

УДК 539.3

Д. В. Бережной, А. В. Карамов, М. К. Сагдатуллин

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПОЭТАПНОЙ ВЫЕМКИ ГРУНТА
ПРИ СТРОИТЕЛЬСТВЕ ПОДЗЕМНЫХ СООРУЖЕНИЙ**

Ключевые слова: метод конечных элементов, контактные задачи, конечные деформации, грунты.

Построена конечно-элементная методика расчета деформирования грунта, взаимодействующего с расположенными в нем упругими конструкциями. Расчет проводится на основе соотношений нелинейной теории упругости. Для моделирования взаимодействия между деформируемыми конструкциями и грунтовыми средами используется специальный «контактный» конечный элемент, позволяющий учесть все случаи взаимодействия контактирующих сред, включая сдвиг с проскальзыванием и отрыв. В качестве примера решена задача поэтапной выемки грунта из котлована с бетонными стенками. Показана необходимость решения контактной задачи для моделирования взаимодействия бетонных подконструкций и грунта.

Keywords: a method of finite elements, contact problems, finite strains, soils.

The finite-element calculation procedure of strain of the soil cooperating with elastic structures located in it is constructed. Calculation is spent on the basis of parities of the nonlinear theory of elasticity. For modeling interaction between deformable structures and soil continuums the special "contact" finite element is used, allowing to consider all cases of interaction of contacting continuums, including shift with slipping and detachment. As an example the problem of stage-by-stage excavation from a foundation ditch with concrete walls is solved. Necessity of the decision of a contact problem for modeling interaction concrete constructions and a soil is shown.

Введение

В процессе моделирования поэтапного строительства сложных элементов конструкций, промышленных и транспортных сооружений при составлении силовых и расчетных схем для выявления формирующихся полей напряжений, деформаций и перемещений требуется введение понятия трансформирующихся конструкций (механических систем), которые на отдельных этапах технологического процесса возведения переходят от одного класса к другому [1,2]. Математическое моделирование процесса формирования полей напряжений, деформаций и перемещений в элементах этой механической системы также требует постановки задачи механики трансформирующейся конструкции. В описанной выше механической системе трансформация расчетной схемы происходит дискретно при переходе с одного этапа строительства на другой. На каждом шаге трансформирования необходимые расчеты приходится проводить с учетом поля напряжений, перемещений и деформаций, накапливающихся в системе на предыдущих шагах. Зачастую такие расчеты требуют постановки соответствующих задач механики с учетом геометрической нелинейности, когда процесс деформирования представляется как последовательность равновесных состояний, и переход из текущего состояния в последующее определяется приращением нагрузки, изменением граничных условий или расчетной области и т.д.

Традиционно в механике деформируемого твердого тела для решения геометрически нелинейных задач получило распространение лагранжево описание среды, при этом хорошо формулируется краевая задача

в дифференциальной или вариационной формах [3-5], для решения которой возможно использование различных численных методов. В рамках современных численных методов получили развитие шаговые методы [6-12], в соответствии с которыми процесс деформирования представляется как последовательность равновесных состояний, и переход из текущего состояния в последующее определяется приращением нагрузки, изменением граничных условий или расчетной области и т.д. При моделировании взаимодействия элементов конструкций с грунтами в ряде случаев для адекватной оценки характера деформирования используются различные методики контактного взаимодействия элементов конструкций между собой и с грунтом [13-14].

1. Моделирование геометрической нелинейности

Обозначим радиус-вектор материальной частицы в деформированном и недеформированном состоянии через \mathbf{r} и \mathbf{R} соответственно, а вектор перемещений точки тела из недеформированного состояния в деформированное через \mathbf{u} , таким образом

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X}.$$

Тензор градиент деформаций определим как

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}},$$

причем \mathbf{F} может быть записан через вектор перемещений \mathbf{u} в виде

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}},$$

где \mathbf{I} – единичный тензор.

Градиент деформаций содержит в себе информацию об изменении объема, формы и вращении окрестности материальной точки деформируемого тела. Изменение объема определяется как

$$\frac{dV}{dV_0} = \det[\mathbf{F}],$$

где V_0 – объем начальной конфигурации, V – объем текущей конфигурации.

Известно, что любой невырожденный тензор с вещественными компонентами представляется в виде полярного разложения – произведения ортогонального тензора и положительно определенного. Введем такое представление для градиента деформаций:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U},$$

где \mathbf{R} – тензор ротации (описывающий вращение бесконечно близкой окрестности материальной точки как твердого целого), \mathbf{U} – правый тензор искажений (описывающий чистую деформацию этой окрестности).

Через правый тензор искажений выражаются так называемые меры логарифмических (истинных) деформаций (меры Генки)

$$\varepsilon = \ln \mathbf{U}.$$

Численно их можно определить интегрированием по пути нагружения

$$\varepsilon = \int d\varepsilon \approx \sum \Delta\varepsilon_n,$$

где

$$\Delta\varepsilon_n = \ln(\Delta\mathbf{U}_n).$$

Считаем, что справедливы соотношения

$$\Delta\mathbf{F}_n = \Delta\mathbf{R}_n \cdot \Delta\mathbf{U}_n,$$

где

$$\Delta\mathbf{F}_n = \mathbf{F}_n \cdot \mathbf{F}_{n-1}^{-1}.$$

Здесь \mathbf{F}_n – градиент деформаций на текущем шаге нагружения, \mathbf{F}_{n-1} – на предыдущем шаге.

Для определения $\Delta\varepsilon_n$ используется следующая методика. $\Delta\varepsilon_n$ представляется в виде

$$\Delta\varepsilon_n = \mathbf{R}_{1/2}^T \cdot \Delta\varepsilon_n^* \cdot \mathbf{R}_{1/2},$$

где $\mathbf{R}_{1/2}$ определяется из полярного разложения

$$\mathbf{F}_{1/2} = \mathbf{R}_{1/2} \cdot \mathbf{U}_{1/2}.$$

Здесь

$$\mathbf{F}_{1/2} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}_{1/2}}{\partial \mathbf{R}} = \mathbf{I} + \frac{1}{2} \frac{\partial (\mathbf{u}_n + \mathbf{u}_{n-1})}{\partial \mathbf{R}}.$$

Компоненты $\Delta\varepsilon_n^*$ определяются (в виде приведенного вектора)

$$\{\Delta\varepsilon_n^*\} = [B_{1/2}] \{\Delta u_n\},$$

где $[B_{1/2}]$ – матрица, связывающая деформации и перемещения, определенная в точке

$$\mathbf{X}_{1/2} = \frac{1}{2} (\mathbf{X}_n + \mathbf{X}_{n-1}).$$

Вычисленные приращения деформаций $\Delta\varepsilon_n$ должны быть прибавлены к деформациям, определенным после реализации предыдущих шагов нагружения

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{n-1} + \Delta\varepsilon_n.$$

Для определения Δu_n на каждом шаге приращения по нагрузке используется следующая итерационная процедура. Находится решение уравнения

$$[K_{n,i}^t] \{\Delta u_i\} = \{P_n\} - \{P_n^{NR}\},$$

где $[K_{n,i}^t]$ – тангенциальная матрица жесткости на n -ном шаге нагружения для i -той итерации уточнения нелинейного решения.

Полученное значение приращения перемещений прибавляется к накопленному уровню перемещений для n -ного шага нагружения

$$\mathbf{u}_{n,i} = \mathbf{u}_{n,i-1} + \Delta \mathbf{u}_i.$$

Итерационный процесс уточнения решения на каждом шаге по нагрузке заканчивается, когда будет выполнено условие сходимости вида

$$\|\{P_n\} - \{P_n^{NR}\}\| < \varepsilon ps \|\{P_n\}\|,$$

$$\{P_n^{NR}\} = \int [B_i]^T \{\sigma_i\} dV.$$

где εps выбиралось равным 0,01, $\{P_n\}$ – вектор узловых сил, определяющий достигнутый уровень нагружения, $\{P_n^{NR}\}$ – вектор эквивалентных массовых сил Ньютона-Рафсона. Тангенциальная матрица жесткости $[K_{n,i}^t]$ определяется в виде

$$[K_{n,i}^t] = [K_{n,i}] + [G_{n,i}].$$

Здесь $[K_{n,i}]$ – обычная матрица жесткости

$$[K_{n,i}] = \int [B_i]^T [D_i] [B_i] dV,$$

$[B_i]$ – матрица, связывающая деформации и перемещения в текущей конфигурации (для $\{X_n\}$),

$[D_i]$ – матрица упругих постоянных, $[G_{n,i}]$ – матрица геометрической жесткости, определяемая в виде

$$[G_{n,i}] = \int [S_i]^T [\tau_i] [S_i] dV,$$

где $[S_i]$ – матрица производных от функций формы,

$[\tau_i]$ – матрица текущих (истинных) напряжений Коши $\{\sigma_i\}$ в глобальной декартовой системе координат.

2. Моделирование механического контакта

Механизм взаимодействия подконструкций между собой может быть проиллюстрирован на рисунке 1, где изображен один из вариантов деформирования контактного слоя, для большей наглядности образованного двумя накладками.

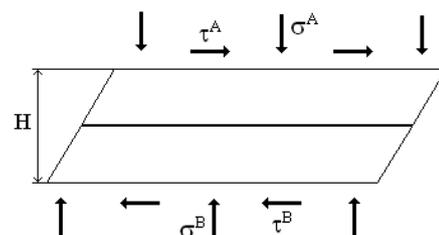


Рис. 1 - Деформирование контактного слоя

Для ситуации, когда в накладках возникает напряжение обжатия $\sigma_H = \sigma^A = \sigma^B$ и деформации $\varepsilon_H = \sigma_H / E_H$, где E_H – модуль упругости материала накладки. Геометрическим условием наличия этой ситуации является $H \leq (H^A + H^B)$, где H^A , H^B – первоначальные толщины накладок, H – расстояние между поверхностями, на которых они закреплены.

При наличии предварительного обжатия, т.е. при $H < (H^A + H^B)$, и в этом случае тоже справедливо $\sigma_H = \sigma^A = \sigma^B$, $\varepsilon_H = \sigma_H / E_H$.

Если силовое воздействие отсутствует или слишком мало и накладки свободно перемещаются, то $H \geq (H^A + H^B)$, $\sigma_H = 0$.

Если реализуется свободное проскальзывание, при котором касательные напряжения не возникают, что реализуется при $H \geq (H^A + H^B)$, и в этом случае $\tau_H = 0$.

Упругое взаимодействие с обжатием и сдвигом без проскальзывания возможно при $H \leq (H^A + H^B)$ и для напряжений и деформаций в накладках можно записать

$$\sigma_H = \sigma^A = \sigma^B, \tau_H = \tau^A = \tau^B, \\ \varepsilon_H = \sigma_H / E_H, \gamma_H = \varepsilon_H = \tau_H / G_H.$$

Дополнительным условием здесь должно быть условие

$$\tau_H \leq f |\sigma_H|, \quad (1)$$

где f – погонный коэффициент трения.

При невыполнении (1) возникает ситуация, когда происходит сдвиг накладок с проскальзыванием. В этом случае

$$\sigma_H = \sigma^A = \sigma^B, \tau_H = \tau_{np} = f |\sigma_H|, \varepsilon_H = \sigma_H / E_H$$

и имеется проскальзывание.

Все эти ситуации могут быть смоделированы в рамках механики сплошной среды, т.е. при представлении двух накладок в виде единого материала, обладающего специфическими свойствами. В частности, зависимость между нормальными напряжениями обжатия σ_H и поперечными деформациями

$$\varepsilon = [H - (H^A + H^B)] / (H^A + H^B)$$

должна иметь вид, изображенный на рисунке 2.

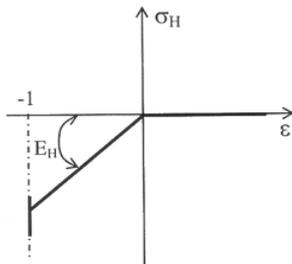


Рис. 2 – Зависимость напряжений и деформаций

Предельные значения касательных напряжений зависят от текущих напряжений обжатия в виде

$$\tau_{np} = \begin{cases} f |\sigma_H|, & \sigma_H < 0 \\ 0, & \sigma_H \geq 0 \end{cases}$$

Полученная задача является нелинейной и требует применения специальных методик для ее решения. Характерной особенностью этой нелинейности является то, что для нормальных напряжений имеют место ограничения по деформации ($H \leq H^A + H^B$, т.е. взаимная деформация накладок не может быть больше их общей толщины), а для касательных напряжений – по их предельным значениям, определяющим возможность проскальзывания.

Запишем общее разрешающее уравнение в вариационной форме исходя из принципа виртуальных перемещений

$$\sum_m \iiint_{\Omega_m} \{\sigma\}^T \{\delta\varepsilon\} d\Omega + \sum_k \iiint_{\Omega_k} \{\sigma_H\}^T \{\delta\varepsilon_H\} d\Omega = \\ = \sum_m \left(\iiint_{\Omega_m} \rho \{g\}^T \{\delta V\} d\Omega + \iint_{S_m^\sigma} \{P\}^T \{\delta V\} dS \right), \quad (2)$$

где сумма по m – сумма по объемам блоков, по k обозначается сумма по накладкам, Ω_m, Ω_k , – соответственно объемы блоков и накладок; $\{\sigma\}, \{\varepsilon\}, \{V\}$ – напряжения, деформации и перемещения элементарных объемов блоков; $\{\sigma_H\}, \{\varepsilon_H\}$ – напряжения и деформации в накладках, $\{g\}$ – вектор ускорения свободного падения ($\rho \{g\}$ – сила тяжести), $\{P\}$ – граничная нагрузка, действующая на части границы S_m^σ .

Будем считать, что первоначальное обжатие накладок всегда существует, т.е. $H_0 < (H^A + H^B)$. Таким образом, будем базовой считать ситуацию, изображенную на рисунке 1, или по диаграмме на рисунке 2 это участок $-1 < \varepsilon_n < 0$, а $-\tau_{np} < \tau < \tau_{np}$. Далее, в процессе деформирования (прикладывания дополнительной нагрузки от веса грунта, дополнительного оборудования, подвижного состава и т.д.) ситуация будет меняться.

Для решения сформулированной физически нелинейной задачи на базе уравнения (2) будем использовать итерационный метод, являющийся комбинацией метода начальных напряжений и метода дополнительной деформации. Базовым для определения k -ой итерации является следующее вариационное уравнение

$$\sum_m \iiint_{\Omega_m} \{\sigma^k\}^T \{\delta\varepsilon\} d\Omega + \sum_k \iiint_{\Omega_k} (\varepsilon_H^k E_H \delta\varepsilon_H + \\ + \gamma_H^k G_H \delta\gamma_H) d\Omega_k = \sum_m \left(\iiint_{\Omega_m} \rho \{g\}^T (\delta V) d\Omega + \right. \\ \left. + \iint_{S_m^\sigma} \{P\}^T \{\delta V\} dS \right) + \sum_k \iiint_{\Omega_k} (\tilde{\sigma}_H^k \delta\varepsilon_H + \tilde{\tau}_H^k \delta\gamma_H) d\Omega_k, \quad (3)$$

где $\tilde{\sigma}_H^k$ определяется следующим образом:

- при $-1 \leq \varepsilon_H^k \leq 0$ принимаем $\tilde{\sigma}_H^k = 0$ и решаем упругую задачу, реальные напряжения и деформации в накладках определяются как

$$\sigma_H^{P,k} = E_H \varepsilon_H^k, \varepsilon_H^{P,k} = \varepsilon_H^k;$$

- при $\varepsilon_H^k > 0$ полагаем $\tilde{\sigma}_H^k = E_H \varepsilon_H^k$ («начальные напряжения», фиктивно введенные в систему для ее линеаризации), реальные напряжения и деформации в накладках определяются как

$$\sigma_H^{P,k} = 0, \varepsilon_H^{P,k} = \varepsilon_H^k;$$

- при $\varepsilon_H^k < -1$ считаем $\tilde{\sigma}_H^k = E_H (\varepsilon_H^k + 1)$ (напряжения от «дополнительных деформаций», тоже фиктивно введенные), реальные напряжения и деформации в накладках определяются как

$$\sigma_H^{P,k} = E_H \varepsilon_H^k, \varepsilon_H^{P,k} = -1;$$

ε_H^k - деформации, определенные из решения уравнения (3).

Величины $\tilde{\tau}_H^k$ в (3) являются «начальными напряжениями» и их определение производится следующим образом:

- определяются деформации γ_H^k из решения (3), которые являются реальными деформациями;

- определяются «пробные» касательные напряжения $\tau_H^k = G_H \gamma_H^k$ и сравниваются с предельно допустимыми $\tau_{np}^k = f |\sigma_H^{P,k}|$.

При $|\tau_H^k| \leq \tau_{np}^k$, полагаем

$$\tilde{\tau}_H^k = 0,$$

а если $|\tau_H^k| \geq \tau_{np}^k$, то

$$\tilde{\tau}_H^k = \tau_H^k - \tau_{np}^k.$$

В практической реализации более предпочтительной является формулировка задачи в приращениях, когда на шаге итерации неизвестными являются не полные поля перемещений, которые в некоторых ситуациях являются фиктивными (при $\varepsilon_H < -1$), а их приращения. Опишем эту методику.

Пусть в начальный момент имеем некоторое обжатие $\varepsilon_H^{P,0}$ и, возможно, сдвиг $\gamma_H^{P,0}$, которые удовлетворяют условию

$$-1 < \varepsilon_H^{P,0} < 0, |G_H \gamma_H^{P,0}| \leq \tau_{np}^0 = f |E_H \varepsilon_H^{P,0}|.$$

Далее решается система уравнений (2) для нулевого приближения

$$\begin{aligned} & \sum_m \iiint_{\Omega_m} \{\Delta \sigma^0\}^T \{\delta \varepsilon\} d\Omega + \sum_k \iiint_{\Omega_k} \{\Delta \sigma_H^0\}^T \{\delta \varepsilon_H\} d\Omega = \\ & = \sum_m \left(\iiint_{\Omega_m} \rho \{g\}^T (\delta V) d\Omega + \iint_{S_m^\sigma} \{p\}^T (\delta V) ds \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Для каждой последующей итерации $k=1,2,3,\dots$ вводится следующая последовательность вычислений.

Предварительно имеем $\{\varepsilon^{k-1}\}, \{\sigma^{k-1}\}$ в блоках обделки, $\{\varepsilon_H^{P,k-1}\}, \{\sigma_H^{P,k-1}\}, \{\gamma_0^{P,k-1}\}, \{\tau_0^{P,k-1}\}$ в накладках. Из решения системы (4) на нулевой итерации и уравнения

$$\begin{aligned} & \sum_m \iiint_{\Omega_m} \{\Delta \sigma^k\}^T \{\delta \varepsilon\} d\Omega + \sum_k \iiint_{\Omega_k} \{\Delta \sigma_H^k\}^T \{\delta \varepsilon_H\} d\Omega = \\ & = \sum_k \iiint_{\Omega_k} (\Delta \tilde{\sigma}_H^k \delta \varepsilon_H + \Delta \tilde{\tau}_H^k \delta \gamma_H) d\Omega \end{aligned}$$

(5)

на последующих итерациях, определяем $\{\Delta \varepsilon^k\}, \{\Delta \sigma^k\}, \Delta \varepsilon_H^k, \Delta \gamma_H^k, \Delta \sigma_H^k, \Delta \tau_H^k$ и вычисляем следующее приближение напряженно-деформированного состояния блоков $\{\varepsilon^k\} = \{\varepsilon^{k-1}\} + \{\Delta \varepsilon^{k-1}\}, \{\sigma^k\} = \{\sigma^{k-1}\} + \{\Delta \sigma^{k-1}\}$ и «пробные» деформации в накладках $\varepsilon_H^k = \varepsilon_H^{P,k-1} + \Delta \varepsilon_H^{k-1}, \gamma_H^k = \gamma_H^{P,k-1} + \Delta \gamma_H^{k-1}$.

В зависимости от состояния накладок используется один из возможных вариантов их взаимодействия.

Алгоритм вычислений для напряжений и деформаций обжатия следующий:

1) если $-1 \leq \varepsilon_H^{P,k-1} \leq 0$, то

- при $-1 \leq \varepsilon_H^k \leq 0$ реальные деформации $\varepsilon_H^{P,k}$, напряжения $\sigma_H^{P,k}$ и «начальные» напряжения $\Delta \tilde{\sigma}_H^k$ для очередной итерации определены в виде $\varepsilon_H^{P,k} = \varepsilon_H^k, \sigma_H^{P,k} = \sigma_H^{P,k-1} + \Delta \sigma_H^{k-1}, \Delta \tilde{\sigma}_H^k = 0$;

- при $\varepsilon_H^k > 0$

$$\varepsilon_H^{P,k} = \varepsilon_H^k, \sigma_H^{P,k} = 0, \Delta \tilde{\sigma}_H^k = E_H \varepsilon_H^k;$$

- при $\varepsilon_H^k < -1$

$$\varepsilon_H^{P,k} = -1, \sigma_H^{P,k} = \sigma_H^{P,k-1} + \Delta \sigma_H^{k-1}, \Delta \tilde{\sigma}_H^k = E_H (\varepsilon_H^k + 1)$$

2) если $\varepsilon_H^{P,k-1} > 0, (\sigma_H^{P,k-1} = 0)$, то

- при $\varepsilon_H^k \geq 0$

$$\varepsilon_H^{P,k} = \varepsilon_H^k, \sigma_H^{P,k} = 0, \Delta \tilde{\sigma}_H^k = \Delta \sigma_H^{k-1} = E_H \Delta \varepsilon_H^{k-1};$$

- при $-1 \leq \varepsilon_H^k < 0$

$$\varepsilon_H^{P,k} = \varepsilon_H^k, \sigma_H^{P,k} = E_H \varepsilon_H^k, \Delta \tilde{\sigma}_H^k = 0;$$

3) если $\varepsilon_H^{P,k-1} = -1$, то

- при $\varepsilon_H^k < -1$ определяем

$$\varepsilon_H^{P,k} = -1, \sigma_H^{P,k} = \sigma_H^{P,k-1} + \Delta \sigma_H^{k-1},$$

$$\Delta \tilde{\sigma}_H^k = E_H \Delta \varepsilon_H^{k-1} = \Delta \tilde{\sigma}_H^{k-1};$$

- при $\varepsilon_H^k > -1$ вычисляем $\sigma_H^{P,k} = \sigma_H^{P,k-1} + \Delta \sigma_H^{k-1}$ и

если $\sigma_H^{P,k} < -E_H$, то

$$\varepsilon_H^{P,k} = -1, \Delta \tilde{\sigma}_H^k = E_H \Delta \varepsilon_H^{k-1} = \Delta \tilde{\sigma}_H^{k-1};$$

если $\sigma_H^{P,k} > -E_H$, то

$$\varepsilon_H^{P,k} = \varepsilon_H^k, \Delta \tilde{\sigma}_H^k = 0.$$

Для сдвиговых деформаций и напряжений используется следующий алгоритм:

- вычисляются предельные и «пробные» касательные напряжения

$$\tau_{np}^k = f |\sigma_H^{P,k}|, \tau_H^k = \sigma_H^{P,k} + \Delta \tau_H^{k-1};$$

- для реальных деформаций сдвига справедливо $\gamma_H^{P,k} = \gamma_H^k$.

Далее:

1) если $|\tau_H^{k-1}| < \tau_{np}^{k-1}$, то

- при $|\tau_H^k| < \tau_{np}^k$ выполняется

$$\tau_H^{P,k} = \tau_H^k, \Delta \tilde{\tau}_H^k = 0;$$

- при $|\tau_H^k| \geq \tau_{np}^k$ выполняется

$$\tau_H^{P,k} = \pm \tau_{np}^k, \Delta \tilde{\tau}_H^k = \tau_H^k - \tau_H^{P,k};$$

3) если $|\tau_H^{k-1}| = \tau_{np}^{k-1}$, то

- при $|\tau_H^k| \geq \tau_{np}^k$ справедливо

$$\tau_H^{P,k} = \pm \tau_{np}^k, \Delta \tilde{\tau}_H^k = \tau_H^{k-1} = G_H \Delta \gamma_H^{k-1};$$

- при $|\tau_H^k| < \tau_{np}^k$ выполняется

$$\tau_H^{P,k} = \tau_H^k, \Delta \tilde{\tau}_H^k = 0.$$

3. Контактный конечный элемент

Для реализации описанной в предыдущем разделе математической модели взаимодействия накладок в рамках МКЭ удобно определить так называемый контактный элемент.

В качестве исходной информации для него определяются радиусы - векторы точек, определяющих нижнюю (нечетные номера) и верхнюю (четные номера) поверхности, и первоначальная толщина $H = H^A + H^B$, которая может быть постоянной на элементе, а может варьироваться (в этом случае задаются их узловые значения).

Вводятся аппроксимации лицевых поверхностей

$$\begin{aligned} \bar{r}^{(-)}(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^n \bar{r}_{2i-1} N_i(\xi, \eta), \\ \bar{r}^{(+)}(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^n \bar{r}_{2i} N_i(\xi, \eta, \zeta), \end{aligned} \quad (6)$$

где $N_i(\xi, \eta)$ - известные функции формы для двумерной аппроксимации Сирендипового семейства.

Определяются касательные плоскости этих поверхностей. Например, для нижней поверхности определяются вспомогательные векторы:

$$\begin{aligned} \bar{G}_\xi^{(-)} &= \sum_{i=1}^8 \bar{r}_{2i-1} \frac{\partial N_i}{\partial \xi}, \quad \bar{G}_\eta^{(-)} = \sum_{i=1}^8 \bar{r}_{2i-1} \frac{\partial N_i}{\partial \eta}, \\ \bar{G}^{(-)} &= \bar{G}_\xi^{(-)} \times \bar{G}_\eta^{(-)}, \end{aligned}$$

по которым находятся ортогональные орты касательной плоскости в виде

$$\bar{P}_1^{(-)} = \frac{\bar{G}_\xi^{(-)}}{|\bar{G}_\xi^{(-)}|}, \quad \bar{P}_3^{(-)} = \frac{\bar{G}^{(-)}}{|\bar{G}^{(-)}|}, \quad \bar{P}_2^{(-)} = \bar{P}_3^{(-)} \times \bar{P}_1^{(-)}.$$

Аналогично определяются орты $\bar{P}_1^{(+)}, \bar{P}_2^{(+)}, \bar{P}_3^{(+)}$.

Для аппроксимации вектора перемещений будем использовать представление, аналогичное (6), т.е. введем

$$\begin{aligned} \bar{V}^{(-)}(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 \bar{V}_{2i-1} N_i(\xi, \eta), \\ \bar{V}^{(+)}(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^8 \bar{V}_{2i} N_i(\xi, \eta). \end{aligned}$$

В процессе деформирования первоначально параллельные лицевые поверхности $\bar{r}^{(-)}$ и $\bar{r}^{(+)}$ перестают быть таковыми и степень их относительных поворотов в процессе деформирования может

достигать большой величины. Поэтому все геометрические, кинематические и силовые характеристики будем определять на обеих лицевых поверхностях самостоятельно. Другими словами, напряженно-деформированное состояние будем определять самостоятельно в каждой накладке (примыкающих, соответственно, к поверхностям $\bar{r}^{(-)}$ и $\bar{r}^{(+)}$), что позволит более верно моделировать их состояния при проскальзывании друг относительно друга.

Расстояния $H_*^{(-)}$ и $H_*^{(+)}$ от одной лицевой поверхности по нормали к ней до другой определяются в виде

$$\begin{aligned} H_*^{(-)} &= \bar{P}_3^{(-)} \cdot [\bar{r}^{(+)} + \bar{V}^{(+)} - \bar{r}^{(-)} - \bar{V}^{(-)}], \\ H_*^{(+)} &= \bar{P}_3^{(+)} \cdot [\bar{r}^{(+)} + \bar{V}^{(+)} - \bar{r}^{(-)} - \bar{V}^{(-)}]. \end{aligned}$$

Эти значения являются базовыми в суждении о характере взаимодействия между накладками, т.к. деформации обжатия определяются в виде

$$\varepsilon_H^{(+)} = \frac{H_*^{(+)} - H}{H}, \quad \varepsilon_H^{(-)} = \frac{H_*^{(-)} - H}{H}.$$

Для варианта итерационного процесса в приращениях определяются начальные толщины

$$H_0^{(-)} = \bar{P}_3^{(-)} \cdot [\bar{r}^{(+)} - \bar{r}^{(-)}], \quad H_0^{(+)} = \bar{P}_3^{(+)} \cdot [\bar{r}^{(+)} - \bar{r}^{(-)}],$$

по которым вычисляются начальные деформации

$$\varepsilon_H^{0(+)} = \frac{H_0^{(+)} - H}{H}, \quad \varepsilon_H^{0(-)} = \frac{H_0^{(-)} - H}{H}$$

и приращения изменений толщин

$$\begin{aligned} \Delta H^{(-)} &= \bar{P}_3^{(-)} \cdot [\Delta \bar{V}^{(+)} - \Delta \bar{V}^{(-)}], \\ \Delta H^{(+)} &= \bar{P}_3^{(+)} \cdot [\Delta \bar{V}^{(+)} - \Delta \bar{V}^{(-)}], \end{aligned}$$

необходимые для вычисления приращения деформации

$$\Delta \varepsilon_H^{(+)} = \frac{\Delta H_0^{(+)}}{H}, \quad \Delta \varepsilon_H^{(-)} = \frac{H_0^{(-)}}{H}.$$

Определение касательных деформаций и напряжений (для оценки сил трения) требует введения локальных систем координат x', y', z' ,

ориентированных вдоль ортов $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ для каждой из лицевых поверхностей. Вычисление производных вдоль этих направлений удобно производить посредством коэффициентов

$$A = \bar{G}_\xi \cdot \bar{P}_1, \quad B_1 = \bar{G}_\eta \cdot \bar{P}_1, \quad B_2 = \bar{G}_\eta \cdot \bar{P}_2$$

в виде

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial y'} = -\frac{B_1}{B_2} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{B_2} \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Соотношения для деформации сдвига удобнее взять в векторном виде

$$\gamma_{z'y'} = \bar{P}_1 \cdot \frac{\partial \bar{V}}{\partial z'} + \bar{P}_3 \cdot \frac{\partial \bar{V}}{\partial x'}, \quad \gamma_{y'z'} = \bar{P}_2 \cdot \frac{\partial \bar{V}}{\partial z'} + \bar{P}_3 \cdot \frac{\partial \bar{V}}{\partial y'},$$

где

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial z'} = \frac{\bar{V}^{(+)} - \bar{V}^{(-)}}{H}.$$

Если использовать представления

$$\vec{P}_m = P_{mx}\vec{i} + P_{my}\vec{j} + P_{mz}\vec{k}, \quad \vec{V}_m = U_m\vec{i} + V_m\vec{j} + W_m\vec{k},$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орты глобальной декартовой системы координат, то для деформации сдвига, ассоциированных с нижней лицевой поверхностью (накладкой, прилегающей к этой поверхности), справедливы выражения

$$\begin{aligned} \gamma_{x'z'}^{(-)} &= \frac{1}{H} \sum_{i=1}^8 \{P_{1x}^{(-)}, P_{1y}^{(-)}, P_{1z}^{(-)}\} \begin{Bmatrix} U_{2i} \\ V_{2i} \\ W_{2i} \end{Bmatrix} N_i(\xi, \eta) + \\ &+ \sum_{i=1}^8 \left(\frac{1}{A} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \{P_{3x}^{(-)}, P_{3y}^{(-)}, P_{3z}^{(-)}\} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{H} N_i(\xi, \eta) \{P_{1x}^{(-)}, P_{1y}^{(-)}, P_{1z}^{(-)}\} \right) \begin{Bmatrix} U_{2i-1} \\ V_{2i-1} \\ W_{2i-1} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \gamma_{y'z'}^{(-)} &= \frac{1}{H} \sum_{i=1}^8 \{P_{2x}^{(-)}, P_{2y}^{(-)}, P_{2z}^{(-)}\} \begin{Bmatrix} U_{2i} \\ V_{2i} \\ W_{2i} \end{Bmatrix} N_i(\xi, \eta) + \\ &\sum_{i=1}^8 \left(\{P_{3x}^{(-)}, P_{3y}^{(-)}, P_{3z}^{(-)}\} \left(-\frac{B_1}{AB_2} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{B_2} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \right) - \frac{N_i(\xi, \eta)}{H} \{P_{2x}^{(-)}, P_{2y}^{(-)}, P_{2z}^{(-)}\} \right) \begin{Bmatrix} U_{2i-1} \\ V_{2i-1} \\ W_{2i-1} \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Аналогично можно выписать выражения для деформаций $\gamma_{x'z'}^{(+)}$ и $\gamma_{y'z'}^{(+)}$.

Для сокращения дальнейших выкладок введем вспомогательные векторные величины

$$\{B_{xi}^{11}\} = \frac{\partial N_i}{A \partial \xi} \begin{Bmatrix} P_{3x}^{(-)} \\ P_{3y}^{(-)} \\ P_{3z}^{(-)} \end{Bmatrix} - \frac{N_i}{H} \begin{Bmatrix} P_{1x}^{(-)} \\ P_{1y}^{(-)} \\ P_{1z}^{(-)} \end{Bmatrix}, \quad \{B_{xi}^{12}\} = \frac{N_i}{H} \begin{Bmatrix} P_{1x}^{(-)} \\ P_{1y}^{(-)} \\ P_{1z}^{(-)} \end{Bmatrix},$$

$$\{B_{xi}^{22}\} = \frac{\partial N_i}{A \partial \xi} \begin{Bmatrix} P_{3x}^{(+)} \\ P_{3y}^{(+)} \\ P_{3z}^{(+)} \end{Bmatrix} + \frac{N_i}{H} \begin{Bmatrix} P_{1x}^{(+)} \\ P_{1y}^{(+)} \\ P_{1z}^{(+)} \end{Bmatrix}, \quad \{B_{xi}^{21}\} = -\frac{N_i}{H} \begin{Bmatrix} P_{1x}^{(+)} \\ P_{1y}^{(+)} \\ P_{1z}^{(+)} \end{Bmatrix},$$

$$\{B_{yi}^{11}\} = \left(-\frac{B_1}{AB_2} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \frac{1}{B_2} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \begin{Bmatrix} P_{3x}^{(-)} \\ P_{3y}^{(-)} \\ P_{3z}^{(-)} \end{Bmatrix} - \frac{N_i}{H} \begin{Bmatrix} P_{2x}^{(-)} \\ P_{2y}^{(-)} \\ P_{2z}^{(-)} \end{Bmatrix},$$

$$\{B_{yi}^{12}\} = \frac{N_i}{H} \begin{Bmatrix} P_{2x}^{(-)} \\ P_{2y}^{(-)} \\ P_{2z}^{(-)} \end{Bmatrix}, \quad \{B_{yi}^{21}\} = -\frac{N_i}{H} \begin{Bmatrix} P_{2x}^{(+)} \\ P_{2y}^{(+)} \\ P_{2z}^{(+)} \end{Bmatrix},$$

$$\{B_{yi}^{22}\} = \left(-\frac{B_1}{AB_2} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \frac{1}{B_2} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \right) \begin{Bmatrix} P_{3x}^{(+)} \\ P_{3y}^{(+)} \\ P_{3z}^{(+)} \end{Bmatrix} + \frac{N_i}{H} \begin{Bmatrix} P_{2x}^{(+)} \\ P_{2y}^{(+)} \\ P_{2z}^{(+)} \end{Bmatrix}$$

и

$$\{B_{zi}^{11}\} = -\frac{N_i}{H} \begin{Bmatrix} P_{3x}^{(-)} \\ P_{3y}^{(-)} \\ P_{3z}^{(-)} \end{Bmatrix}, \quad \{B_{zi}^{12}\} = \frac{N_i}{H} \begin{Bmatrix} P_{3x}^{(-)} \\ P_{3y}^{(-)} \\ P_{3z}^{(-)} \end{Bmatrix},$$

$$\{B_{zi}^{21}\} = -\frac{N_i}{H} \begin{Bmatrix} P_{3x}^{(+)} \\ P_{3y}^{(+)} \\ P_{3z}^{(+)} \end{Bmatrix}, \quad \{B_{zi}^{22}\} = \frac{N_i}{H} \begin{Bmatrix} P_{3x}^{(+)} \\ P_{3y}^{(+)} \\ P_{3z}^{(+)} \end{Bmatrix}.$$

С помощью этих величин деформации обжатия и сдвига записываются в виде

$$\Delta \varepsilon_H^{(-)} = \sum_{i=1}^8 \left(\{B_{zi}^{11}\}^T \begin{Bmatrix} \Delta U_{2i-1} \\ \Delta V_{2i-1} \\ \Delta W_{2i-1} \end{Bmatrix} + \{B_{zi}^{12}\}^T \begin{Bmatrix} \Delta U_{2i} \\ \Delta V_{2i} \\ \Delta W_{2i} \end{Bmatrix} \right);$$

$$\Delta \varepsilon_H^{(+)} = \sum_{i=1}^8 \left(\{B_{zi}^{21}\}^T \begin{Bmatrix} \Delta U_{2i-1} \\ \Delta V_{2i-1} \\ \Delta W_{2i-1} \end{Bmatrix} + \{B_{zi}^{22}\}^T \begin{Bmatrix} \Delta U_{2i} \\ \Delta V_{2i} \\ \Delta W_{2i} \end{Bmatrix} \right);$$

$$\Delta \gamma_{x'z'}^{(-)} = \sum_{i=1}^8 \left(\{B_{xi}^{11}\}^T \begin{Bmatrix} \Delta U_{2i-1} \\ \Delta V_{2i-1} \\ \Delta W_{2i-1} \end{Bmatrix} + \{B_{xi}^{12}\}^T \begin{Bmatrix} \Delta U_{2i} \\ \Delta V_{2i} \\ \Delta W_{2i} \end{Bmatrix} \right);$$

$$\Delta \gamma_{x'z'}^{(+)} = \sum_{i=1}^8 \left(\{B_{xi}^{21}\}^T \begin{Bmatrix} \Delta U_{2i-1} \\ \Delta V_{2i-1} \\ \Delta W_{2i-1} \end{Bmatrix} + \{B_{xi}^{22}\}^T \begin{Bmatrix} \Delta U_{2i} \\ \Delta V_{2i} \\ \Delta W_{2i} \end{Bmatrix} \right);$$

$$\Delta \gamma_{y'z'}^{(-)} = \sum_{i=1}^8 \left(\{B_{yi}^{11}\}^T \begin{Bmatrix} \Delta U_{2i-1} \\ \Delta V_{2i-1} \\ \Delta W_{2i-1} \end{Bmatrix} + \{B_{yi}^{12}\}^T \begin{Bmatrix} \Delta U_{2i} \\ \Delta V_{2i} \\ \Delta W_{2i} \end{Bmatrix} \right);$$

$$\Delta \gamma_{y'z'}^{(+)} = \sum_{i=1}^8 \left(\{B_{yi}^{21}\}^T \begin{Bmatrix} \Delta U_{2i-1} \\ \Delta V_{2i-1} \\ \Delta W_{2i-1} \end{Bmatrix} + \{B_{yi}^{22}\}^T \begin{Bmatrix} \Delta U_{2i} \\ \Delta V_{2i} \\ \Delta W_{2i} \end{Bmatrix} \right).$$

Далее определяется интеграл в левой части уравнения (5) для напряжений и деформаций в накладках (контактном слое)

$$\begin{aligned} &\iiint_{\Omega} \left[\delta \varepsilon_H^{(-)} E_H \Delta \varepsilon_H^{(-)} + \delta \varepsilon_H^{(+)} E_H \Delta \varepsilon_H^{(+)} + \right. \\ &+ \delta \gamma_{x'z'}^{(-)} G_H \Delta \gamma_{x'z'}^{(-)} + \delta \gamma_{x'z'}^{(+)} G_H \Delta \gamma_{x'z'}^{(+)} + \\ &+ \delta \gamma_{y'z'}^{(-)} G_H \Delta \gamma_{y'z'}^{(-)} + \delta \gamma_{y'z'}^{(+)} G_H \Delta \gamma_{y'z'}^{(+)} \left. \right] d\Omega = \\ &= \sum_{i,j=1}^8 \{ \delta U_{2i-1}, \delta V_{2i-1}, \delta W_{2i-1}, \delta U_{2i}, \delta V_{2i}, \delta W_{2i} \}. \end{aligned}$$

$$\cdot [K_{ij}^H] \{ \Delta U_{2i-1}, \Delta V_{2i-1}, \Delta W_{2i-1}, \Delta U_{2i}, \Delta V_{2i}, \Delta W_{2i} \}^T,$$

где блоки матрицы жесткости вычисляются в виде следующих интегралов

$$[K_{ij}^{H1}] = \iint_S E_H \frac{H_0^{(-)}}{2} \left(\{B_{zi}^{11}\} \{B_{zi}^{11}\}^T, \{B_{zi}^{11}\} \{B_{zi}^{12}\}^T, \right. \\ \left. \{B_{zi}^{12}\} \{B_{zi}^{11}\}^T, \{B_{zi}^{12}\} \{B_{zi}^{12}\}^T \right) dS,$$

$$[K_{ij}^{H2}] = \iint_S E_H \frac{H_0^{(+)}}{2} \left(\{B_{zi}^{21}\} \{B_{zi}^{21}\}^T, \{B_{zi}^{21}\} \{B_{zi}^{22}\}^T, \right. \\ \left. \{B_{zi}^{22}\} \{B_{zi}^{21}\}^T, \{B_{zi}^{22}\} \{B_{zi}^{22}\}^T \right) dS,$$

$$\begin{aligned}
[K_{ij}^{H3}] &= \iint_S G_H \frac{H_0^{(-)}}{2} \left(\begin{array}{c} \{B_{xi}^{11}\} \{B_{xi}^{11}\}^T + \{B_{yi}^{11}\} \{B_{yi}^{11}\}^T, 0 \\ \{B_{xi}^{12}\} \{B_{xi}^{11}\}^T + \{B_{yi}^{12}\} \{B_{yi}^{11}\}^T, 0 \end{array} \right) + \\
&+ G_H \frac{H_0^{(-)}}{2} \left(\begin{array}{c} 0, \{B_{xi}^{11}\} \{B_{xi}^{12}\}^T + \{B_{yi}^{11}\} \{B_{yi}^{12}\}^T \\ 0, \{B_{xi}^{12}\} \{B_{xi}^{12}\}^T + \{B_{yi}^{12}\} \{B_{yi}^{12}\}^T \end{array} \right) dS, \\
[K_{ij}^{H4}] &= \\
&= \iint_S \{G_H \frac{H_0^{(+)}}{2} \left(\begin{array}{c} \{B_{xi}^{21}\} \{B_{xi}^{21}\}^T + \{B_{yi}^{21}\} \{B_{yi}^{21}\}^T, 0 \\ \{B_{xi}^{22}\} \{B_{xi}^{21}\}^T + \{B_{yi}^{22}\} \{B_{yi}^{21}\}^T, 0 \end{array} \right) + \\
&+ G_H \frac{H_0^{(+)}}{2} \left(\begin{array}{c} 0, \{B_{xi}^{21}\} \{B_{xi}^{22}\}^T + \{B_{yi}^{21}\} \{B_{yi}^{22}\}^T \\ 0, \{B_{xi}^{22}\} \{B_{xi}^{22}\}^T + \{B_{yi}^{22}\} \{B_{yi}^{22}\}^T \end{array} \right) \} dS, \\
[K_{ij}^H] &= [K_{ij}^{H1}] + [K_{ij}^{H2}] + [K_{ij}^{H3}] + [K_{ij}^{H4}].
\end{aligned}$$

Вычислить аналитически интегралы в представленном выражении невозможно. Поэтому для этого используются формулы численного интегрирования по формуле Гаусса-Лежандра третьего и пятого порядков по каждой координате.

Слагаемые в правой части уравнения (5) определяются по алгоритму, описанному в предыдущем разделе, т.е. определяются дополнительные (начальные) напряжения $\Delta \tilde{\sigma}_H^k, \Delta \tilde{\tau}_{x'z'}^k, \Delta \tilde{\tau}_{y'z'}^k$ и вычисляются их работы на вариациях деформаций, т.е.

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Omega_k} \left(\frac{H_0^{(-)}}{2} \Delta \tilde{\sigma}_H^k \delta \varepsilon_H^{(-)} + \frac{H_0^{(+)}}{2} \Delta \tilde{\sigma}_H^k \delta \varepsilon_H^{(+)} + \right. \\
&+ \frac{H_0^{(-)}}{2} \Delta \tilde{\tau}_{x'z'}^k \delta \gamma_{x'z'}^{(-)} + \frac{H_0^{(+)}}{2} \Delta \tilde{\tau}_{x'z'}^k \delta \gamma_{x'z'}^{(+)} + \frac{H_0^{(-)}}{2} \Delta \tilde{\tau}_{y'z'}^k \delta \gamma_{y'z'}^{(-)} + \\
&+ \left. \frac{H_0^{(+)}}{2} \Delta \tilde{\tau}_{y'z'}^k \delta \gamma_{y'z'}^{(+)} \right) d\Omega = \sum_{i=1}^8 \{ \delta U_{2i-1}, \delta V_{2i-1}, \delta W_{2i-1}, \delta U_{2i},
\end{aligned}$$

$$\delta V_{2i}, \delta W_{2i} \} \cdot \{ \Delta P_{2i-1}^x, \Delta P_{2i-1}^y, \Delta P_{2i-1}^z, \Delta P_{2i}^x, \Delta P_{2i}^y, \Delta P_{2i}^z \}^T,$$

где для узловых сил справедливы представления в виде интегралов

$$\begin{aligned}
&\{ \Delta P_{2i-1}^x, \Delta P_{2i-1}^y, \Delta P_{2i-1}^z \}^T = \\
&= \iint_S \left(\frac{H_0^{(-)}}{2} \left(\Delta \tilde{\sigma}_H^k \{B_{zi}^{11}\} + \Delta \tilde{\tau}_{x'z'}^k \{B_{xi}^{11}\} + \Delta \tilde{\tau}_{y'z'}^k \{B_{yi}^{11}\} \right) + \right. \\
&+ \left. \frac{H_0^{(+)}}{2} \left(\Delta \tilde{\sigma}_H^k \{B_{zi}^{21}\} + \Delta \tilde{\tau}_{x'z'}^k \{B_{xi}^{21}\} + \Delta \tilde{\tau}_{y'z'}^k \{B_{yi}^{21}\} \right) \right) dS, \\
&\{ \Delta P_{2i}^x, \Delta P_{2i}^y, \Delta P_{2i}^z \}^T = \\
&= \iint_S \left(\frac{H_0^{(-)}}{2} \left(\Delta \tilde{\sigma}_H^k \{B_{zi}^{12}\} + \Delta \tilde{\tau}_{x'z'}^k \{B_{xi}^{12}\} + \Delta \tilde{\tau}_{y'z'}^k \{B_{yi}^{12}\} \right) + \right. \\
&+ \left. \frac{H_0^{(+)}}{2} \left(\Delta \tilde{\sigma}_H^k \{B_{zi}^{22}\} + \Delta \tilde{\tau}_{x'z'}^k \{B_{xi}^{22}\} + \Delta \tilde{\tau}_{y'z'}^k \{B_{yi}^{22}\} \right) \right) dS.
\end{aligned}$$

Эти интегралы также вычисляются численно по квадратурной формуле Гаусса-Лежандра пятого порядка, что дает возможность более точно представить распределение контактных напряжений по площади накладок. При этом образуется и постоянно обновляется база данных о механизме

возможного взаимодействия между накладками в каждой квадратурной точке каждого контактного КЭ. Она представляет собой значения

$$\varepsilon_H^{P,k}, \sigma_H^{P,k}, \gamma_{x'z'}^{P,k}, \gamma_{y'z'}^{P,k}, \tau_{x'z'}^{P,k}, \tau_{y'z'}^{P,k}$$

для обеих лицевых поверхностей и на каждой итерации анализируется и перевычисляется.

4. Моделирование поэтапной выемки грунта из котлована

Для примера приводится расчет напряженно-деформированного состояния подпорных стенок котлована при поэтапной выемки грунта.

Так как котлован имеет форму параллелепипеда, его длина велика по сравнению с его шириной, то для выявления основных закономерностей деформирования расчет можно проводить в двумерной постановке, в условиях плоской деформации. Механические характеристики дискретно расположенных объектов при проведении расчетов пересчитывались к средним величинам.

Грунт в котловане предполагается однородным (песок мелкий водонасыщенный) со следующими характеристиками: модуль упругости 33 МПа, коэффициент Пуассона 0,3, удельный вес 2040 кг/м³. Для бетона модуль упругости 30000 МПа, коэффициент Пуассона 0,2, удельный вес 2500 кг/м³, толщина подпорных стенок 1 м, длина – 15 м, расстояние между ними 10 м, максимальная глубина котлована – 10 м. Расчет проводится для случая плоской деформации.

Боковые и нижняя граница области задаются прямыми линиями, и на них задаются условия отсутствия смещений в направлении, перпендикулярном прямолинейным границам. Расстояние от подпорных стенок до границ области выбираются из условия малости влияния подпорных стенок на поле перемещений и напряженно-деформированное состояние грунта (вычислительный эксперимент показал, что достаточно, чтобы это расстояние было не меньше десяти расстояний между стенками котлована). Дискретизация проводится квадратными конечными элементами сплошной среды, за базовый размер стороны элемента выбирается толщина бетонной стенки. При расчетах на первом этапе прикладывался собственный вес расчетной области. Далее, поэтапно и равными порциями проводится выемка грунта. Вычислительный эксперимент показал, что в данной задаче достаточно провести выемку всего грунта за десять этапов.

Были проведены две серии расчетов. В первом случае контактная задача не решалась, во втором случае между грунтом и бетонными стенками вводился контактный элемент и допускался отрыв и проскальзывание между стенками котлована и грунтом (с коэффициентом трения $f=0,95$). На рисунке 3 приводится распределение напряжений σ_y (Па) в подпорных стенках и в грунте для первого расчетного случая

(без контакта), на рисунке 4 – для второго расчетного случая (с контактом).

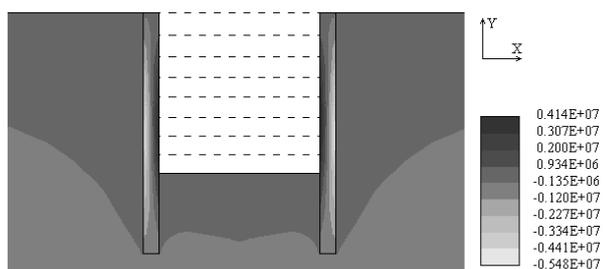


Рис. 3 - Случай 1. Распределение напряжений (без контакта)

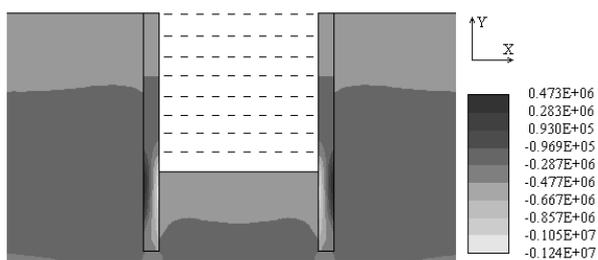


Рис. 4 - Случай 2. Распределение напряжений (с контактом)

В таблице 1 проводится исследование сходимости изгибных напряжений в подпорных стенках при сгущении конечно-элементной сетки. В таблице 2 приводятся изгибные напряжения в подпорных стенках в зависимости от коэффициента трения между стенками и грунтом.

Таблица 1 - Изгибные напряжения [МПа] в подпорных стенках в зависимости от степени дискретизации расчетной области.

Число элементов по толщине стенки		1	2	3	4	5
		Без учета контакта	σ_y^{\max}	3,89	4,01	4,08
	σ_y^{\min}	-4,74	-5,06	-5,27	-5,43	-5,48
С учетом контакта	σ_y^{\max}	0,39	0,42	0,45	0,47	0,47
	σ_y^{\min}	-1,07	-1,15	-1,20	-1,23	-1,24

Таблица 2. Изгибные напряжения в подпорных стенках в зависимости от коэффициента трения между стенками и грунтом [МПа].

f	0,95	0,8	0,6	0,4	0,2	0,05
σ_y^{\max}	0,473	0,558	0,620	0,542	0,436	0,478
σ_y^{\min}	-1,24	-1,27	-1,25	-1,12	-1,39	-1,57

Анализ результатов показывает, что эти варианты расчета принципиально отличаются. В первом случае стенки расходятся в стороны и максимальные изгибные (растягивающие) напряжения возникают на внутренней поверхности подпорных стенок. Это объясняется тем, что после выемки грунта между стенками, который (при отсутствии контакта)

как бы стягивал стенки, грунт, расположенный за подпорными стенками, начинает раздвигать их. Этого не происходит в случае учета контакта между стенками и грунтом, и в этом случае после выемки грунта под действием силы тяжести грунта за стенками они начинают изгибаться вовнутрь котлована. Кроме этого, уровень напряженного состояния в этом случае гораздо ниже.

Заключение

Предложенный метод решения задач механики с конкретными приложениями относится к современной технологии научного сопровождения, проектирования и строительства сложных объектов. Его использование позволяет проследить за изменением напряженно-деформированного состояния и поля перемещений структурно изменяющейся расчетной области от начала и до конца строительства. Это позволяет более точно и технически грамотно принимать проектные решения для различных этапов строительных работ, что зачастую нельзя сделать, опираясь только на существующие СНиПы.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 12-01-00955, № 12-01-97026.

Литература

1. Бородай, В.Г. Математическое моделирование в мостостроении с приложениями к реконструкции моста через р. Казанку и проектированию и строительству моста через р. Кама у с. Сорочьи Горы / В.Г. Бородай, М.Ф. Гарифуллин, Н.В. Голубев, А.И. Голованов, Р.Ф. Закиров, В.Н. Паймушин, А.А. Пискунов, Н.В. Рогов, В.А. Швецов – Казань, 2003. – 380 с.
2. Бережной, Д.В. Математическое моделирование этапов строительства сложных сооружений по трансформирующимся расчетным схемам / Д.В. Бережной, В.Н. Паймушин // Научно-технические технологии. – № 8-9. – 2005. – Т.6. – С. 59-64.
3. Каюмов, Р.А. Моделирование поведения и оценка несущей способности системы тонкостенная конструкция-грунт с учетом ползучести и деградации грунта / Р.А. Каюмов, Ф.Р. Шакирзянов // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2011. — Т.153. – №4. — С.67–75.
4. Шакирзянов, Ф.Р. Сравнительный анализ двух методик расчета системы “тонкостенная конструкция-грунт” с учетом выемки грунта и ползучести / Ф.Р. Шакирзянов // Научно-технический вестник Поволжья. — 2012. — №1. — С.44–47.
5. Лурье, А.И. Нелинейная теория упругости / А.И. Лурье – М.: Наука, 1980. – 512 с.
6. Черных, К.Ф. Нелинейная теория упругости в машиностроительных расчетах / К.Ф. Черных – Л.: Машиностроение, 1986. – 336 с.
7. Грин, А. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды / А. Грин, Д. Адкинс – М.: Мир. – 1965. – 455 с.
8. Перельгин, О.А. Исследование прочности цилиндрических оболочек с вмятинами в области радиальных соединений / О.А. Перельгин, Ш.Ш. Галявиев, Р.Х. Зайнуллин, Д.В. Бережной // Вестник КГТУ, Казань, изд-во КГТУ, 2001. – №1-2. – С.75-77.

9. *Перельгин, О.А.* Исследование прочности цилиндрических оболочек при наличии увода или смещения кромок сварных швов / О.А. Перельгин, Н.М. Туйкин, Д.В. Бережной, М.Н. Серазутдинов // Вестник КГТУ, Казань, изд-во КГТУ. – 2001. – №1-2. – С.77-79.
10. *Васидзу, К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности / К. Васидзу – М.: Мир. – 1987. – 542 с.
11. *Голованов, А.И.* Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел / А.И. Голованов, Д.В. Бережной – Казань. – 2001. – 300 с.
12. *Валиуллин, А.Х.* Большие деформации и перемещения композитной цилиндрической оболочки / А.Х. Валиуллин // Вестник КГТУ, Казань, изд-во КГТУ. – 2011. – №9. – С.109-117.
13. *Бережной, Д.В.* Моделирование поведения железобетонной обделки тоннеля в деформируемом грунте с учетом одностороннего контактного взаимодействия ее блоков через упругие прокладки / Д.В. Бережной, А.И. Голованов, С.А. Луканкин, Л.Р. Секаева // Вестник Казанского государственного технического университета. - 2010. – №2. – С.4-9.
14. *Бережной, Д.В.* Моделирование пластического деформирования многослойного грунта в зоне опоры многопролетного моста / Д.В. Бережной, И.С. Кузнецова, А.А. Саченков // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2010. – Т. 152, кн. 1. – С. 116-125.

© **Д. В. Бережной** - канд. физ.-мат. наук, доц. каф. теоретической механики КФУ, Dmitri.Berezhnoi@mail.ru; **А. В. Карамов** – асп. той же кафедры; **М. К. Сагдатуллин** - канд. физ.-мат. наук, ст. препод. каф. теоретической механики и сопротивления материалов КНИТУ, smarat@mail.ru.