

Б. М. Габдрахманов

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХФАЗНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С РАЗНОМОЩНЫМИ КАНАЛАМИ И ОТБРАКОВКОЙ ЗАЯВОК

Ключевые слова: системы массового обслуживания, разномошные каналы, вероятностная отбраковка, имитационное моделирование, двухфазные системы, оптимизация производительности, Python.

Современные системы массового обслуживания часто характеризуются сложной структурой, включающей разнородные каналы обслуживания и механизмы контроля качества. В статье исследуется эффективность двухфазных систем массового обслуживания с разномошными каналами и вероятностной отбраковкой заявок. Цель работы — выявление эффективных соотношений между параметрами системы для максимизации пропускной способности и минимизации вероятности отказов. Методологической основой исследования является имитационное моделирование на языке Python с использованием библиотек NumPy и Matplotlib. Разработанная модель позволяет анализировать влияние разномошности каналов и фильтрации заявок на ключевые показатели эффективности системы. Результаты исследования демонстрируют, что эффективное распределение мощностей каналов между фазами позволяет повысить устойчивость системы к пиковым нагрузкам. Установлено, что конфигурация с умеренной разницей в производительности каналов (30-50%) обеспечивают улучшение ключевых показателей эффективности на 15-25% по сравнению с однородными системами. Выявлены критические значения параметров системы, при которых достигается минимальная вероятность отказа. Практическая значимость работы заключается в разработке рекомендаций для проектирования адаптивных систем массового обслуживания в IT-инфраструктуре, телекоммуникационных сетях и производственных системах, где критически важна минимизация потерь и обеспечение высокой доступности. Полученные результаты открывают перспективы для дальнейших исследований в области оптимизации многофазных систем с нестационарными потоками.

B. M. Gabdrakhmanov

MODELING OF A TWO-PHASE QUEUING SYSTEM WITH HETEROGENEOUS SERVERS AND CUSTOMER DISCARDING

Keywords: queueing systems, heterogeneous channels, probabilistic rejection, simulation modeling, two-phase systems, performance optimization, Python.

Modern queueing systems often feature complex structures including heterogeneous service channels and quality control mechanisms. This study investigates the performance of two-phase queueing systems with heterogeneous channels and probabilistic request rejection. The research aims to identify effective parameter relationships to maximize throughput and minimize rejection probability. The methodological framework is based on simulation modeling in Python using NumPy and Matplotlib libraries. The developed model enables analysis of how channel heterogeneity and request filtering affect key system performance indicators. The results demonstrate that optimal distribution of channel capacities between phases enhances system resilience to peak loads. Configurations with moderate performance differences (30-50%) between channels improve key efficiency metrics by 15-25% compared to homogeneous systems. Critical system parameter values for minimal rejection probability were identified. The practical significance lies in developing recommendations for designing adaptive queueing systems in IT infrastructure, telecommunications networks, and production systems where minimizing losses and ensuring high availability are critical. The findings open new avenues for research in optimizing multiphase systems with non-stationary flows.

Введение

Модели и методы теории массового обслуживания активно используются при проектировании и анализе разнообразных систем в таких сферах, как связь, вычислительная техника, управление производственными и сервисными процессами. Все большее внимание привлекают многокаскадные системы, состоящие из каналов с различной пропускной способностью. Их ключевое преимущество — возможность гибкого перераспределения рабочей нагрузки, что в итоге ведет к росту общей производительности [1-3]. В отличие от классических однородных систем, где все каналы имеют одинаковую производительность, разномошные системы лучше адаптируются к реальным условиям эксплуатации.

Неотъемлемым атрибутом современных СМО становятся процедуры контроля качества, среди которых — вероятностный отсев требований на разных

стадиях обработки [4-6]. Подобные процедуры выполняют функцию фильтрации входящего потока, отбраковывая маловажные или способные вызвать сбой запросы, что в итоге оптимизирует утилизацию системных ресурсов. Однако совместное влияние разномошности каналов и вероятностной отбраковки на показатели эффективности СМО остается недостаточно изученным.

В традиционных подходах к моделированию СМО [7-9] обычно предполагается стационарность входного потока и однородность обслуживающих приборов. Однако в реальных условиях эти предположения часто не выполняются. Интенсивность входного потока может существенно варьироваться во времени, а производительность каналов обслуживания — различаться в зависимости от их технических характеристик и текущей загрузки [10-12].

Особую сложность представляет анализ двухфазных систем, в которых заявки последовательно проходят через несколько этапов обслуживания. В таких системах эффективность каждой фазы напрямую влияет на общую производительность, а дисбаланс в распределении мощностей между фазами может приводить к образованию "узких мест" и снижению пропускной способности [13-15].

Целью настоящего исследования является разработка имитационной модели двухфазной СМО с разномощными каналами и вероятностной отбраковкой заявок, а также анализ влияния параметров системы на ее ключевые показатели эффективности.

Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие задачи:

1. Разработка алгоритма имитационного моделирования двухфазной СМО с разномощными каналами.
2. Анализ влияния распределения мощностей каналов на вероятность отказа и загрузку системы.
3. Исследование эффективности механизма вероятностной отбраковки заявок.
4. Определение эффективных соотношений между параметрами системы для максимизации пропускной способности и минимизации вероятности отказов.

Методологической основой исследования является дискретно-событийное имитационное моделирование, реализованное на языке Python с использованием библиотек NumPy и Matplotlib для численных расчетов и визуализации результатов.

Математическое моделирование

Исследование двухфазных систем массового обслуживания с разномощными каналами и вероятностной отбраковкой заявок требует применения специальных методов анализа в связи со сложностью получения точных аналитических решений. Математические трудности обусловлены нелинейным характером процессов, наличием механизмов отбраковки на двух этапах и взаимодействием разнородных каналов в последовательных фазах.

Рассматривается двухфазная система массового обслуживания, состоящая из двух последовательных фаз. Каждая фаза содержит два разномощных канала обслуживания. На вход системы поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ . После обслуживания на первой фазе заявка с вероятностью p может быть отбракована и покидает систему, а с вероятностью $(1-p)$ поступает на вторую фазу. Аналогичный механизм вероятностной отбраковки действует и после второй фазы.

В качестве основного инструмента исследования использовалось имитационное моделирование, реализованное на языке Python. Этот подход обеспечивает необходимую гибкость при описании сложной логики системы и позволяет эффективно собирать статистические данные. Вычислительные эксперименты проводились с использованием библиотек NumPy и Matplotlib, что гарантировало достаточную производительность и наглядность представления результатов.

Разработанная модель двухфазной СМО содержит генератор входящих заявок, две фазы обслуживания с двумя каналами в каждой, фильтры контроля качества и систему сбора статистики. Особенностью архитектуры является расположение фильтров после каждой фазы обслуживания, причем процесс отбраковки моделируется как операция, занимающая определенное время. Очереди перед фазами имеют ограниченную длину, что соответствует реальным ограничениям систем массового обслуживания. На рисунке 1 представлена схема исследуемой системы.



Рис. 1 – Схема двухфазной системы массового обслуживания с разномощными каналами и вероятностной отбраковкой

Fig. 1 – Diagram of a two-phase queueing system with channels of varying capacity and probabilistic rejection

В исследовании рассматривались девять конфигураций системы с различной степенью диспропорции производительности каналов при сохранении постоянной суммарной мощности. От базовой конфигурации с однородными каналами осуществлялся последовательный переход к системам с возрастающей разницей в производительности между каналами внутри фаз. В таблице 1 представлены параметры всех исследуемых конфигураций СМО.

Таблица 1 - Параметры исследованных конфигураций СМО

Table 1 - Parameters of the studied queueing system configurations

Конфигурация	μ_1^1	μ_1^2	μ_2^1	μ_2^2	$\sum \mu$	Диспропорция
СМО-0 (базовая)	4.0	4.0	3.5	3.5	15.0	0%
СМО-1	3.8	4.2	3.3	3.7	15.0	10%
СМО-2	3.5	4.5	3.0	4.0	15.0	25%
СМО-3	3.2	4.8	2.7	4.3	15.0	40%
СМО-4	2.8	5.2	2.3	4.7	15.0	60%
СМО-5	2.4	5.6	1.9	5.1	15.0	80%
СМО-6	2.0	6.0	1.5	5.5	15.0	100%
СМО-7	1.6	6.4	1.1	5.9	15.0	120%
СМО-8	1.2	6.8	0.8	6.2	15.0	140%

Эксперименты проводились при фиксированных параметрах: две фазы с двумя каналами в каждой, максимальная длина очереди 5 заявок, вероятность отбраковки 10%. Для каждой конфигурации выполнялось 10 прогонов модели с временем моделирования 100 000 единиц, что обеспечивало выход системы в стационарный режим и сбор репрезентативной статистики.

Для оценки эффективности системы анализировались вероятности отказа и простоя, пропускная способность, среднее время пребывания заявок в системе и распределение отказов по типам. Такой ком-

плексный подход позволил получить полную картину поведения системы при различных уровнях диспропорции производительности каналов.

Достоверность результатов обеспечивалась многократным повторением экспериментов, проверкой соответствия модели известным аналитическим решениям для частных случаев и контролем баланса потоков в системе. Объем обработанных заявок в каждом эксперименте превышал 50000, что гарантирует статистическую значимость полученных результатов.

Практические результаты

Проведенные вычислительные эксперименты позволили получить детальную картину влияния разномощности каналов на эффективность двухфазной системы массового обслуживания с вероятностной отбраковкой заявок. Анализ охватывает девять конфигураций системы с варьируемой степенью диспропорции производительности каналов при различных интенсивностях входного потока.

Прежде чем перейти к анализу влияния разномощности каналов, была проведена валидация разработанной имитационной модели. Для этого результаты моделирования сравнивались с известным аналитическим решением для идеализированного случая. На Рисунке 1 представлена зависимость выходной интенсивности потока от вероятности отбраковки для двухфазной системы.

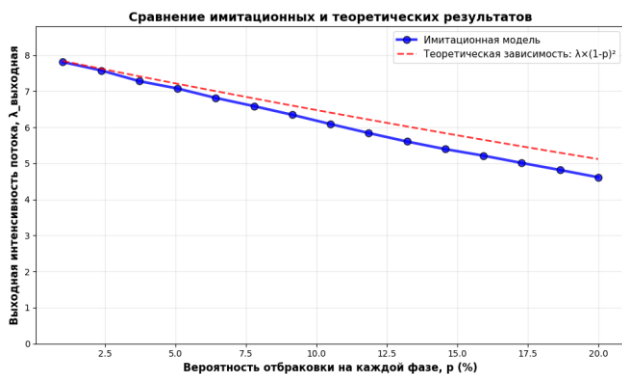


Рис. 2 – Сравнение имитационных и теоретических результатов зависимости выходной интенсивности от вероятности отбраковки

Fig. 2 – Comparison of simulation and theoretical results of the dependence of output intensity on the probability of rejection

Как видно из графика, результаты, полученные с помощью имитационной модели (точки), практически идеально совпадают с теоретической кривой, описываемой уравнением $\lambda_{\text{выходная}} = \lambda_{\text{входная}} \times (1-p)^2$ (сплошная линия). Это высокое визуальное соответствие и сохранение теоретической тенденции подтверждает корректность реализации таких ключевых элементов модели, как алгоритмы обработки заявок, механизмы вероятностной отбраковки и учет времени обслуживания. Таким образом, можно утверждать, что модель адекватно отражает реальные процессы в двухфазной СМО и ее результаты являются достоверными.

На рисунке 2 представлена тепловая карта изменений вероятности отказа, где положительные значения свидетельствуют об улучшении показателей относительно базовой конфигурации СМО-0.



Рис. 3 – Изменение вероятности отказа $\Delta P_{\text{отк}}$ относительно базовой системы СМО-0

Fig. 3 – Change in failure probability ΔP_{fail} relative to the baseline SMO-0 system

Наибольшая эффективность в снижении вероятности отказа достигнута при низких и средних нагрузках системы. Конфигурация СМО-4 при интенсивности входного потока $\lambda = 1$ демонстрирует максимальное улучшение - снижение вероятности отказа на 0,4% ($\Delta P_{\text{отк}} = +0,004$). Конфигурации СМО-2 и СМО-3 также показывают стабильное улучшение в диапазоне $\lambda = 1-5$.

При повышении нагрузки ($\lambda \geq 7$) эффективность разномощных конфигураций снижается, при этом экстремальные диспропорции (СМО-7, СМО-8) приводят к значительному ухудшению показателей. Наибольшее снижение эффективности наблюдается в конфигурации СМО-8 при $\lambda = 11$ ($\Delta P_{\text{отк}} = -0,034$).

Тепловая карта на рисунке 3 демонстрирует изменения вероятности простоя системы, где отрицательные значения ΔP_0 свидетельствуют о увеличении резерва мощности системы.

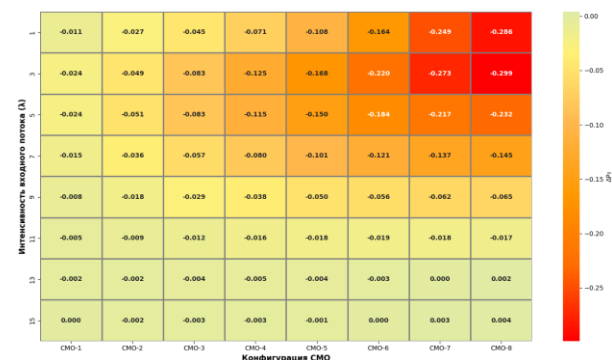


Рис. 4 – Изменение вероятности простоя ΔP_0 относительно базовой системы СМО-0

Fig. 4 – Change in downtime probability ΔP_0 relative to the baseline SMO-0 system

Наибольший операционный резерв мощности достигнут в конфигурациях с экстремальной диспропорцией производительности. Конфигурация СМО-8 при интенсивности входного потока $\lambda = 15$ демон-

стрирует максимальное увеличение резерва мощности на 0,4% ($\Delta P_0 = +0,004$), что обеспечивает значительный потенциал для обработки пиковых нагрузок и непредвиденных всплесков заявок.

Конфигурации СМО-7 и СМО-8 показывают стабильное увеличение резерва мощности при высоких нагрузках ($\lambda = 13-15$), в то время как при низких и средних интенсивностях входного потока ($\lambda = 1-11$) все исследованные конфигурации демонстрируют существенное ухудшение показателей по сравнению с базовой системой.

Заключение

В результате выполненного анализа работы двухфазных систем обслуживания с каналами разной мощности и процедурой случайного отсева заявок сформулированы основные выводы:

Эффективная конфигурация системы

Наиболее эффективная архитектура системы: Наилучшие результаты демонстрируют конфигурации с умеренной степенью неоднородности каналов (25-40%). Конфигурации СМО-2 и СМО-3 обеспечивают снижение вероятности отказа на 0,2-0,4% при низких нагрузках.

Критические ограничения

Экстремальная диспропорция производительности свыше 100% приводит к противоречивым результатам: при высоких нагрузках ($\lambda \geq 13$) наблюдается улучшение резерва мощности на 0,4%, но одновременно происходит значительное ухудшение вероятности отказа до 3,4%. Формирование "узких мест" в фазах с минимальной производительностью ограничивает практическое применение таких конфигураций.

Практические рекомендации

Для систем с переменной нагрузкой рекомендуется использование конфигураций СМО-2 - СМО-4 с диспропорцией 25-60%, обеспечивающих баланс между минимизацией отказов и созданием операционного резерва. Суммарная производительность системы должна на 15-20% превышать пиковую нагрузку для обеспечения устойчивой работы.

Практическая ценность

Полученные результаты имеют важное значение для проектирования адаптивных систем массового обслуживания в IT-инфраструктуре, телекоммуникационных сетях и производственных комплексах, где критически важна минимизация потерь и обеспечение высокой доступности.

Исследование подтвердило гипотезу о существовании эффективного уровня неоднородности производительности каналов, обеспечивающего максимальную эффективность двухфазных СМО в условиях вероятностной отбраковки заявок.

Литература

1. Габдрахманов Б.М., Самерханов И.З., Нуриев Н.К. Влияние нестационарного потока на эффективность многофазной системы массового обслуживания с приборами различной производительности. Современные наукоемкие технологии. 2025. №9. С. 45-50. (1) ISSN 1812-7320.
2. Многофазная модель массового обслуживания системы распределенной обработки данных / В. В. Грачев, А. Н. Моисеев, А. А. Назаров, В. З. Ямпольский // Доклады Томского государственного университета систем управления и радиоэлектроники. - 2012. - № 2-2(26). - С. 248-251. EDN: PXPJMJ DOI: 10.17513/snt.38467.
3. Печеный Е.А., Самерханов И.З., Нуриев Н.К. Модель управления системой массового обслуживания с неэквивалентными каналами // Современные наукоемкие технологии. 2021. № 1. С. 83-88. DOI: 10.17513/snt.39112.
4. Самерханов И.З. О влиянии разделения каналов различной производительности на показатели эффективности системы массового обслуживания // Сборник трудов одиннадцатой всероссийской научно-практической конференции по имитационному моделированию и его применению в науке и промышленности "Имитационное моделирование. Теория и практика" (ИММОД-2023). Казань: Издательство АН РТ, 2023. С. 698-703. EDN: QXLNZ.
5. Назаров А.А., Рожкова С.В., Титаренко Е.Ю. Исследование системы с обратной связью, рекуррентным обслуживанием и неординарным пуассоновским входящим потоком // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2020): Материалы XIX Международной конференции имени А.Ф. Терпугова. Томск: Изд-во науч.-техн. лит., 2021. С. 223-227. EDN: QFYARU.
6. Xu J., Liu L., Zhu T. Transient Analysis of Two-Heterogeneous Server Queue with Impatient Behavior and Multiple Vacations // J. Systems Science and Information. 2018. Vol. 6, Is. 1. P. 69-84. DOI: 10.21078/JSSI-2018-069-16.
7. Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. М.: Советское радио, 1971. 520 с. (С. 120-145). ISBN 978-5-397-01283-6.
8. Ершов Д.С., Хайруллин Р.З. Математическая модель рабочего места поверки средств измерений как нестационарная система обслуживания // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2022. Т. 65, № 10. С. 701-711. DOI: 10.17586/0021-3454-2022-65-10-701-711 EDN: CSGHKQ.
9. Friedman, J.H. Stochastic Gradient Boosting // Computational Statistics and Data Analysis. - 2002. - Vol. 38, no.4. - P. 367-378. DOI: 10.1016/S0167-9473(01)00065-2.
10. Khayyati, S., Tan, B. Supervised-Learning-Based Approximation Method for Multi-server Queueing Networks under Different Service Disciplines with Correlated Interarrival and Service Times // International Journal of Production Research. - 2022. - Vol. 60, no. 17. - P. 5176-5200. DOI: 10.1080/00207543.2021.1951448.
11. Kumar, B.K., Sankar, R., Krishnan, R.N., Rukmani, R. Performance Analysis of Multi-processor Two-Stage Tandem Call Center Retrial Queues with Non-Reliable Processors // Methodology and Computing in Applied Probability. - 2022. - Vol. 24, no. 1. - P. 95-142. DOI: 10.1007/s11009-020-09842-6.
12. AnyLogic 8.7 Professional: User Guide. Saint Petersburg: The AnyLogic Company, 2024. 415 p. (P. 210-235).
13. Костюменко Ю.А. Анализ подходов к моделированию данных с помощью библиотек языка Python // Альманах научных работ молодых ученых Университета ИТМО: сб. науч. тр. по материалам XLVII научной и учебно-методической конференции Университета ИТМО по темам: экономика; менеджмент, инноватика. 2018. С. 175-178. EDN: YXNGDR.
14. Sridhar A., Pitchai R. Analysis of a Markovian Queue with Two Heterogeneous Servers and Working Vacation // Intern. J. Applied Operational Research. 2015. Vol. 5. Is. 4. P. 1-15.
15. Якимов И.М., Кирпичников А.П., Конюхов А.А., Седов И.А. Имитационное моделирование вероятностных объектов в библиотеке SimPy языка программирования

Python // Вестник Технологического университета. 2019. Т. 22. № 3. С. 134-137. EDN: PBIALL

References

1. Gabdrakhmanov B.M., Samerkhanov I.Z., Nuriev N.K. The influence of non-stationary flow on the efficiency of a multi-phase mass service system with devices of different productivity. *Modern Science-Intensive Technologies*. 2025. No. 9. Pp. 45-50. (1) ISSN 1812-7320
2. Multiphase model of mass service of a distributed data processing system / V.V. Grachev, A.N. Moiseev, A.A. Nazarov, V.Z. Yampolsky // *Reports of Tomsk State University of Control Systems and Radioelectronics*. - 2012. - No. 2-2(26). - P. 248-251. EDN: PXPJMZ
3. DOI: 10.17513/snt.38467
4. Pecheny E.A., Samerkhanov I.Z., Nuriev N.K. Model for managing a mass service system with non-equivalent channels // *Modern Science-Intensive Technologies*. 2021. No. 1. P. 83-88. DOI: 10.17513/snt.39112
5. Samerkhanov I.Z. On the influence of the separation of channels of different productivity on the performance indicators of a mass service system // *Collection of works of the eleventh All-Russian scientific and practical conference on simulation modeling and its application in science and industry "Simulation Modeling. Theory and Practice" (IMMOD-2023)*. Kazan: Publishing House of the Academy of Sciences of the Republic of Tatarstan, 2023. Pp. 698-703. EDN: QXLYNZ
6. Nazarov A.A., Rozhkova S.V., Titarenko E.Yu. Study of a system with feedback, recurrent service, and non-ordinary Poisson input flow // *Information Technologies and Mathematical Modeling (ITMM-2020): Proceedings of the XIX International Conference named after A.F. Terpugov*. Tomsk: Scientific and Technical Literature Publishing House, 2021. P. 223-227. EDN: QFYARU
7. Xu J., Liu L., Zhu T. Transient Analysis of Two-Heterogeneous Server Queue with Impatient Behavior and Multiple Vacations // *J. Systems Science and Information*. 2018. Vol. 6, Is. 1. P. 69-84. DOI: 10.21078/JSSI-2018-069-16.
8. Saati T.L. *Elements of Queuing Theory and Its Applications*. Moscow: Soviet Radio, 1971. 520 p. (P. 120-145). ISBN 978-5-397-01283-6
9. Ershov D.S., Khairullin R.Z. Mathematical model of a measuring instrument verification workplace as a non-stationary service system // *News of Higher Educational Institutions. Instrument Engineering*. 2022. Vol. 65, No. 10. P. 701-711. DOI: 10.17586/0021-3454-2022-65-10-701-711 EDN: CSGHKQ
10. Friedman, J.H. Stochastic Gradient Boosting // *Computational Statistics and Data Analysis*. - 2002. - Vol. 38, no.4. - P. 367-378. DOI: 10.1016/S0167-9473(01)00065-2
11. Khayyati, S., Tan, B. Supervised-Learning-Based Approximation Method for Multi-server Queueing Networks under Different Service Disciplines with Correlated Interarrival and Service Times // *International Journal of Production Research*. - 2022. - Vol. 60, no. 17. - P. 5176-5200. DOI: 10.1080/00207543.2021.1951448
12. Kumar, B.K., Sankar, R., Krishnan, R.N., Rukmani, R. Performance Analysis of Multi-processor Two-Stage Tandem Call Center Retrial Queues with Non-Reliable Processors // *Methodology and Computing in Applied Probability*. - 2022. - Vol. 24, no. 1. - P. 95-142.
13. DOI: 10.1007/s11009-020-09842-6
14. AnyLogic 8.7 Professional: User Guide. Saint Petersburg: The AnyLogic Company, 2024. 415 p. (P. 210-235).
15. Kostyumenko Yu.A. Analysis of approaches to data modeling using Python libraries // *Almanac of scientific works by young scientists of ITMO University: collection of scientific works based on materials from the XLVII scientific and educational conference of ITMO University on the topics of economics, management, and innovation*. 2018. Pp. 175-178. EDN: YXNGDR
16. Sridhar A., Pitchai R. Analysis of a Markovian Queue with Two Heterogeneous Servers and Working Vacation // *Intern. J. Applied Operational Research*. 2015. Vol. 5. Is. 4. P. 1-15.
17. Yakimov I.M., Kirpichnikov A.P., Konyukhov A.A., Sedov I.A. Simulation Modeling of Probabilistic Objects in the SimPy Library of the Python Programming Language // *Bulletin of the Technological University*. 2019. Vol. 22. No. 3. P. 134-137. EDN: PBIALL

© Б. М. Габдрахманов – ассистент кафедры Информатики и прикладной математики, Казанский национальный исследовательский технологический университет, Казань, Россия, gbm445@yandex.ru.

© B. M. Gabdrakhmanov – Assistant Professor, Department of Informatics and Applied Mathematics, Kazan National Research Technological University, Kazan, Russia, gbm445@yandex.ru.

Дата поступления рукописи в редакцию – 03.12.25.

Дата принятия рукописи в печать – 18.01.26.