

М. Н. Серазутдинов

ФОРМУЛА МОРА ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СИНТЕЗА ТЕОРИИ СТЕРЖНЕЙ И ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Ключевые слова: балка, изгиб, повреждения, дефекты, математическая модель, метод расчета, теория стержней, теория упругости.

Представлены математическая модель и метод расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) балок при изгибе, основанные на синтезе теории стержней и теории упругости. Метод ориентирован на решения задач расчета стержневых элементов конструкций, имеющих повреждения - локальные изменения геометрических и механических характеристик. К таким повреждениям относятся трещины, полости и неоднородности в материале сооружения, переменные размеров поперечных сечений стержня. При поиске решения балка разбивается на участки, для каждого из которых вычисление НДС и перемещений определяется по теории стержней или теории упругости. Соотношения теории упругости используются для тех частей стержня на которых по теории стержней невозможно получить достоверные расчетные данные. Возникающие в балке перемещения вычисляются методом Мора. Приведен вывод формулы Мора с использованием соотношений теории упругости. Отмечается, что выбор такого способа определения перемещений связан с простотой проведения расчетов и широким использованием в расчетной практике различных методов, соотношения которых базируются на формуле Мора. При расчете отдельного участка стержня по теории упругости возникает необходимость учета внешних сил, действующих на других участках и условий закрепления балки. В работе предложен способ учета таких сил и условий закрепления. Для этого использовались основы расчетной схемы, которая применяется при расчете балок при изгибе. Метод сравнительно прост в реализации, т.к. решения находятся по отдельности для каждого из выделенного участка. При этом могут использоваться различные аналитические или численные способы расчетов. Приведен пример решения задачи, иллюстрирующий особенности реализации изложенного метода, достоверность и точность получаемых расчетных данных. Расчеты показывают, что, используя описанные модели деформирования балок, можно достаточно просто и с высокой точностью определять НДС стержневых элементов с дефектами и с изменяющимися размерами поперечного сечения.

M. N. Serazutdinov

MOHR'S FORMULA WHEN USED SYNTHESIS OF THE THEORY OF RODS AND THE THEORY OF ELASTICITY

Keywords: beam, bending, damage, defects, mathematical model, calculation method, theory of rods, theory of elasticity.

The paper presents a mathematical model and a method for calculating the stress-strain state (SSS) of beams under bending based on the synthesis of the theory of rods and theory. The method is focused on solving problems of calculating rod elements of structures that have damage - local changes in geometric and mechanical characteristics. Such damage includes cracks, cavities and inhomogeneities in the material of the structure, variables of the dimensions of the cross sections of the rod. When finding a solution, the beam is divided into sections, for each of which the calculation of the SSS and displacements is found according to the theory of rods or the theory of elasticity. The relations of the theory of elasticity are used for those parts of the rod for which it is impossible to obtain reliable calculation data according to the theory of rods. The displacements arising in the beam are calculated by the Mohr method. The derivation of the Mohr formula using the relations of the theory of elasticity is given. It is noted that the choice of this method for determining displacements is associated with the simplicity of calculations and the widespread use in calculation practice of various methods, the relations of which are based on the Mohr formula. When calculating a separate section of a rod according to the theory of elasticity, it is necessary to take into account external forces acting on other sections and the conditions of fixing the beam. The paper proposes a method for taking into account such forces and fixing conditions. For this, the basics of the calculation scheme used in calculating beams under bending were used. The method is relatively simple to implement, since solutions are found separately for each of the selected sections. In this case, various analytical or numerical calculation methods can be used. An example of solving the problem is given, illustrating the features of the implementation of the described method, the reliability and accuracy of the obtained calculation data. Calculations show that, using the described models of beam deformation, it is possible to determine the stress-strain state of rod elements with defects and with changing cross-sectional dimensions quite simply and with high accuracy.

Введение

Под воздействием различных внешних факторов в элементах эксплуатируемых сооружениях могут возникать повреждения в виде локальных изменений геометрических и механических характеристик стержневых элементов конструкции. Образуются трещины, полости и неоднородности в материале, возникают изменения размеров

поперечных сечений стержня, на некоторых участках снижаются прочностные характеристики материала. В таких случаях требуется выполнить следующие исследования:

1. выявить возникшие повреждения (дефекты) и определить их параметры;
2. для оценки остаточного ресурса, выяснения необходимости проведения ремонтных работ, отслеживания развития повреждений с течением

времени, рассчитать напряжённно-деформированное состояние (НДС) конструкции.

Следовательно, возникают задачи идентификации возникших дефектов и оценки их влияния на НДС стержневых элементов. Имеется значительное количество научных исследований, связанных с решением таких задач. В частности, можно отметить, что для определения параметров локальных изменений геометрических и механических характеристик в стержнях, часто применяются методы идентификации, основанные на анализе спектра частот свободных колебаний стержней [1-10].

После обнаружения повреждений, нужно оценить степень их влияния на НДС. Для этого часто применяются специально разработанные приближенные методы, теорию упругости или экспериментальные данные. В работах [11-13] рассчитываются балки с трещинами с использованием моментной теории упругости. В ряде случаев, при расчете на основе специально разработанных приближенных методов, дефекты и повреждения моделируются упругими элементами, деформационные характеристики которых вычисляются с применением различных критериев. Например, в статьях [14-16] часть балки с трещиной моделируется пружиной, жесткость которой определяется на основе механики разрушения. В публикации [17] представлен метод оценки жёсткости балок с трещинами на основе моделирования распределения напряжений в окрестности повреждения. Моменты инерции сечений рассчитываются с использованием уравнений равновесия внутренних сил, записанных для принятой модели распределения напряжений около трещины.

В статьях [18-19] выделяется часть стержня, содержащая переменные размеры или трещину, которые при расчете заменяются стержнем постоянного сечения. Размер высоты поперечного сечения этой части определяется по теории стержней и теории упругости. Получены расчетные формулы и числовые данные, отражающие достаточно общие закономерности деформирования стержней с переменными размерами сечений или трещину.

Отметим, что при использовании специально разработанных приближенных методов, в которых дефекты и повреждения заменяются упругими элементами, НДС определяется только в сечениях вне этих элементов. Вблизи резких изменений геометрических и механических характеристик стержня расчет НДС, отражающий реальную картину распределения напряжений и деформаций, можно сделать только на основе соотношений теории упругости.

Целью данной работы является создание математической модели, позволяющей вычислять перемещения и НДС балок, имеющих локальные повреждения в виде трещин, изменений размеров поперечного сечения, полости и неоднородности в материале конструкции. При получении решения балка разделяется на участки так, что на одних

участках для расчета можно применять теорию стержней, а на других – необходимо использовать теорию упругости, т.к. на них имеются локальные изменения геометрических и механических характеристик. Решения на каждом из выделенных участков получаются отдельно, независимо от других частей, на основе формул сопротивления материалов или соотношений теории упругости. В результате, напряжения можно определять по соответствующей теории. Для определения прогибов и углов поворота предполагается использовать метод Мора.

Постановка задачи и математическая модель

Рассмотрим плоский изгиб балки, которой имеются локальные изменения геометрических и механических характеристик. Разделим ее на два вида участков так, что на одних из них можно определять НДС используя классическую теорию стержней, а на других, для получения достоверных расчетов требуется применять соотношения теории упругости.

В плоскости изгиба введем декартову систему координат Oyz , с осью Oz , направленной параллельно продольной оси балки. Используем следующие обозначения: l - длина балки; l_n - длины участков на которые разбивается стержень ($n = \overline{1, N}$, $\sum_{n=1}^N l_n = l$); $O_n y z_n$ - локальные декартовы системы координат, введенные на участках длиной l_n (ось $O_n z_n$ - направлена вдоль продольной оси балки, $0 \leq z_n \leq l_n$); $v_i^{cm}(z_i)$, $v_j^{my}(z_j, y)$ - функции прогибов определяемые, в соответствии с верхним индексом, по формулам сопротивления материалов (cm) или по теории упругости (my); нижние индексы $i = \overline{1, I}$, $j = \overline{I+1, N}$. Отметим, в $v_i^{cm}(z_i)$ изменяются в направлении продольной оси балки, а $v_j^{my}(z_j, y)$ - в продольном и поперечном направлениях.

Полагаем справедливым закон Гука:

$$\sigma_z = E \varepsilon_z \quad (1)$$

Здесь σ_z - нормальные напряжения; E - модуль упругости; ε_z - продольные деформации.

Для нахождения $v_i^{cm}(z_i)$ используем дифференциальное уравнение изгиба балки

$$\frac{d^2 v_i^{cm}(z_i)}{dz_i^2} = -M_{xi}(z_i)/EI_{xi}, \quad i = \overline{1, I}, \quad (2)$$

где $M_{xi}(z_i) = M_{0i} + (M_{1i}/l_i)z_i + (M_{2i}/l_i^2)z_i^2$ - изгибающий момент, возникающий в сечениях балки, M_{0i} , M_{1i}/l_i , M_{2i}/l_i^2 - изгибающие моменты от внешних сосредоточенных моментов,

сосредоточенных сил и распределенной нагрузки;
 I_{xi} - осевой момент инерции.

Интегрируя дифференциальное уравнение (1), получим

$$v_i^{cm}(z_i) = f_i^{cm}(z_i) + c_{1i} z_i + c_{2i}, \quad (3)$$

$$\text{где } f_i^{cm}(z_i) = -[M_{0i} z_i^2 + (M_{1i}/3l_i) z_i^3 + (M_{2i}/6l_i^2) z_i^4] / (2EI_{xi});$$

c_{1i}, c_{2i} - постоянные интегрирования; $i = \overline{1, I}$.

Дифференциальное уравнение изгиба балки (2) записывается отдельно для каждого из участков l_i .

Функция $M_{0i} + (M_{1i}/l_i) z_i + (M_{2i}/l_i^2) z_i^2$ - определяет величины изгибающих моментов, действующих в поперечных сечениях. Параметры M_{0i}, M_{1i}, M_{2i} в общем случае находятся с учетом действующих на балку внешних сил и реакций опор.

Прогиб $v_j^{my}(z_j, y)$ на каждом из участков с номером j ($j = \overline{I+1, N}$) находится с использованием соотношений плоской задачи теории упругости. При этом возникает необходимость учета внешних сил, действующих на других участках балки и условий закрепления. Обратим внимание на эту особенность, которая связана с тем, что в дальнейшем уравнения теории упругости будут записываться для участка с номером j и при решении не будут вводиться геометрические условия связи перемещений и углов поворота на границах участков. Следовательно, в частности, если на участке с номером j балка не нагружена и не учитываются внешние силовые факторы, действующие на других участках, то уравнения равновесия теории упругости будут однородными, а решение этих будет равным нулю ($v_j^{my}(z_j, y) = 0$).

Для учета в уравнениях теории упругости внешних сил, действующих на различных участках балки, воспользуемся основами расчетной схемы, которая использовалась при получении решения (3).

Если в уравнениях (3) положить равными нулю постоянные интегрирования ($c_{1i} = c_{2i} = 0$), то

$$v_i^{cm}(z_i) = f_i^{cm}(z_i) = -[M_{0i} z_i^2 + (M_{1i}/3l_i) z_i^3 + (M_{2i}/6l_i^2) z_i^4] / (2EI_{xi}), \quad i = \overline{1, I}. \quad (4)$$

Так как в этом случае

$$v_i^{cm}(0) = 0, \quad \frac{dv_i^{cm}(0)}{dz_i} = 0, \quad \text{то получается, что}$$

выражение (4) является решением одномерного дифференциального уравнения изгиба балки, заделанной на левом конце и нагруженной как показано на рис. 1. Значения F^*, M^* , должны быть такими, чтобы в поперечных сечениях

возникали изгибающие моменты $M_{xi}(z_i) = M_{0i} + (M_{1i}/l_i) z_i + (M_{2i}/l_i^2) z_i^2$.

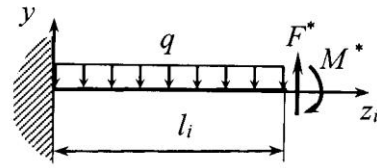


Рис. 1 – Схема консольной балки для расчета по теории стержней

Fig. 1 – Console beam diagram for calculation according to the theory of rods

Функцию $v_j^{my}(z_j, y)$ будем определять на основе соотношений плоской задачи теории упругости, используя аналогичную расчетную схему (рис. 1). Полагаем, что для определения $v_j^{my}(z_j, y)$ следует получить решение двумерной задачи теории упругости для элемента в виде полосы, заделанной на левом конце (рис. 2). При этом величина распределенной нагрузки q определяется исходными данными ($q = q_j$), а значения F^*, M^* (рис. 2) следует задать такими, чтобы в поперечных сечениях этой балки возникали изгибающие моменты

$$M_{xj} = M_{0j} + (M_{1j}/l_j) z_j + (M_{2j}/l_j^2) z_j^2. \quad (5)$$

Здесь $M_{0j}, M_{1j}/l_j$ - значения изгибающего момента и поперечной силы в начале участка при $z_j = 0$, а $M_{2j}/l_j^2 = q_j/2$.

Отметим, что на рис. 2 показана полоса постоянной высоты, но при расчетах ее геометрия должна определяться формой стержня на участке с номером j .

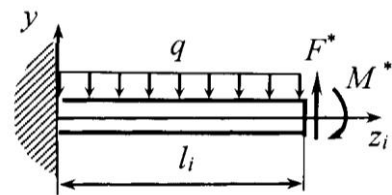


Рис. 2 – Схема консольной балки для расчета по теории упругости

Fig. 2 – Diagram of a cantilever beam for calculation according to elasticity theory

Вычисляя реакции опоры в заделке, можно убедиться, что если положить $F^* = M_{1j}/l_j - ql_j, M^* = M_{0j} - M_{1j} + ql_j^2/2$, то в сечениях балки (рис. 2) изгибающие моменты будут вычисляться по формуле (5).

Таким образом, для определения $v_j^{my}(z_j, y)$ предлагается получить решение плоской задачи теории упругости для элемента в виде полосы,

заделанной на левом конце (рис. 2). При этом геометрические и механические параметры рассматриваемого деформируемого тела на участке с номером j следует задавать такими, чтобы учитывались имеющиеся особенности в геометрических и в механических параметрах. Отметим, что для решения плоской задачи теории упругости можно определять $v_j^{my}(z_j, y)$ и для консольного элемента в виде полосы, заделанной на правом конце.

При решении задач теории упругости, действующие на тело внешние силы задаются в виде напряжений, действующих на поверхностях рассматриваемого тела. Следовательно, приложенные на правом торце полосы (рис. 2) силу F^* и момент M^* нужно заменить

распределенными по торцу касательными $\tau(y)$ и нормальными $\sigma_z(y)$ напряжениями. При этом должны выполняться равенства: $F^* = \iint_A \tau(y) dA$,

$M^* = \iint_A \sigma_z(y) \cdot y dA$, где A – площадь поперечного сечения.

В общем случае заранее неизвестно, по какому закону τ и σ_z будут распределяться по сечению деформируемого тела. В данной работе рассматривается плоский изгиб балки. Решение задачи теории упругости, должно стыковаться с решением теорий изгиба балки, в которой предполагается, что по высоте балки $\sigma_z(y)$ изменяется по линейному закону. Поэтому, при получении приведенных в данной статье расчетных данных полагалось, что τ равномерно распределено по сечению балки, а $\sigma_z(y)$ изменяется по линейному закону и $\iint_A \sigma_z(y) dA = 0$.

Отметим, что в качестве $v_j^{my}(z_j, y)$ можно использовать аналитическое или численное решение плоской задачи теории упругости, полученное различными методами, в том числе на основе уравнений равновесия или вариационных соотношений. Также можно обратить внимание на то, что при определении $v_j^{my}(z_j, y)$ вместо полосы, заделанной на левом конце можно рассматривать полосу, заделанную на правом конце и нагруженную так, чтобы в ее сечениях возникали изгибающие моменты (5).

На тех участках, где справедлива теория стержней, напряжения вычисляются по формуле

$$\sigma_z(y, z_j) = \frac{M_{xi}(z_i)}{I_{xi}} y. \quad (6)$$

На участках, где решение находится по теории упругости -

$$\sigma_z(y, z_j) = E \varepsilon_z(y, z_j), \quad (7)$$

где $\varepsilon_z(y, z_j) = \frac{\partial u(y, z_j)}{\partial z_j}$; $u(y, z_j)$ - продольное перемещение в полосе (рис. 2).

Формула Мора

Покажем, как используя предложенные модели деформирования балки можно вычислять прогибы и углы поворота по формуле Мора. Отметим, что перемещения можно определять и другими способами, но достоинство формулы Мора связано с тем, что она основана на энергетических принципах и при ее использовании для получения результатов выполняется только интегрирование функций (не решаются дифференциальные уравнения). Кроме того, если стержневая система статически не определима, то для расчетов (раскрытия статической неопределимости) часто используется метод сил, соотношения которого базируются на методе Мора.

Как известно, из курса сопротивления материалов, для балки, разбитой на участки длиной l_i ($i = \overline{1, I}$), обобщенное перемещение $v(z^1)$ при $z = z^1$ можно вычислить по известной формуле Мора:

$$v(z^1) = \sum_i v_i(z^1). \quad (8)$$

Здесь $v_i(z^1) = \frac{1}{EI_{xi} l_i} \int M_{xi}^F M_{xi}^1 dz$;

$$M_{xi}^F(z) = M_0^F + (M_1^F / l_i) z + (M_2^F / l_i^2) z^2 -$$

момент от внешних сил на участке с номером i ;

$$M_{xi}^1(z) = M_0^1 + (M_1^1 / l_i) z -$$

момент от единичной обобщенной силы, приложенной при $z = z^1$.

Получим формулу аналогичную (8) для случая, когда деформации вычисляются по теории упругости. Удельная потенциальная энергия изгиба

$$U_0 = \frac{1}{2} \sigma_z \varepsilon_z. \text{ С учетом этого выражения и закона}$$

Гука (1), потенциальная энергия изгиба в объеме V балки

$$U = \iiint_V U_0 dV = \frac{1}{2} \iiint_V E \varepsilon_z^2 dV \quad (9)$$

Используем принцип независимости действия сил. Полагаем, что продольная деформация $\varepsilon_z = \varepsilon_z(y, z)$ вычисляется с использованием соотношений плоской задачи теории упругости. Следовательно, ε_z можно представить в следующем виде:

$$\varepsilon_z = \varepsilon_0^1 M_0 + \varepsilon_1^1 M_1 + \varepsilon_2^1 M_2. \quad (10)$$

Здесь $\varepsilon_0^1(y, z)$, $\varepsilon_1^1(y, z)$, $\varepsilon_2^1(y, z)$ - деформации, возникающие, соответственно, при

$M_0 = 1, M_1 = 1, M_2 = 1$. Вводя фиктивную силу Φ , приложенную при $z = z^1$, можно записать

$$\varepsilon_z = \varepsilon_z^F + \Phi \varepsilon_z^1,$$

где $\varepsilon_z^F(y, z)$ - продольная деформация обусловленная действием внешних нагрузок, $\varepsilon_z^1(y, z)$ - продольная деформация от единичной силы, приложенной при $z = z^1$.

Следовательно, по аналогии с формулой (9),

$$\varepsilon_z^F = \varepsilon_0^1(y, z)M_0^F + \varepsilon_1^1(y, z)M_1^F + \varepsilon_2^1(y, z)M_2^F,$$

$$\varepsilon_z^1 = \varepsilon_0^1(y, z)M_0^1 + \varepsilon_1^1(y, z)M_1^1.$$

С учетом (8), (9), по теореме Кастильяно

$$\frac{dU}{d\Phi} = \iiint_V E (\varepsilon_z^F + \Phi \varepsilon_z^1) \varepsilon_z^1 dV$$

Полагая в последнем выражении $\Phi=0$, находим перемещение при $z = z^1$

$$v_\phi(z^1) = \iiint_V E \varepsilon_z^F(y, z) \varepsilon_z^1(y, z) dV. \quad (11)$$

Эту формулу можно назвать формулой Мора для случая, когда деформации вычисляются по соотношениям плоской задачи теории упругости.

В случае, когда балка имеет J объемом V_j ($j = \bar{i+1, N}$), на которых деформации ε_{zj} вычисляются по теории упругости, по аналогии с (10), получаем

$$v_\phi(z^1) = \iiint_{V_j} \sum_j E_j \varepsilon_{zj}^F(y, z) \varepsilon_{zj}^1(y, z) dV$$

Результаты расчетов

Для иллюстрации некоторых деталей предлагаемого метода изложим алгоритм расчета шарнирно опертой по краям балки, состоящей из трех участков (рис. 3) и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой.

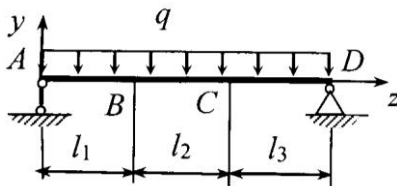


Рис. 3 – Шарнирно опертая балка

Fig. 3 – Hinged beam

На AB, CD поперечные сечения не изменяются по длине балки, поэтому функции прогибов $v_1^{cm}(z)$ и $v_2^{cm}(z)$ определим по формуле сопротивления материалов (7). В средней части, на участке BC высота поперечного сечения изменяется (рис. 4), поэтому прогиб $v_3^{my}(z, y) = v_\phi(z^1)$ определим вариационным методом используя соотношения плоской задачи теории упругости и финитные

функции высокой степени аппроксимации [20]. Необходимость расчета на участке BC по теории упругости обусловлено тем, что при переменной толщине балки, гипотеза плоских сечений не применима, следовательно, не применима и теория изгиба балок.

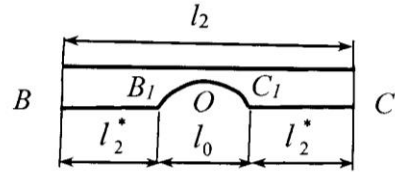


Рис. 4 – Балка на участке BC

Fig. 4 – Beam at section BC

Решение плоской задачи теории упругости находилось для элемента в виде полосы, заделанной на правом конце.

В результате, с учетом (8), (11), получается, что прогиб вычисляется по формуле

$$v(z^1) = v_1(z^1) + v_2(z^1) + v_\phi(z^1), \quad (12)$$

где $v_1(z^1)$, $v_2(z^1)$, $v_\phi(z^1)$ - слагаемые прогиба, вычисляемые, соответственно, для участков AB, CD и BC .

В таблице приведены максимальные значения прогиба v_{max} и напряжения σ_{max} , возникающие в шарнирно опертой балке, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q (рис. 3).

Расчетные данные, получены с использованием формулы Мора (11) (столбец «ФМ»), решения плоской задачи теории упругости («ТУ») для всего стержня, формулы сопротивления материалов для прогибов («СМ») и решения задачи теории упругости для консольного элемента в виде полосы (столбец «КЭ»).

Таблица 1 - Прогибы и напряжения в балке

Table 1 - Deflections and stresses in the beam

h_0 м	l_2^* м	v_{max} , мм		σ_{max} , МПа		
		ФМ	ТУ	СМ	КЭ	ТУ
0.2	0.0	8.72	8.9	56.2	56.7	56.7
0.1	0.0	15, 37	15.97	-	245.6	245.6
0.1	0.5	15.37	15.97	-	245.6	245.6

При расчетах полагалось $l_1 + l_2 + l_3 = 5.5$ м, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $q = 10$ кН/м, ширина балки - $b = 0.1$ м, высота поперечных сечений $h = 0.2$ м (кроме участка B_1C_1 , рис. 4). На участке B_1C_1 длиной $l_0 = 0.5$ м, высота стержня переменная, в центре участка - $h = h_0 = 0.1$ м, а на краях - $h = 0.2$ м. Полагалось, что на B_1C_1 высота сечений изменяется по закону квадратичной параболы: $h(z_0) = 2h_0 + h_0(z_0 - 1)(z_0 + 1)$, $-1 \leq z_0 \leq 1$.

Приведенные в таблице результаты расчетов получены для различных значений h_0 и l_2^* (рис. 4).

В случае $h_0 = 0.2$ м высота сечений постоянная по всей длине балки, при $h_0 = 0.1$ м - высота сечений изменяется на участке B_1C_1 по закону квадратичной параболы. При $l_2^* = 0$ по теории упругости рассчитывается участок стержня вырезанный сечениями проходящими через точки B_1 и C_1 . При $l_2^* = 0.5$ м по теории упругости рассчитывается участок стержня вырезанный сечениями отдаленными от B_1 и C_1 на расстоянии 0.5 м.

Как видно из таблицы, для балки постоянной толщины ($h_0 = 0.2$ м) максимальные значения прогиба и напряжения, определенные различными методами, отличаются незначительно. При переменной толщине ($h_0 = 0.1$ м) значения прогибов рассчитанных по формуле Мора (столбец «ФМ») на 3.9 % меньше прогибов, полученных в результате расчетов всей балки по теории упругости («ТУ»). Возможно, это связано с тем, что при выводе формулы Мора (10) учитывались только продольные деформации ε_z .

Заключение

Представлен метод расчета НДС и перемещений балок при изгибе, ориентированный на расчет стержневых систем, имеющих локальные повреждения в виде трещин, изменений размеров поперечного сечения, полости и неоднородности в материале конструкции.

При нахождении решения балка разбивается на участки, для каждого из которых НДС и перемещения находятся по отдельности на основе теории стержней или теории упругости. Соотношения теории упругости используются для частей, для которых по теории стержней невозможно получить достоверные расчетные данные. Возникающие в балке перемещения определяются методом Мора. Приведен вывод формулы Мора для расчетов с использованием соотношений теории упругости.

Метод сравнительно прост в реализации, т.к. решения находятся по отдельности для каждого из выделенного участка и при этом могут использоваться различные аналитические или численные способы расчетов.

Приведен пример решения задачи, иллюстрирующий особенности реализации изложенного метода. Представленные числовые данные показывают, достоверность и точность получаемых расчетных данных.

Литература

1. А.М. Akhtyamov, М.А. Ilgamov, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **54**, 1, 132–141, (2014). DOI: 10.1134/S0021894413010161.
2. М.А. Ильгамов, *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*, 1, 23–31, (2017).

3. А.М. Akhtyamov, М.А. Ilgamov, *Problems of mechanical engineering and machine reliability*, 2, 3–15, (2020). DOI: 10.31857/S0235711920020042.
4. E.I. Shifrin, *Mechanical Systems and Signal Processing*, **56–57**, 181–196, (2015). DOI:10.1016/j.ymssp.2014.11.004.
5. E.I. Shifrin, *Mechanical Systems and Signal Processing*, **96**, 348–365 (2017). DOI: 10.1016/j.ymssp.2017.04.029.
6. И.М. Лебедев, Е.И.Шифрин, *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*, 4, 8–26, (2019). E01: 10.1134/ 80572329919040056.
7. И.М. Лебедев, Е.И.Шифрин, *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*, 4, 50–70, (2020). E01: 10.31857/s057232992004008x.
8. N. Khiem, T. Tran, V. Ninh, *Int. J. Solid Struct.*, **150**, 154–165, (2018). DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.06.010.
9. Л.Д.Акуленко, А.А. Гавриков, С.В. Нестеров, *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*, 6, 98–107, (2019). DOI: 10.1134/S0572329919060023.
10. А.А. Локтев, А. Баракат, *Интернет-журнал «Транспортные сооружения»*, **9**, 3, (2022).
11. J. Loya, J. Lopez-Puente, R. Zaera, J. Fernandez-Saez, *J. Appl. Phys.*, **105**, (2009). DOI:10.1063/1.3068370.
12. M. Akbarzadeh Khorshidi, M. Shariati, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **58**, 4, 717–724 (2017). DOI:10.1134/S0021894417040174.
13. Ч. Фу, С. Ян, *Прикладная механика и техническая физика*, **60**, 3, 196–206.
14. Y. Xiao, H. Jin, O. Yu, *Appl. Math. Mech.*, **37**, 513–528, (2016). DOI:10.1007/S10483-016-2042-9. Corpus ID: 124769412.
15. A.Ç. Batihan, F.S. Kadioğlu, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, **16**, 5, 15500066, (2016). DOI: 10.1142/S0219455415500066.
16. H. Mazaheri, H. Rahami, A. Kheyroddin, *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, **62**, 2, 337–345, (2018). DOI: 10.3311/PPci.11450.
17. C. Fu, Y. Wang, D. Tong, F. Chunyu, W. Yuyang, T. Dawei, *Mathematical Problems in Engineering*, 5987973 (2018). DOI: 10.1155/2018/5987973.
18. М.Н. Серазутдинов, *Вестник Технологического университета*, **27**, 7, 144–150? (2024).
19. М.Н. Серазутдинов, *Известия КГАСУ*, 2(68), 114–123, (2024). DOI: 10.48612/NewsKSUAE/68.10, EDN: JPGQMS.
20. М.Н. Серазутдинов, *Вестник Технологического университета*, **19**, 11, 160–162, (2016).

References

1. A.M. Akhtyamov, М.А. Ilgamov, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **54**, 1, 132–141, (2014). DOI: 10.1134/S0021894413010161.
2. М.А. Ilgamov, *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Solid Mechanics*, 1, 23–31, (2017).
3. А.М. Akhtyamov, М.А. Ilgamov, *Problems of mechanical engineering and machine reliability*, 2, 3–15, (2020). DOI: 10.31857/S0235711920020042.
4. E.I. Shifrin, *Mechanical Systems and Signal Processing*, **56–57**, 181–196, (2015). DOI:10.1016/j.ymssp.2014.11.004.
5. E.I. Shifrin, *Mechanical Systems and Signal Processing*, **96**, 348–365 (2017). DOI: 10.1016/j.ymssp.2017.04.029.
6. I.M. Lebedev, E.I. Shifrin, *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Solid State Mechanics*, 4, 8–26, (2019). E01: 10.1134/ 80572329919040056.
7. I.M. Lebedev, E.I. Shifrin, *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Solid State Mechanics*, 4, 50–70, (2020). E01: 10.31857/s057232992004008x.
8. N. Khiem, T. Tran, V. Ninh, *Int. J. Solid Struct.*, **150**, 154–165, (2018). DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2018.06.010.

9. L.D. Akulenko, A.A. Gavrikov, S.V. Nesterov, *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Solid Mechanics*, 6, 98-107, (2019). DOI: 10.1134/ S0572329919060023.
10. A.A. Loktev, A. Barakat, *Internet Journal "Transport Structures"*, 9, 3, (2022)..
11. J. Loya, J. Lopez-Puente, R. Zaera, J. Fernandez-Saez, *J. Appl. Phys.*, 105, (2009). DOI:10.1063/1.3068370.
12. M. Akbarzadeh Khorshidi, M. Shariati, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 58, 4, 717-724 (2017). DOI:10.1134/S0021894417040174.
13. Ch. Fu, S. Yang, *Applied Mechanics and Engineering Physics*, 60, 3, 196-206..
14. Y. Xiao, H. Jin, O. Yu, *Appl. Math. Mech.*, 37, 513–528, (2016). DOI:10.1007/S10483-016-2042-9. Corpus ID: 124769412.
15. A.Ç. Batihan, F.S. Kadioğlu, *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 16, 5, 15500066, (2016). DOI: 10.1142/S0219455415500066.
16. H. Mazaheri, H. Rahami, A. Kheyroddin, *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, 62, 2, 337–345, (2018). DOI: 10.3311/PPci.11450.
17. C. Fu, Y. Wang, D. Tong, F. Chunyu, W. Yuyang, T. Dawei, *Mathematical Problems in Engineering*, 5987973 (2018). DOI: 10.1155/2018/5987973.
18. M.N. Serazutdinov, *Herald of Technological University*, 27, 7, 144- 150? (2024).
19. M.N. Serazutdinov, *Izvestiya KSUAE*, 2(68), 114-123, (2024). DOI: 10.48612/News KSUAE/68.10, EDN: JPGQMS
20. M.N. Serazutdinov, *Herald of Technological University*, 19, 11, 160- 162, (2016).

© **М. Н. Серазутдинов** – д-р физ. мат. наук, проф. кафедры Основы проектирования и прикладная механика, Казанский национальный исследовательский технологический университет, Казань, Россия, serazmn@mail.ru.

© **M. N. Serazutdinov** – Doctor of Sciences (Physical and Mathematical Sci.), Professor, Department of Fundamentals of Design and Applied Mechanics, Kazan National Research Technological University, Kazan, Russia, serazmn@mail.ru.

Дата поступления рукописи в редакцию – 04.05.25.

Дата принятия рукописи в печать – 15.06.25.