аналогичного 2D-моделям. Изменение шага дискретизации влияло меньше - хаос пропадал только при больших e>30. Таким образом, дискретизация непрерывных автономных динамических моделей хаоса позволяет строить модели хаоса меньшей размерности. При этом у них могут измениться некоторые качественные свойства - переходные и предельные режимы, автономность, число подвижных особых точек и др. Примеры аналогичных «превращений» можно найти и на сайте [9], где приведен дискретный странный аттрактор xn+1=xn-yn-xn3, yn+1=yn+xn-xn2yn, полученный из непрерывной нехаотичной модели x¢ = x-y-x3, y = x-x2y с предельным циклом при e » 0.556. Построение непрерывных моделей хаоса, соответствующих дискретным. Соотношения (1)-(2), используемые в обратной последовательности, позволяют конструировать непрерывные инварианты дискретных моделей. Предположим, что задано дискретное отображение Fi вида (2). Выразим fi через Fi и подставив в (1) получим его непрерывный инвариант той же размерности x¢ = (F(x)-x)/e. (1¢) Пример 2. Построим с помощью (1¢) непрерывный автономный 2D-аналог дискретной модели хаоса Хенона из табл.1 x¢= (1-ax2+by-x)/e = f, y¢ = (x-y)/e = g. (17) Сравним поведение системы (17) с отображением Хенона. В дискретной модели при Dº(b-1)2+4a>0 т.е. a>aoº-(b-1)2/4 существует две неподвижных точки x1,2=y1,2=[(b-1)±ÖD]/(2a). Их устойчивость определяется корнями характеристического уравнения l2-sl+D=0, где s=¶f/¶x+¶g/¶y, D=¶f/¶x¶g/¶y-¶g/¶x¶f/¶y, ¶f/¶x=-2ax, ¶f/¶y=b, ¶g/¶x=1, ¶g/¶y=0. Отсюда l1,2(x1,2) = -ax±(a2x2+b)1/2 = -[(b-1)±ÖD]/2± ([(b-1)2± (b-1)ÖD+2a]/2+b)1/2. Одна точка всегда неустойчива, а другая неустойчива при a>a1º3(b-1)2/4 и дальнейший рост a ведет к хаосу. В непрерывной модели число и координаты равновесий сохраняются, но условия устойчивости изменяются, т.к. правые части дискретной и непрерывной моделей различны. Соответственно частные производные ¶f/¶x=-(2ax+1)/e, ¶f/¶y=b/e, ¶g/¶x=1/e, ¶g/¶y=-1/e, коэффициенты характеристического уравнения s=-2(ax+1)/e, D=(2ax+1-b)/e2 и собственные числа в равновесиях l1,2(x1,2) = (-(ax+1)±(a2x2+b)1/2)/e= -([(b-1)± ÖD]/2+1)±(([(b-1)2± (b-1)ÖD+2a]/2+b)1/2)/e принимают более сложный вид. Расчеты показали, что при D>0 всегда имеется одно устойчивое равновесие и хаос не возникает, что согласуется с качественной теорией динамических систем [4,5]. Значит, поведение системы (17) не совпадает с отображением Хенона. При D0 обе модели нефизичны. Воспользуемся далее соотношениями (3)-(4) в обратной последовательности, которые позволяют конструировать непрерывные инварианты дискретных моделей с сингулярностью. Выразив из дискретного отображения (4) выражения Fi(xm)/Fk(xm) через fi/fk и подставив их в (3) получим его непрерывный инвариант той же размерности x¢ = (Fi(x)/Fk(x)-x)/e. (3¢) Построим с помощью (3¢) непрерывный неавтономный сингулярный 1D-аналог отображения Хенона, полученной делением первого уравнения (17) на второе x¢y=(1-ax2+by-x)/(x-y), y - параметр. (18) Графическая иллюстрация этой модели приведена на рис. 3. Рис. 3 - Модель 18. x(t) при a=1.4; b=0.3; y=2 Численный анализ показал, что при b0 непрерывный 1D-аналог отображения Хенона обладает квазихаотическими свойствами, обусловленными неизолированной особенностью x=y (S-хаос). При y=t и -0.4£b£0 квазихаос не наблюдался. При b£-0.5 квазихаос возникал вдоль особенности. Интересно, что квазихаос наблюдается и в упрощенной модели (18) при y=2. Влияние параметра a было незначительным. При a0, b>0 модель нефизична (траектории уходят на бесконечность). Таким образом, и с помощью «обратных» преобразований дискретных систем в непрерывные можно конструировать инварианты моделей хаоса. Построение эвристических моделей хаоса. Квазихаос возможен в очень простых системах. Пример 3. (простейший Q-хаос). Следующее простое ОДУ найдено нами по аналогии с (18) x¢= 1/(t-x), где t - новое время. (19.1)

Соответствующий ему дискретный инвариант, найденный по алгоритму (2), имеет вид xn+1= xn + e/(n-xn), n=0,1,…,N. (19.2) Анализ подтвердил, что обе эти модели демонстрируют Q-хаос. Более того, даже их максимально упрощенные, автономные версии, полученные из (19.1) и (19/2) при t=C=Const и n=C соответственно x¢= 1/(C-x), где C - параметр. (20.1) xn+1= xn + e/(C-xn), n=0,1,…,N. (20.2) сохраняют все ее качественные свойства, т.е. демонстрируют и непрерывный и дискретный «Q-хаос», см. рис 4. Рис. 4 - Модель 20.2. Зависимость x(t) при C=0.5, e=0.001, N=9000 Исследуем модель (19) подробнее при x(0)=1, чтобы уяснить тип наблюдаемой зависимости. Уравнение (19.1) не имеет равновесий, но имеет неизолированную особенность x=t, интегрируется в квадратурах и его точное решение выражается через специальную W-функцию Ламберта [17] x(t) = -W(-2exp(t-2))+t-1. Собственное число l=1/(t-x)2>0 означает неустойчивость в линейном приближении. В автономном случае (t=C) решение упрощается до элементарных функций x(t)=C±[(C-1)2-2t)]1/2, собственное число l=1/(C-x)2>0, т.е. автономный вариант уравнения (19.1) также неустойчив. Такая «абсолютная» неустойчивость в сочетании полным отсутствием равновесий и сингулярностью приводит к тому, что система не может стабилизироваться в течение всего времени жизни. Это и обусловливает непредсказуемую динамику типа «Q-хаос», которая, в данном случае может рассматриваться и как истинный «T-хаос». Как видно даже с помощью эвристических преобразований сингулярных систем можно конструировать простейшие (дискретные и непрерывные) инварианты моделей хаоса. Многошаговые дискретные отображения. Как отмечалось выше, непрерывные системы ОДУ на цифровых компьютерах представляются дискретными моделями на основе конечного числа старших членов бесконечных рядов, например - временных (time series). Следовательно, для их конструирования можно использовать любые алгоритмы численного решения ОДУ, в том числе многошаговые (использующие несколько предыдущих значений). Например, одношаговому 2D-отображению вида (2) можно сопоставить две двухшаговых 1D-проекции, получаемых исключением одной из фазовых переменных, записанной для предыдущего этапа эволюции xn+1=F(xn,G(xn-1,y)), где y - параметр, (21.1) yn+1=G(F(x,yn-1),yn), где x - параметр. (21.2) В частности, так построено двухшаговое 1D-отображение Хенона из табл. 1. Однако, получающиеся при этом модели будут иметь более сложный вид и, поэтому - менее интересны. Построение других дискретных инвариантов моделей хаоса. Кроме рассмотренных выше дискретных моделей хаоса, с помощью различных преобразований координат, можно построить множество новых модификаций, сохраняющих свойство хаотичности, аналогично [14-16]. Таким образом, с помощью различных преобразований непрерывных систем в дискретные и обратно можно конструировать инварианты моделей хаоса различной размерности, демонстрирующие сложную динамику. В системах размерности два и один возможен специфический вид сложной динамики («S-хаос» или «Q-хаос»). Приведенные результаты позволяют лучше понять «тонкую игру непрерывного и дискретного», - по выражению автора известной дискретной модели «кот Арнольда» [18].