

Р. Ф. Галиуллин, А. А. Ильина

ВЛИЯНИЕ КАТАСТРОФИЧЕСКИХ ОТКАЗОВ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ СМО С НЕЭКВИВАЛЕНТНЫМИ КАНАЛАМИ

Ключевые слова: система массового обслуживания, приборы различной производительности, катастрофические отказы, вероятность отказа, неоднородность производительности.

Целью работы является понять, как разная скорость работы каналов влияет на эффективность системы массового обслуживания, если в системе происходят катастрофические отказы (каналы полностью и невосстанавливаемо выходят из строя). В отличие от классических моделей с надёжными и одинаковыми по производительности приборами, в рассматриваемых системах эффективность обслуживания определяется не только уровнем нагрузки, но и тем, какой именно канал подвержен отказу. Модели такого типа позволяют более адекватно описывать реальные процессы, однако, несмотря на их высокую практическую значимость, остаются недостаточно изученными. В работе суммарная производительность системы фиксируется ($\mu_1 + \mu_2 = 10$), что позволяет изолированно исследовать влияние соотношения производительностей каналов на характеристики системы. Рассматриваются как симметричная конфигурация (5,5), так и варианты с разной производительностью каналов (4–6; 3–7; 2–8; 1–9). Вероятность отказа канала варьируется в диапазоне $p = 0,1–0,6$. Отдельно анализируются два сценария: отказ менее производительного канала и отказ более производительного канала. Проведён анализ поведения системы массового обслуживания при различных уровнях нагрузки, включая предельные режимы. В качестве показателей эффективности используются вероятность обслуживания Q и вероятность отказа $P_{отк}$ в стационарном режиме. Результаты расчётов показывают, что если отказывает менее производительный канал, то системы с каналами разной скорости в ряде случаев работают эффективнее, чем системы с одинаковыми каналами. В работе приведены примеры таких систем, выполнен анализ полученных результатов и обозначены направления дальнейших исследований. Полученные выводы могут быть использованы при проектировании и моделировании отказоустойчивых систем, в том числе трёхканальных, описываемых методами теории массового обслуживания.

R. F. Galiullin, A. A. Ilyina

THE IMPACT OF CATASTROPHIC FAILURES ON THE EFFECTIVENESS OF QS WITH UNEQUAL CHANNELS

Keywords: queuing system, devices of different performance, catastrophic failures, probability of failure, heterogeneity of performance.

The purpose of the work is to understand how different channel speeds affect the efficiency of the queuing system if catastrophic failures occur in the system (channels completely and permanently fail). Unlike classic models with reliable and equally powerful devices, in the systems under consideration, the efficiency of maintenance is determined not only by the load level, but also by which channel is susceptible to failure. Models of this type make it possible to more adequately describe real processes, however, despite their high practical significance, they remain insufficiently studied. In the work, the total system performance is fixed ($\mu_1 + \mu_2 = 10$), which allows us to study in isolation the effect of the ratio of channel capacities on the system characteristics. Both the symmetrical configuration (5, 5) and variants with different channel capacities are considered. (4-6; 3-7; 2-8; 1-9). The probability of channel failure varies in the range $p = 0.1–0.6$. Two scenarios are analyzed separately: failure of a less productive channel and failure of a more productive channel. The behavior of the queuing system at various load levels, including limit modes, is analyzed. The probability of service Q and the probability of rejection P_{rej} in the stationary mode are used as performance indicators. The calculation results show that if a less productive channel fails, then systems with channels of different speeds in some cases work more efficiently than systems with the same channels. The paper provides examples of such systems, analyzes the results obtained, and outlines areas for further research. The obtained conclusions can be used in the design and modeling of fault-tolerant systems, including three-channel systems described by the methods of queuing theory.

Введение

Интенсивность входного потока является одной из ключевых характеристик систем массового обслуживания (СМО) [1-3]. В традиционных моделях СМО часто предполагают одинаковую производительность обслуживающих каналов [1-4]. Однако на практике это далеко не всегда так: технические особенности оборудования, износ, квалификация персонала и другие факторы могут приводить к существенным различиям скорости обслуживания. Примеры таких систем широко известны: в серверных кластерах используются устройства разных поколений, на производственных линиях применяются станки с

различной скоростью обработки, а в колл-центрах операторы обладают неодинаковым уровнем подготовки.

В системах с каналами различной производительности возникает задача рационального распределения поступающих заявок между обслуживающими приборами [4]. Интенсивность обслуживания таких систем определяется не только общей нагрузкой, но и характеристиками конкретного канала, выполняющего обслуживание. Обзор существующих подходов к моделированию и анализу СМО с неэквивалентными (гетерогенными) приборами представлен в работах [5-7]. Использование таких моделей позволяет более адекватно описывать реальные процессы. Они

находят применение при анализе трафика в гетерогенных сетях, при проектировании производственных и логистических систем, а также в других прикладных задачах [8].

Помимо различий в производительности, важным фактором является возможность катастрофических отказов каналов. В подобных системах канал может внезапно выйти из строя без возможности немедленного восстановления, что резко сказывается на характеристиках СМО. Моделирование систем массового обслуживания с катастрофическими отказами подробно рассмотрено в работах [9-11]. При определённых сочетаниях параметров нагрузки и вероятности отказов системы с разной скоростью обслуживания каналов могут демонстрировать более высокую эффективность по сравнению с системами с одинаковыми приборами; другие примеры и подходы к анализу таких систем приведены в работах [12-15].

В настоящей работе рассматриваются двухканальные СМО с неэквивалентными каналами и катастрофическими отказами. Особое внимание уделено анализу влияния отказов каналов на эффективность функционирования системы по сравнению с классическими моделями. Объектом исследования является СМО с двумя каналами разной производительности, один из которых может в любой момент испытать катастрофический отказ. Цель работы — исследовать влияние различий в производительности каналов и вероятности их отказов на основные показатели системы (вероятность обслуживания и вероятность отказа).

Материалы и методы исследования

Математическое моделирование систем массового обслуживания с катастрофическими отказами каналов может быть выполнено с использованием стационарных уравнений Колмогорова. С учетом этого для решения задач исследования применяются методы компьютерного моделирования с последующей вычислительной реализацией в среде Python.

Для разработки моделей используется язык программирования Python с библиотеками numpy и pandas. Данная среда предоставляет довольно широкий комплекс встроенных функций для решения систем линейных алгебраических уравнений и обработки результатов. На рисунке 1 представлена реализация функции расчета 2-канальной системы с учетом катастрофических отказов каналов.

Рассмотрим модельный эксперимент: СМО, в которой интенсивность входного потока принимает значения от $\lambda = 1$ до $\lambda = 20$. Суммарная производительность системы зафиксирована и равна $\mu_1 + \mu_2 = 10$. Вероятность отказа канала p варьируется от 0,1 до 0,6.

На рисунке 2 представлена схема переходов между состояниями для 2-канальной СМО с учётом катастрофических отказов каналов. Состояния системы определяются комбинацией занятости каналов: S_{00} – оба канала свободны, S_{10} – занят только первый канал, S_{01} – занят только второй канал, S_{11} – оба канала заняты.

```
import numpy as np
import pandas as pd

def solve_smo_kolmogorov(lam, mu1, mu2, p1, p2):
    """
    Математическая модель Колмогорова для СМО M/M/2/0.
    """
    m1 = mu1 * (1 - p1)
    m2 = mu2 * (1 - p2)

    if (m1 + m2) == 0: return 0.0

    # Приоритет: заявка идет на более быстрый в данный момент канал
    if m1 >= m2:
        p11, p12 = 1.0, 0.0
    else:
        p11, p12 = 0.0, 1.0

    try:
        # Матрица интенсивностей (состояния 00, 10, 01, 11)
        A = np.array([
            [-lam, m1, m2, 0], # S00
            [lam * p11, -(m1 + lam), 0, 0], # S10
            [lam * p12, 0, -(m2 + lam), m1], # S01
            [0, 0, 0, 0] # S11
        ])

        B = np.array([0, 0, 0, 1])
        probs = np.linalg.solve(A, B)
        return max(0, min(1, 1 - probs[3])) # 0 = 1 - P_отказа
    except:
        return 0.0
```

Рис. 1 - Функция решения СМО с катастрофическими отказами

Fig. 1 - The decision function of the QS with catastrophic failures

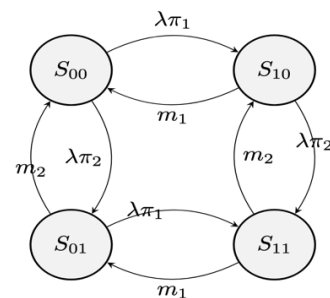


Рис. 2 - Граф переходов СМО с катастрофическими отказами каналов

Fig. 2 - Transition graph of a QS with catastrophic channel failures

В рассматриваемой системе интенсивность входного потока изменяется от $\lambda = 1$ до $\lambda = 20$. Приблизительно примером СМО такого типа может быть серверный кластер, где нагрузка меняется в течение дня. На основе данной модели проведён ряд вычислительных экспериментов, в которых сравнивается эффективность систем с одинаковой и разной производительностью каналов в условиях катастрофических отказов.

В ходе вычислительных экспериментов для исследования влияния нагрузки на показатели эффективности суммарная производительность системы зафиксирована на уровне $\mu_1 + \mu_2 = 10$. Для исследования производительности рассматриваемых систем в качестве критериев эффективности используются вероятность обслуживания Q и вероятность отказа $P_{отк}$ в стационарном режиме.

СМО-1 – система с приборами одинаковой производительности (базовая конфигурация 5,5). СМО-2 – система с приборами различной производительности (конфигурации 4,5–5,5; 4–6; 3–7; 2–8; 1–9 и симметричные им 5,5–4,5; 6–4; 7–3; 8–2; 9–1). В системах такого типа важно правильно распределять поступающие заявки между каналами. Для распределения заявок между приборами в СМО-2 используется алгоритм направления поступающих заявок на свободный прибор наибольшей производительности как наиболее эффективный для систем без накопления очереди [8].

Результаты исследования и их обсуждение

Рассмотрим результаты вычислительных экспериментов с моделью при различной нагрузке на систему. ниже представлены результаты расчетов для случая симметричной системы (5,5), которая является базой для сравнения.

С ростом интенсивности входного потока λ вероятность обслуживания Q ожидаемо снижается, а вероятность отказа $P_{отк}$ растёт. При $\lambda = 20$ система обслуживает лишь 38,5% заявок, остальные получают отказ. Эта система используется как базовая для сравнения с конфигурациями с разной производительностью каналов.

Рассмотрим теперь сценарии с отказами каналов. ниже представлены результаты моделирования при

Таблица 2 - Результаты вычислительных экспериментов при отказе слабого (Q_1 , $P_{отк1}$, ΔQ_1) и сильного (Q_2 , $P_{отк2}$, ΔQ_2) канала ($p = 0,4$, $\lambda = 10$)

Table 2 - Results of computational experiments for the failure of a weak (Q_1 , $P_{отк1}$, ΔQ_1) and strong (Q_2 , $P_{отк2}$, ΔQ_2) channel ($p = 0.4$, $\lambda = 10$)

Конфигурация (μ_1 , μ_2)	Q_1	$P_{отк1}$	ΔQ_1 , %	Q_2	$P_{отк2}$	ΔQ_2 , %
(5,5)	0,5289	0,4711	0,00	0,5289	0,4711	0,00
(4,5; 5,5)	0,5348	0,4652	+0,59	0,5216	0,4784	-0,73
(4; 6)	0,5391	0,4609	+1,02	0,5127	0,4873	-1,62
(3; 7)	0,5429	0,4571	+1,40	0,4959	0,5041	-3,30
(2; 8)	0,5392	0,4608	+1,03	0,4721	0,5279	-5,68
(1; 9)	0,5262	0,4738	-0,27	0,4349	0,5651	-9,40

При отказе слабого канала большинство систем с разной производительностью каналов становятся эффективнее симметричной базы. Максимальный выигрыш наблюдается для конфигурации (3,7) — +1,40% по вероятности обслуживания. Это объясняется тем, что потеря слабого канала (например, с производительностью 3 в системе 3–7) снижает общую мощность незначительно, тогда как в симметричной системе потеря одного канала (5) сокращает мощность вдвое. В конфигурации (1,9) выигрыш исчезает, так как производительность слабого канала уже была крайне мала.

При отказе сильного канала, напротив, эффективность систем с разной производительностью каналов снижается. При конфигурации (1,9) разница в вероятности обслуживания достигает -9,40%. Это объясняется тем, что в системе (1,9) 90% мощности сосредоточено в одном канале, и его отказ приводит к падению общей производительности с 10 до 1 (деградация на 90%). В симметричной системе отказ одного канала снижает мощность с 10 до 5 (деградация на 50%).

ниже представлены результаты вычислительных экспериментов при варьировании соотношения производительностей каналов для фиксированной нагрузки $\lambda = 15$ и вероятности отказа сильного канала $p = 0,4$.

Материалы табл. 3 демонстрируют, что увеличение диспропорции между производительностями обслуживающих устройств приводит к монотонному снижению сравнительной эффективности СМО с приборами различной производительности. При умеренной неоднородности (4,5-5,5) разница составляет -1,34%, при сильной (1-9) разница достигает -7,16%.

отказе слабого и сильного каналов с вероятностью $p = 0,4$ для различных конфигураций и $\lambda = 10$.

Таблица 1 - Результаты вычислительных экспериментов с моделью СМО при $p = 0$ (базовая система 5,5)

Table 1 - Results of computational experiments with the QS model at $p = 0$ (base system 5.5)

λ	μ_1	μ_2	Q (обслуживание)	$P_{отк}$ (отказ)
1	5,0	5,0	0,9836	0,0164
5	5,0	5,0	0,8000	0,2000
10	5,0	5,0	0,6000	0,4000
15	5,0	5,0	0,4706	0,5294
20	5,0	5,0	0,3846	0,6154

Таблица 3 - Влияние степени неоднородности на эффективность СМО ($\lambda = 15$, отказ сильного канала, $p = 0,4$)

Table 3 - The influence of the degree of heterogeneity on the efficiency of the QS ($\lambda = 15$, strong channel failure, $p = 0.4$)

Конфигурация (μ_1 , μ_2)	Q	ΔQ , %	$P_{отк}$
(5,5)	0,4706	0,00	0,5294
(4,5; 5,5)	0,4572	-1,34	0,5428
(4; 6)	0,4523	-1,83	0,5477
(3; 7)	0,4455	-2,51	0,5545
(2; 8)	0,4321	-3,85	0,5679
(1; 9)	0,3990	-7,16	0,6010

Проведенные вычислительные эксперименты позволяют сделать следующие выводы о влиянии катастрофических отказов каналов на эффективность систем с разной производительностью каналов.

Во-первых, выявлено, что при отказе слабого канала системы с разной производительностью каналов становятся эффективнее симметричной. Выигрыш в вероятности обслуживания достигает +1,40% (при $\lambda = 10$). Это позволяет рекомендовать такие конфигурации для систем, в которых отказы преимущественно происходят на менее производительном оборудовании.

Во-вторых, отказ сильного канала приводит к значительному снижению эффективности систем с разной производительностью каналов. Потери возрастают с увеличением разницы в производительности и при крайней асимметрии (1–9) составляют 9,4%

по вероятности обслуживания. Это делает нецелесообразным использование сильно несимметричных систем в условиях, где возможны отказы высокопроизводительного оборудования.

В-третьих, показано, что увеличение степени неоднородности каналов приводит к монотонному снижению сравнительной эффективности при отказе сильного канала. Потери максимальны при конфигурации (1,9) и минимальны при конфигурации, наиболее близкой к симметричной (4,5; 5,5). Исследование трёхканальной системы.

Таблица 4 - Результаты вычислительных экспериментов при отказе слабого (Q1, Pотк1, ΔQ1) и сильного (Q2, Pотк2, ΔQ2) канала для трёхканальной СМО канала (p = 0,4, λ = 10)

Table 4 – Results of computational experiments for the failure of the weak channel (Q1, Pотк1, ΔQ1) and the strong channel (Q2, Pотк2, ΔQ2) for a three-channel SMO network (p = 0.4, λ = 10)

Конфигурация (μ_1, μ_2, μ_3)	Q1	Pотк1	ΔQ1, %	Q2	Pотк2	ΔQ2, %
(3,33; 3,33; 3,34)	0,91678	0,08322	-2,07	0,91670	0,08330	-2,08
(2; 3; 5)	0,92598	0,07402	-1,15	0,90303	0,09697	-3,45
(1; 2; 7)	0,93206	0,06794	-0,54	0,88249	0,11751	-5,50
(1; 1; 8)	0,93206	0,06794	-0,54	0,87015	0,12985	-6,74
(0,5; 1; 8,5)	0,93485	0,06515	-0,27	0,86336	0,13664	-7,41

Данные табл.4 показывают, что при отказе слабого канала системы с разной производительностью каналов незначительно уступают симметричной базе. В конфигурации (0,5; 1; 8,5) потери минимальны (-0,27%), так как слабый канал вносил малый вклад в общую производительность. При отказе сильного канала эффективность систем с разной производительностью каналов снижается значительно. При конфигурации (0,5; 1; 8,5) разница в вероятности обслуживания достигает -7,41%. Это объясняется тем, что в данной системе 85% мощности сосредоточено в одном канале, и его отказ приводит к падению общей производительности с 10 до 1,5 (деградация на 85%).

Сравнение двух- и трёхканальных систем

Для сравнения эффективности двух- и трёхканальных систем при катастрофических отказах рассмотрим крайние асимметричные конфигурации: (1;9) для двухканальной и (0,5; 1; 8,5) для трёхканальной. Базовая эффективность (без отказов) для двухканальной системы составляет 52,89% (конфигурация 5,5), для трёхканальной — 93,75% (конфигурация 3,33; 3,33; 3,34). Таким образом, трёхканальная система при той же суммарной производительности обеспечивает значительно более высокую базовую эффективность.

При отказе слабого канала обе системы теряют одинаково мало — 0,27%. При отказе сильного канала потери в двухканальной системе достигают 9,40%, а в трёхканальной — 7,41%, что говорит о большей структурной устойчивости трёхканальной конфигурации.

Полученные для трёхканальной системы результаты подтверждают основные закономерности, выявленные для двухканальной системы: отказ слабого канала практически не влияет на эффективность, в то

Для оценки влияния количества каналов на полученные закономерности был проведён дополнительный вычислительный эксперимент с тремя каналами различной производительности. Суммарная производительность также зафиксирована на уровне $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 10$. Базовая симметричная конфигурация — (3,33; 3,33; 3,34).

ниже представлены результаты моделирования при отказе слабого и сильного каналов с вероятностью $p = 0,4$ для различных конфигураций и $\lambda = 10$.

время как отказ сильного канала приводит к существенным потерям, величина которых растёт с увеличением различий в производительности каналов.

Заключение

Экспериментально подтверждена целесообразность использования двухканальной системы массового обслуживания с разной производительностью каналов и учётом катастрофических отказов (восстановление каналов не предусмотрено). На основе вычислительного эксперимента объёмом 1620 расчётов выявлены области эффективности систем с различной производительностью каналов.

В ходе выполнения работы установлено, что при отказе слабого канала конфигурации с разной производительностью (в частности, 3–7) демонстрируют более высокую эффективность по сравнению с симметричной системой. Максимальный выигрыш составляет +1,40% по вероятности обслуживания (при $\lambda = 10$).

Показано, что отказ сильного канала является критическим для неоднородных систем. Потери эффективности возрастают с увеличением неоднородности: для конфигурации (4;6) они составляют 1,62%, а для крайнего случая (1;9) достигают 9,4%.

Выявлено, что оптимальное сочетание производительностей каналов с учётом катастрофических отказов зависит от того, какой канал чаще выходит из строя. При высокой вероятности отказа сильного канала рекомендуется использовать симметричную или близкую к ней конфигурацию (5;5) или (4;6). При отказах преимущественно слабого канала предпочтительны конфигурации с сильной разницей в производительности (2;8) или (3;7) — конфигурация (1;9) при отказе слабого канала не даёт выигрыша.

Проведён дополнительный анализ трёхканальной системы, который подтвердил основные закономерности, выявленные для двухканального случая. При отказе слабого канала потери минимальны (от –

2,07% для конфигурации с одинаковой производительностью до $-0,27\%$ для конфигурации с сильной разницей). При отказе сильного канала потери значительны и достигают $-7,41\%$ для конфигурации (0,5; 1; 8,5). Трёхканальная система при той же суммарной производительности обеспечивает более высокую эффективность при отсутствии отказов (93,75% против 52,89% у двухканальной конфигурации (1;9) при $\lambda = 10$).

Доказано, что применение неоднородных двухканальных СМО целесообразно лишь при высокой вероятности отказа слабого канала, а при отказах сильного канала предпочтительны симметричные конфигурации.

Литература

1. Л. Клейнрок, Теория массового обслуживания (Машиностроение, Москва, 1979).
2. Е.С. Вентцель, Исследование операций (Советское радио, Москва, 1972).
3. Б.В. Гнеденко, И.Н. Коваленко, Введение в теорию массового обслуживания (Наука, Москва, 1987).
4. П.П. Бочаров, А.В. Печинкин, Теория массового обслуживания (РУДН, Москва, 1995).
5. J.A. Jaleel, A. Wickeham, S. Doroudi, K.A. Gardner, *Queueing Syst.*, 100, 1-60 (2022).
6. K. Gardner, J.A. Jaleel, A. Wickeham, S. Doroudi, *Perform. Eval.*, 145, Article 102151 (2021).
7. D. Efrasinin, V. Rykov, N. Stepanova, *Mathematics*, 10, 6, Article 939 (2022). DOI: 10.3390/math10060939.
8. S. Singh, *J. Appl. Math. Comput.*, 59, 1-2, 417-438 (2019).
9. V. Karthick, V. Suvitha, *Math. Stat.*, 12, 3, 245-260 (2024).
10. Y. Zhang, S. Cui, K. Li, J. Wang, *SSRN Electron. J.* (2018). DOI: 10.2139/ssrn.3306578.
11. K. Divya, K. Indhira, *RAIRO Oper. Res.*, 58, 2, 1257-1279 (2024). DOI: 10.1051/ro/2024016.
12. S. Wan, S. Lan, *J. Appl. Math. Comput.*, 69, 6, 4333-4352 (2023).
13. S. Varshney, C. Shekhar, A.V.D. Reddy, *Front. Energy Res.*, 11, Article 1156789 (2023). DOI: 10.3389/fenrg.2023.1156789.
14. W. Xu, L. Li, W. Fan, L. Liu, *J. Appl. Math. Comput.*, 70, 4, 2879-2906 (2024).
15. R. Sudhesh, P. Savitha, *Int. J. Math. Oper. Res.*, 11, 3, 321-340 (2017).
16. И.З. Самерханов, *Соврем. наукоемк. технол.*, 4, 76-81 (2025). DOI: 10.17513/snt.40368.

References

1. L. Kleinrock, *Theory of Mass Service* (Mashinostroenie, Moscow, 1979).
2. E.S. Venttsel, *Operations Research* (Sovetskoe Radio, Moscow, 1972).
3. B.V. Gnedenko, I.N. Kovalenko, *Introduction to the Theory of Mass Service* (Nauka, Moscow, 1987).
4. P.P. Bocharov, A.V. Pechinkin, *Theory of Mass Service* (RUDN, Moscow, 1995).
5. J.A. Jaleel, A. Wickeham, S. Doroudi, K.A. Gardner, *Queueing Syst.*, 100, 1-60 (2022).
6. K. Gardner, J.A. Jaleel, A. Wickeham, S. Doroudi, *Perform. Eval.*, 145, Article 102151 (2021).
7. D. Efrasinin, V. Rykov, N. Stepanova, *Mathematics*, 10, 6, Article 939 (2022). DOI: 10.3390/math10060939.
8. S. Singh, *J. Appl. Math. Comput.*, 59, 1-2, 417-438 (2019).
9. V. Karthick, V. Suvitha, *Math. Stat.*, 12, 3, 245-260 (2024).
10. Y. Zhang, S. Cui, K. Li, J. Wang, *SSRN Electron. J.* (2018). DOI: 10.2139/ssrn.3306578.
11. K. Divya, K. Indhira, *RAIRO Oper. Res.*, 58, 2, 1257-1279 (2024). DOI: 10.1051/ro/2024016.
12. S. Wan, S. Lan, *J. Appl. Math. Comput.*, 69, 6, 4333-4352 (2023).
13. S. Varshney, C. Shekhar, A.V.D. Reddy, *Front. Energy Res.*, 11, Article 1156789 (2023). DOI: 10.3389/fenrg.2023.1156789.
14. W. Xu, L. Li, W. Fan, L. Liu, *J. Appl. Math. Comput.*, 70, 4, 2879-2906 (2024).
15. R. Sudhesh, P. Savitha, *Int. J. Math. Oper. Res.*, 11, 3, 321-340 (2017).
16. I.Z. Samerkhanov, *Modern High Technologies*, 4, 76-81 (2025). DOI: 10.17513/snt.40368.

© **Р. Ф. Галиуллин** – студент кафедры «Информатики и прикладной математики» (ИПМ), Казанский национальный исследовательский технологический университет (КНИТУ), Казань, Россия, radmirgaliullin@gmail.com; **А. А. Ильина** – студент кафедры ИПМ КНИТУ, ai0899968@gmail.com.

© **R. F. Galiullin** – Student, Department of Informatics and Applied Mathematics (DIAM), Kazan National Research Technological University (KNRTU), Kazan, Russia, radmirgaliullin@gmail.com; **A. A. Pyina** – Student, DIAM KNRTU, ai0899968@gmail.com.

Дата поступления рукописи в редакцию – 06.05.26.

Дата принятия рукописи в печать – 23.05.26.