

О. М. Сахбиев, Ф. С. Хайруллин

ПРИМЕНЕНИЕ ИЗОГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ КУБИЧЕСКИМИ СПЛАЙНАМИ В РАСЧЕТЕ ТРЕХМЕРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ВАРИАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

Ключевые слова: аппроксимация, аппроксимация функций, кубические сплайны, изогеометрические аппроксимации, вариационный метод расчета, толстая труба.

В данной работе представлено применение изогеометрической аппроксимации кубическими сплайнами в расчетах на прочность вариационным методом на основе функций с конечными носителями, в частности при расчете максимальных напряжений толстой трубы, которая находится под внутренним давлением. Стоит отметить, что сама методика построения изогеометрической аппроксимации кубическими сплайнами была представлена авторами в более ранних работах. Основными свойствами и преимуществами этой аппроксимации являются: она не создает осцилляций, не требует введения дополнительных параметров сглаживания формы и отличается простым алгоритмом построения аппроксимирующей функции. Основной целью данного исследования было усовершенствование метода расчета трехмерных конструкций путем использования изогеометрической аппроксимации кубическими сплайнами кривых по наборам заданных точек. Кроме того, практическое использование изогеометрической аппроксимации позволило выявить некоторые специфические свойства, важные для её эффективного применения. При расчете толстой трубы конструкция разбивалась на два конечных элемента. Для описания граничных линий в виде окружностей одного конечного элемента использовалась изогеометрическая аппроксимация. В качестве набора данных для аппроксимации граничных линий выбраны три точки на окружности и две первые производные в левой и правых частях окружности. Учитывая, что приведенные результаты хорошо согласовались с известными теоретическими формулами для двух проверочных задач, можно констатировать, что вариационный метод расчета трехмерных конструкций сложной формы, в котором используется изогеометрическая аппроксимация кубическими сплайнами, может быть использован при расчете на прочность трехмерных конструкций и демонстрирует потенциал для решения широкого спектра инженерных задач.

O. M. Sakhbiev, F. S. Khayrullin

APPLICATION OF ISOGEOMETRIC APPROXIMATION BY CUBIC SPLINES

IN THE CALCULATION OF THREE-DIMENSIONAL STRUCTURES BY THE VARIATIONAL METHOD

Keywords: approximation, function approximation, cubic splines, isogeometric approximations, variational calculation method, thick pipe.

This paper presents the application of isogeometric approximation by cubic splines in strength calculations using the variational method based on finite-carrier functions, in particular when calculating the maximum stresses of a thick pipe under internal pressure. It is worth noting that the very technique of constructing an isogeometric approximation by cubic splines was presented by the authors in earlier works. The main properties and advantages of this approximation are: It does not create oscillations, does not require the introduction of additional shape smoothing parameters, and features a simple algorithm for constructing an approximating function. The main purpose of this study was to improve the method of calculating three-dimensional structures by using isogeometric approximation of curves by cubic splines over sets of specified points. In addition, the practical use of isogeometric approximation has revealed some specific properties that are important for its effective application. When calculating the thick pipe, the structure was divided into two final elements. Isogeometric approximation was used to describe the boundary lines in the form of circles of one finite element. Three points on the circle and the first two derivatives on the left and right sides of the circle were selected as the data set for approximating the boundary lines. Considering that these results are in good agreement with the known theoretical formulas for two verification problems, it can be stated that the variational method for calculating three-dimensional structures of complex shape, which uses isogeometric approximation by cubic splines, can be used to calculate the strength of three-dimensional structures and demonstrates the potential for solving a wide range of engineering problems.

Введение

Методы сплайновой аппроксимации в настоящее время широко используются в расчетах твердых деформируемых тел [1-5]. Однако их практическая реализация сопряжена с рядом нюансов. Классические подходы зачастую требуют введения дополнительных параметров, отказа от точных значений в узлах или использования сложных вычислительных алгоритмов, что может прилично усложнить решение задачи. Учитывая эти факты в работе [6] был предложен модифицированный алгоритм сплайновой аппроксимации, позволяющий упростить процесс построения и повысить точность

моделирования без значительных вычислительных затрат.

Отличия предложенной изогеометрической (сохраняющей форму) аппроксимации от классической кубической сплайновой аппроксимации состоит в том, что при изогеометрической аппроксимации, в общем случае, разрешающая система уравнения получается нелинейной. Кроме того, в промежуточных результатах на некоторых участках сначала аппроксимируется обратная функция $x = g(y)$, а далее, используя метод Ньютона [7] или метод половинного деления, находится $y = f(x)$. Как

было ранее авторами показано, предложенная аппроксимация сохраняла точное значение в узлах, не содержала осцилляции и выражалась несложным алгоритмом построения.

При описании геометрии трехмерных конструкций зачастую возникает необходимость описывать граничные линии и поверхности конструкций с помощью набора дискретных точек. В данной работе предлагается применять изогометрическую аппроксимацию, подробно рассмотренную в работе [6], для описания геометрии границ при расчете напряженно-деформированного состояния трехмерных конструкций вариационным методом [8–10].

Метод расчета

Вариационный метод расчета предполагает использование как криволинейных, так и прямолинейных декартовых систем координат. В данном случае использовалась декартова система координат x, y, z , в которой упругие деформации ε_{ij} определяются по формулам:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial y}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial z},$$

$$\gamma_{12} = 2 \cdot \varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x},$$

$$\gamma_{23} = 2 \cdot \varepsilon_{23} = \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y},$$

$$\gamma_{31} = 2 \cdot \varepsilon_{31} = \frac{\partial u_3}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial z},$$

где $\gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}$ – углы сдвига.

В матричном виде

$$\{\varepsilon\} = [A]\{u\}, \quad (1)$$

где $\{u\}^T = \{u_1, u_2, u_3\}$ – вектор перемещений,

$$\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}\},$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & ,0, & 0 \\ 0 & , \frac{\partial}{\partial y}, & 0 \\ 0 & ,0, & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & , \frac{\partial}{\partial x}, & 0 \\ 0 & , \frac{\partial}{\partial z}, & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & ,0, & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

Конструкция разделяется на подобласти V_k (рис. 1), в пределах которых компоненты вектора перемещений u_i аппроксимируются соотношением

$$u_i = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^L D_{inml}^k t_l(\beta_1) t_m(\beta_2) t_n(\beta_3), \quad (2)$$

где $i = \overline{1,3}$, $t_l(\beta_1)$, $l = \overline{1,L}$ – функции формы:

$$t_1(\beta_1) = 1 - \beta_1, \quad t_2(\beta_1) = \beta_1,$$

$$t_m(\beta_1) = t_1(\beta_1) [t_2(\beta_1)]^{m-2} \quad (m = \overline{3, M}),$$

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ – криволинейные координаты, которые

вводятся особым образом [8], D_{inml}^k – неизвестные константы.

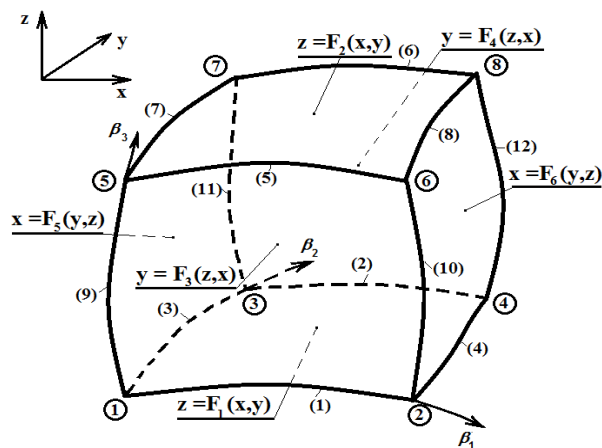


Рис. 1 – Подобласть с локальной системой координат $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, в которой вводится аппроксимация (2)

Fig. 1 – A subdomain with a local coordinate system $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ in which approximation (2) is introduced

Соотношение (2) может быть записано в матричном виде:

$$\{u\} = [D^k] \{t^k\}, \quad (3)$$

где $\{u\}^T = \{u_1, u_2, u_3\}$, $\{t^k\}^T = \{t_1^k, t_2^k, \dots, t_J^k\}$ – функции формы, заданные в системе координат $\beta_1, \beta_2, \beta_3$;

$$t_j^k = t_l(\beta_1) t_m(\beta_2) t_n(\beta_3),$$

$$j = (n-1) \cdot M \cdot L + L \cdot (m-1) + l, \quad J = N \cdot M \cdot L.$$

$[D^k]$ – матрица неизвестных постоянных размерностью $3 \times J$:

$$[D^k] = \begin{bmatrix} D_{11}^k & \dots & D_{1J}^k \\ D_{21}^k & \dots & D_{2J}^k \\ D_{31}^k & \dots & D_{3J}^k \end{bmatrix}.$$

Напряжения записываются через деформации на основании обобщенного закона Гука в виде:

$$\sigma_{ij} = \lambda \cdot \delta_{ij} \cdot \varepsilon_{kk} + 2 \cdot \mu \cdot \varepsilon_{ij},$$

где λ, μ – параметры Ляме; $\varepsilon_{kk} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$;

δ_{ij} – символы Кронекера.

$$\lambda = \frac{\nu \cdot E}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)};$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

В матричном виде

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\}. \quad (4)$$

Здесь $[E]$ – матрица упругости:

$$[E] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu, & \lambda, & \lambda, & 0, & 0, & 0 \\ \lambda, & \lambda + 2\mu, & \lambda, & 0, & 0, & 0 \\ \lambda, & \lambda, & \lambda + 2\mu, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \mu, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \mu, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \mu \end{bmatrix}$$

Потенциальная энергия деформации тела объема V_k определяется по формуле [11]:

$$\Pi_k = \frac{1}{2} \int_{V_k} \Pi_0 dv = \frac{1}{2} \int_{V_k} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dv; \quad i, j = \overline{1,3}.$$

В матричном виде:

$$\Pi_k = \frac{1}{2} \int_{V_k} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV, \quad (5)$$

где $\{\varepsilon\}^T = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}\},$

$$\{\sigma\}^T = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}\}.$$

Подставляя аппроксимирующие функции (3) в геометрические соотношения (1), затем в физические соотношения (4) и далее полученные выражения в формулу (5), записываем потенциальную энергию деформации через вектор перемещений:

$$\Pi_k = \frac{1}{2} \int_{V_k} \{t^k\}^T [D^k]^T [A]^T [E][A][D^k] \{t^k\} dV. \quad (6)$$

Для определения неизвестных констант D_{ij}^k , которые входят в соотношения (6), используется вариационный принцип Лагранжа [12-15], согласно которому должно выполняться условие

$$\delta \mathcal{E} = \sum_{k=1}^K \delta \mathcal{E}_k = \sum_{k=1}^K \int_{V_k} (\delta \Pi_k - \delta \mathcal{A}_k) dV = 0.$$

где \mathcal{E} – полная энергия конструкции, \mathcal{E}_k – полная энергия подобласти V_k ; $\delta \mathcal{A}_k$, Π_k , – соответственно вариация работы внешних сил и удельная потенциальная энергия деформации на единице объема подобласти V_k .

В процессе разбиения конструкции на подобласти V_k приходится описывать геометрию подобластей [8] с помощью поверхностей (грани шестигранника на рис. 1) и проекций на плоскости граничных линий γ_i (граничные линии указаны скобочками на рис.1). В свою очередь каждая проекция граничной линии γ_i на плоскость может быть задана либо аналитически (уравнение кривой) либо аппроксимироваться набором точек. В данной работе для задания проекций линий γ_i на плоскости и поверхностей $z = F_1(x, y)$, $z = F_2(x, y)$ воспользовались изогометрической аппроксимацией [6].

Для построения изогометрической аппроксимации кубическими сплайнами на отрезке [a,b] достаточно задать набор точек внутри отрезка и первые производные в точках a и b (рис. 2).

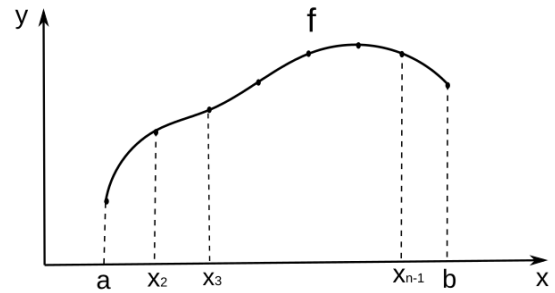


Рис. 2 – Изогометрическая аппроксимация кривой кубическими сплайнами

Fig. 2 – Isogeometric approximation of a curve by cubic splines

Сама методика построения аппроксимации подробно описана в работе [6]. Несмотря на то, что методика описана для плоских кривых, она применима и к цилиндрическим поверхностям, в уравнениях которых отсутствует одна из координат (например, уравнение цилиндрической поверхности $y^2 = 0,25 - x^2$).

Результаты и их обсуждения

В качестве первого примера была рассчитана толстая цилиндрическая труба под внутренним равномерным давлением. Производился линейный расчет и предполагалось, что материал трубы линейно-упругий. В силу симметрии рассматривалась четверть трубы (рис. 3). Внешний радиус трубы 0,5 м, внутренний радиус 0,3 м, длина трубы 1 м. Коэффициент Пуассона 0,3, модуль упругости $2 \cdot 10^5$ МПа, предел текучести 300 МПа. Граничные условия: при $z=1$ м и при $z=0$ – свободный край, с внешней стороны трубы – свободный край, на поверхности $y=0$ – перемещения вдоль оси y равны нулю, на поверхности $x=0$ – перемещения вдоль оси x равны нулю, на внутренней поверхности – равномерное давление 100 МПа.

В ходе проведения расчета четверть трубы была разбита на две подобласти. Каждая из подобластей образуется делением четверти трубы плоскостью, проходящей через ось трубы Oz и наклонённой под углом 45° к оси Ox . Для описания дуг и цилиндрической поверхности одной из подобластей использовалась изогометрическая аппроксимация [6], в которой каждая из дуг аппроксимировалась тремя точками с указанием первых производных в крайних точках дуг. Например, каждая из цилиндрических поверхностей одной подобласти была аппроксимирована набором, состоящим из трёх точек с указанием первых производных в двух крайних точках.

После проведения расчета было установлено, что максимальные напряжения возникают вблизи внутренней поверхности и составляют 213,75 МПа. Кроме того было установлено, что направлены эти напряжения перпендикулярно радиусу окружности.

Для линейного расчета согласно теоретическим формулам [11] максимальными являются окружные

напряжения вблизи внутреннего радиуса и равны 212,5 МПа.

Проведенное сравнение результатов расчета трубы демонстрирует хорошее согласование данных, полученных по представленной методике (с использованием изогометрической аппроксимации дуг), с результатами аналитического расчета по теоретическим формулам.

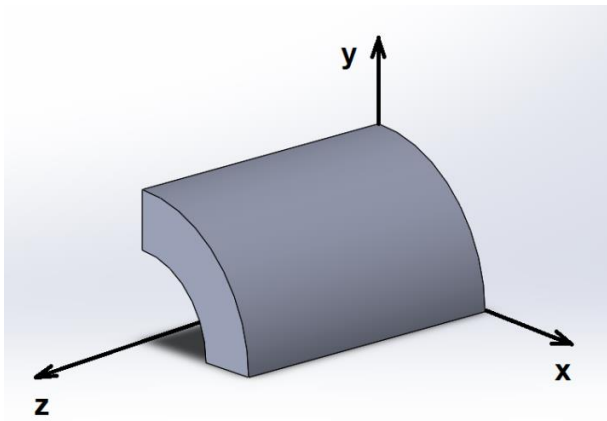


Рис. 3 – Цилиндрическая труба под внутренним давлением q

Fig. 3 – Cylindrical pipe under internal pressure q

В качестве второго примера была рассмотрена заданная слева балка, у которой верхняя поверхность является гиперболическим цилиндром. На рис. 4 отображен профиль рассчитанной балки, у которой, длина 0,9 м, высота сечения балки с левого края 0,415 м, высота сечения балки с правого края 0,1 м. К правому краю балки приложена сосредоточенная сила $F=100\text{кН}$, коэффициент Пуассона 0, модуль упругости $2 \cdot 10^5$ МПа.

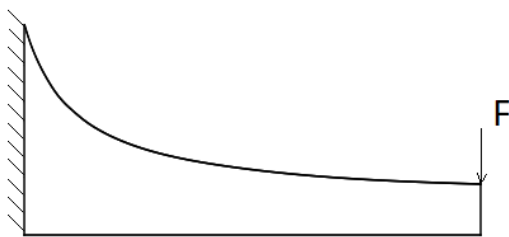


Рис. 4 – Профиль балки, у которой верхняя поверхность является гиперболической поверхностью

Fig. 4 – Profile of a beam whose upper surface is a hyperbolic surface

Данная задача была рассчитана одной подобластью (конечный элемент). Изогометрическая аппроксимация была использована для построения части гиперболы по заданному набору точек. Всего было использовано 7-ть точек и две первые производные в крайних точках. На рис. 4 представлена часть гиперболы – как результат выполнения аппроксимации по набору

точек. Рисунок наглядно показывает плавность аппроксимации и отсутствие осцилляций.

В ходе проведения расчета было установлено, что максимальные напряжения возникают в сечении, которое находится на расстоянии 0,5442 м от правой части балки. Кроме того, эти максимальные напряжения, величиной 155,3 МПа, возникают вблизи аппроксимируемой гиперболической поверхности и направлены перпендикулярно сечению.

Для указанного сечения, расположенного на расстоянии 0,5442 м от правой части балки, пользуясь формулами метода сопрягата, максимальные напряжения составили 162,4 МПа, что указывает на совпадение в расчетах (разница порядка 4,4%).

В обоих задачах результаты расчета с использованием изогометрической аппроксимации дали хорошее согласование с результатами расчета по классическим формулам. Следовательно, можно сделать вывод, что применение изогометрической аппроксимации расширяет круг решаемых задач вариационным методом расчета [8-10] за счет возможности описания подобластей дискретными точками.

Кроме того, можно констатировать, что изогометрическая аппроксимация кубическими сплайнами прошла успешную имплементацию в рабочие процессы численного расчета на прочность трехмерных конструкций произвольной формы, как удобный, простой и надежный метод аппроксимации кривых и поверхностей.

Литература

1. Якупов Н.М., Серазутдинов М.Н., *Расчет упругих тонкостенных конструкций сложной геометрии*. Рос. АН, Казан. науч. центр, Ин-т механики и машиностроения, Казань, 1993. 206 с.
2. Б.И. Квасов, *Методы изогометрической аппроксимации сплайнами*. ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2006. 360 с.
3. Агеев В.Н., Овсянникова Н.И., *Академическая публицистика*, 2, 9-16, (2019).
4. Карпов Д.А., Струченков В.И., *Российский технологический журнал*, 7, 3, 9-16, (2019). DOI: 10.32362/2500-316X-2019-7-3-77-88.
5. Смирнов М.Ю., Попов М.И., Скрыпников А.В., Боровлев А.О., Тихомиров П.В., Никитин В.В., *Вестник поволжского государственного технологического университета*. Серия: Материалы. конструкции. Технологии, 3, 19, 111-124, (2021). DOI: 10.25686/2542-114X.2021.3.111.
6. Сахбиев О.М., Хайруллин Ф.С., *Вестник технологического университета*, 25, 5, 111-114, (2022). DOI 10.55421/1998-7072_2022_25_5_111.
7. Киреев В.И., Пантелеев А.В., *Численные методы в примерах и задачах*. Высш. Шк., Москва, 2008. 480 с.
8. Ф.С. Хайруллин, О.М. Сахбиев, *Вестник Казанского технологического университета*. 17, 23, 328-330, (2014).
9. Хайруллин Ф.С., Сахбиев О.М., *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета*. Механика, № 2. С. 195–207, (2017).
10. Хайруллин Ф.С., Сахбиев О.М., *XII всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики*, (Уфа, Россия, 19–24 августа, 2019), Сборник трудов. 3, 215-217, (2019).

11. Тимошенко С.П., Гудьер Дж, *Теория упругости*, Наука, Москва, 1975, 576 с.
12. Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П. *Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек*, Наука, Москва, 1978. 288 с.
13. Лурье А.И., *Теория упругости*. Наука, Москва, 1970, 939 с.
14. Галимов К.З. *Основы нелинейной теории тонких оболочек*, Изд-во Казан. ун-та, Казань, 1975, 326 с.
15. Барашков В.Н., *Известия томского политехнического университета*, **306**, 4, 23-27, (2003).

References

- 1 Yakupov N.M., Serazutdinov M.N., *Calculation of elastic thin-walled structures of complex geometry*, Russian Academy of Sciences, Kazan. Scientific Center, Institute of Mechanics and Mechanical Engineering Kazan, 1993. 206 p.
- 2 B.I. Kvasov, *Methods of isogeometric approximation by splines*. FIZMATLIT, Moscow, 2006. 360 p.
- 3 Ageev V.N., Ovsyannikova N.I., *Academic Journalism*, 2, 9-16, (2019).
- 4 Karpov D.A., Struchenkov V.I., *Russian Journal of Technology*, 7, 3, 9-16, (2019). DOI: 10.32362/2500-316X-2019-7-3-77-88.
- 5 Smirnov M.Yu., Popov M.I., Skrypnikov A.V., Borovlev A.O., Tikhomirov P.V., Nikitin V.V., *Bulletin of the Volga State Technological University. Series: Materials. constructions. Technology*, 3, 19, 111-124, (2021). DOI: 10.25686/2542-114X.2021.3.111.

- 6 Sakhbiev O.M., Khairullin F.S., *Herald of Technological University*, 25, 5, 111-114, (2022). DOI 10.55421/1998-7072_2022_25_5_111.
- 7 Kireev V.I., Panteleev A.V., *Numerical methods in examples and problems*. Higher School, Moscow, 2008. 480 p.
- 8 F.S. Khairullin, O.M. Sakhbiev, *Herald of Kazan Technological University*, 17, 23, p.328-330, (2014).
- 9 Khairullin F.S., Sakhbiev O.M., *Bulletin of Perm National Research Polytechnic University. Mechanics*, No. 2. pp. 195-207, (2017).
- 10 Khairullin F.S., Sakhbiev O.M., *XII All-Russian Congress on Fundamental Problems of Theoretical and Applied Mechanics Proceedings(Ufa, Russia, August 19-24, 2019)*, Collection of works. 3, 215-217, (2019).
- 11 Timoshenko S.P., Goodyear J., *Theory of Elasticity*, Nauka, Moscow, 1975, 576 p.
- 12 Abovsky N.P., Andreev N.P., Deruga A.P. *Variational Principles of Elasticity Theory and shell Theory*, Nauka, Moscow, 1978. 288 p.
- 13 Lurie A.I., *Theory of elasticity*. Nauka, Moscow, 1970. 939 p.
- 14 Galimov K.Z. *Fundamentals of the nonlinear theory of thin shells*, Kazan Publishing House. University of Kazan, 1975, 326 p.
- 15 Barashkov V.N., *Proceedings of Tomsk Polytechnic University*, **306**, 4, pp. 23-27, (2003).

© **О. М. Сахбиев** – кандидат ф.-м. наук, доцент, кафедра Теоретической механики и сопротивления материалов (ТМСМ), Казанский национальный исследовательский технологический университет (КНИТУ), Казань, Россия, sakhbiev@mail.ru;
© **Ф. С. Хайруллин** – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра ТМСМ, КНИТУ, x_farid@mail.ru.

© **О. М. Sakhbiev** – PhD (Physical and Mathematical Sci.), Associate Professor, Department of Theoretical Mechanics and Strength of Materials (TMSM), Kazan National Research Technological University (KNRTU), Kazan, Russia, sakhbiev@mail.ru;
© **F. S. Khayrullin** – Doctor of Sciences (Physical and Mathematical Sci.), Professor, the TMSM department, KNRTU, x_farid@mail.ru.

Дата поступления рукописи в редакцию – 01.03.26.
Дата принятия рукописи в печать – 15.04.26.