УДК 532.552

А. И. Кадыйров, Е. К. Вачагина

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТАЦИОНАРНОГО ТЕПЛООБМЕНА И ГИДРОДИНАМИКИ ПРИ ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ ВЯЗКИХ РЕОЛОГИЧЕСКИ СЛОЖНЫХ СРЕД В ИЗОГНУТЫХ КАНАЛАХ С ЗАКРУЧИВАТЕЛЕМ ПОТОКА

Ключевые слова: модель, реологически сложная среда, изогнутый канал, закрученный поток.

Предложена математическая модель стационарного теплообмена и гидродинамики, описывающая трехмерное ламинарное течение вязких реологически сложных сред в изогнутых каналах с закручивателем потока.

Keywords: model, rheological liquids, curved tube, swirl flow.

The mathematical model of heat exchange and hydrodynamics for three dimensional stationary laminar swirl flow of rheological liquids in curved tubes is presented.

Введение

Одним из первых пионерских работ посвященных изучению течений в изогнутых каналах являются работы W.R. Dean [1], G.S. Williams и др. [2], J.H. Grindley и A.H. Gibson [3], J. Eustice [4]. Получено, что из-за инерции жидкости, в дополнение к основному осевому потоку появляются вторичные течения, что вызвано дисбалансом между градиентом давления потока и центробежной силы.

Изогнутые трубы являются одним из методов пассивного повышения теплоотдачи для увеличения производительности теплообменников**.** Например, Ru Yang, Pin Chiang [5] экспериментально получили, что за счет периодической изогнутости труб в теплообменном оборудовании коэффициент теплоотдачи может увеличиться на 100%, а коэффициент трения увеличивается меньше чем на 40%. Поэтому наряду с изучением чисто гидродинамических задач в искривленных каналах представляет научный интерес исследование комплексной задачи гидродинамики и теплообмена в изогнутых каналах. В частности Kalb и Seader [6] решил полные уравнения Навье-Стокса для анализа влияния кривизны на полностью развитый теплообмен в изогнутой трубе круглого сечения при постоянной температуре стенки. D. Goering, J.A.C. Humphrey [7] решили полные эллиптические уравнения Навье-Стокса и уравнение энергии для анализа влияния подъемной силы и кривизны на развитое ламинарное течение в нагретой горизонтальной изогнутой трубе. Zhang и др. в работе [8] исследовали совокупный эффект сил Кориолиса и центробежных сил на течение во вращающихся изогнутых трубах прямоугольного сечения. M.R.H. Nobari и др. [9] численно изучены гидродинамика и теплообмен несжимаемой вязкой жидкости в изогнутой трубе кольцевого сечения.

А.М. Бубенчиковым, Д.К. Фирсовым [10] разработан новый подход к дискретизации уравнений Навье–Стокса, описывающих течение в искривленном канале, преимуществом которого является построение невырожденной матрицы линейной системы уравнений, соответствующей предложенной разностной схеме, что делает алгоритм надежным и исключает фиктивные колебания расчетных величин по расчетной области.

А.В. Фафуриным и Е.А. Фафуриной [11] исследована кинематическая структура закрученного потока, приведены результаты аналитического решения уравнений движения в проекциях на оси «φ» и «r».

С.В. Ананиковым [12] решена задача Дирихле для стационарного ламинарного потока нагретой жидкости, движущейся в полубесконечном канале, поперечное сечение которого имеет форму равнобедренного прямоугольного треугольника. Получены соотношения для расчета температурного поля и локальных тепловых потоков на стенки канала.

Как показывает анализ литературных источников, представленные работы исследуют главным образом процессы гидродинамики и теплообмена при течении вязкой жидкости в гладких неподвижных и вращающихся изогнутых каналах. Научный интерес представляет также исследование процессов гидродинамики и теплообмена при течении реологически сложных сред в изогнутых каналах с закручивателем потока. Связано это с тем, что наличие закручивателя потока способствует уменьшению давления на внешнюю стенку изогнутого канала и интенсификации процессов теплообмена.

В данной работе предложена математическая модель стационарного теплообмена и гидродинамики, описывающая трехмерное ламинарное течение вязких реологически сложных сред в изогнутых каналах с закручивателем потока.

Математическая модель

Изогнутые трубы являются составными частями трубопроводов, поэтому в работе рассматривается следующая геометрическая область, рис. 1. Всю геометрическую область определения неизвестных функций удобно разбить на четыре области: два прямолинейных участка (1, 4), изогнутый участок (3) с произвольным углом поворота и область с закручивателем потока (2), рис. 1.

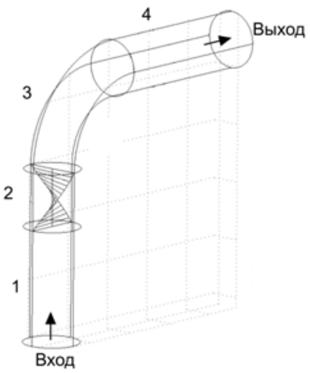

Рис. 1 - Геометрическая область

Закручиватель потока представляет собой скрученную против часовой стрелки ленту.

В области (1, 4) удобно использовать цилиндрическую систему координат (r, φ, z). Системы уравнений, описывающие теплообмен и гидродинамику в прямолинейных каналах, в литературе достаточно широко представлены, например [13].

Для математического описания процесса теплопереноса в области 3 авторами настоящей статьи предложена система уравнений [14] в ортогональной криволинейной системой координат (r, φ, s) вида:

$$r = \frac{1}{a}\sqrt{z^2 + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2},$$

$$\varphi = arctg\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2} - R}, \; s = \frac{R}{a} arctg\frac{y}{x}, \qquad (6)$$

$$x = (R + ar\cos\varphi)\cos\left(\frac{a}{R}s\right),$$

$$y = (R + ar\cos\varphi)\sin\left(\frac{a}{R}s\right), \; z = ar\sin\varphi, \qquad (7)$$

где (r, φ) – полярные координаты произвольной точки в поперечном сечении изогнутого канала, s – координата произвольной точки изогнутого канала, характеризующая расстояние поперечного сечения, в котором расположена точка, от входа в канал, (x, y, z) – декартовая система координат, a – радиус поперечного сечения канала, R – радиус кривизны изогнутого канала.

Таким образом, актуальным представляется разработка математической модели, описывающей процессы теплообмена и гидродаинамики при течении вязких реологически сложных сред в изогнутых каналах с закручивателем потока (область 2, рис.1)

Введем основные допущения:

1) Процесс теплообмена и гидродинамики при течении вязкой реологически сложной среды - стационарный;

2) Течение несжимаемой вязкой реологически сложной среды носит ламинарный характер;

3) Реологическое поведение сред характеризуется наличием нелинейно-вязких свойств;

4) Сечение канала имеет форму окружности и постоянно по всей длине;

5) Удельная теплоемкость, теплопроводность, плотность среды в ходе процесса не меняются;

6) Силы тяжести входят в уравнения неявно через избыточное давление.

Математическая модель рассматриваемой задачи получена на основе уравнений термомеханики сплошных сред [15] и имеет следующий вид.

Уравнения неразрывности, движения и переноса энергии для реологически сложной среды в области 2:

$$\frac{\partial v^1}{\partial \xi^1}v^1 + \frac{1}{\xi^1}v^1 + \frac{\partial v^2}{\partial \xi^2} - \frac{K(\xi^1)^2}{A}\frac{\partial v^2}{\partial \xi^3} + \frac{1}{A}\frac{\partial v_3}{\partial \xi^3} = 0, \qquad (1)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v^1}{\partial \xi^1}v^1 + \frac{\partial v^1}{\partial \xi^2}v^2 - \frac{\xi^1}{A^2}(v^2)^2 - \frac{2K\xi^1}{A^2}v^2 v_3 - \right.$$
$$\left. - \frac{K^2\xi^1}{A^2}(v_3)^2 - \frac{K(\xi^1)^2}{A}\frac{\partial v^1}{\partial \xi^3}v^2 + \frac{1}{A}\frac{\partial v^1}{\partial \xi^3}v_3\right) =$$
$$= -\frac{\partial P}{\partial \xi^1} + \frac{\partial}{\partial \xi^1}\left[2\mu(I_2, T)\frac{\partial v^1}{\partial \xi^1}\right] +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial \xi^2}\left[\mu(I_2, T)\left(\frac{A}{(\xi^1)^2}\frac{\partial v^1}{\partial \xi^2} - K\frac{\partial v^1}{\partial \xi^3} + \frac{\partial v^2}{\partial \xi^1}\right)\right] +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial \xi^3}\left[\mu(I_2, T)\left(-K\frac{\partial v^1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial v^1}{\partial \xi^3} - \frac{K(\xi^1)^2}{A}\frac{\partial v^2}{\partial \xi^1} + \frac{\partial v_3 / A}{\partial \xi^1} - \frac{2K\xi^1}{A^2}v^2\right)\right] +$$
$$+ \frac{\mu(I_2, T)}{\xi^1}\left[2\frac{\partial v^1}{\partial \xi^1} - \frac{2}{\xi^1}v^1 - \frac{2}{A}\frac{\partial v^2}{\partial \xi^2} - \frac{2K}{A}\frac{\partial v_3}{\partial \xi^2}\right], \qquad (2)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v^2}{\partial \xi^1}v^1 + \frac{\partial v^2}{\partial \xi^2}v^2 + \frac{2}{A\xi^1}v^1 v^2 + \frac{2K}{\xi^1}v^1 v_3 / A - \right.$$
$$\left. - \frac{K(\xi^1)^2}{A}\frac{\partial v^2}{\partial \xi^3}v^2 + \frac{\partial v^2}{\partial \xi^3}v_3 / A\right) = \frac{A}{(\xi^1)^2}\frac{\partial P}{\partial \xi^2} +$$
$$+ K\frac{\partial P}{\partial \xi^3} + \frac{\partial}{\partial \xi^1}\left[\mu(I_2, T)\left(\frac{A}{(\xi^1)^2}\frac{\partial v^1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial v^2}{\partial \xi^1} - K\frac{\partial v^1}{\partial \xi^3}\right)\right] +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial \xi^2}\left[\mu(I_2, T)\left(\frac{2A}{(\xi^1)^2}\frac{\partial v^2}{\partial \xi^2} + \frac{2}{(\xi^1)^3}v^1 - 2K\frac{\partial v^2}{\partial \xi^3}\right)\right] +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial \xi^3}\left[\mu(I_2, T)\left(-2K\frac{\partial v^2}{\partial \xi^2} + \frac{A}{(\xi^1)^2}\frac{\partial v_3 / A}{\partial \xi^2} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{A + K^2(\xi^1)^2}{A}\frac{\partial v^2}{\partial \xi^3} - K\frac{\partial v_3 / A}{\partial \xi^3}\right)\right] +$$
$$+ \frac{\mu(I_2, T)}{\xi^1}\left[\left(\frac{(A+2)}{(\xi^1)^2}\frac{\partial v^1}{\partial \xi^2} + \frac{(A+2)}{A}\frac{\partial v^2}{\partial \xi^1} - \frac{4K^2\xi^1}{A^2}v^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + 2K\frac{\partial v_3 / A}{\partial \xi^1} - K\frac{\partial v^1}{\partial \xi^3}\right)\right], \qquad (3)$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_3}{\partial \xi^1}v^1 + \frac{\partial v_3}{\partial \xi^2}v^2 + \left(\frac{K(\xi^1)^2}{A}v^2 + \frac{1}{A}v_3\right)\frac{\partial v_3}{\partial \xi^3}\right) == -\frac{\partial P}{\partial \xi^3} +$$

$$
+\frac{\partial\mu(I_2,T)\left[\left(\frac{\partial v_3}{\partial\xi^1}+\frac{\partial v^1}{\partial\xi^3}-\frac{2K\xi^1}{A}v^2-\frac{2K\xi^1}{A}v^2-\frac{2K^2\xi^1}{A}v_3\right)\right]}{\partial\xi^1}+
$$

$$
+K\left(\xi^1\right)^2\frac{\partial\mu(I_2,T)\left[\frac{2K}{\xi^1}v^1+\frac{A}{\left(\xi^1\right)^2}\frac{\partial v_3}{\partial\xi^2}+\frac{\partial v^2}{\partial\xi^3}-K\frac{\partial v_3}{\partial\xi^3}\right]}{\partial\xi^2}+
$$

$$
+\frac{\partial}{\partial\xi^2}\left[\mu(I_2,T)\left(\frac{A}{\left(\xi^1\right)^2}\frac{\partial v_3}{\partial\xi^2}-K\frac{\partial v_3}{\partial\xi^3}+K\frac{2K}{\xi^1}v^1+\frac{\partial v^2}{\partial\xi^3}\right)\right]+
$$

$$
+\frac{\partial\mu(I_2,T)\left[-K\frac{\partial v_3}{\partial\xi^2}+\frac{A+1}{A}\frac{\partial v_3}{\partial\xi^3}-\frac{K\left(\xi^1\right)^2}{A}\frac{\partial v^2}{\partial\xi^3}\right]}{\partial\xi^3}+
$$

$$
+\frac{\mu(I_2,T)}{\xi^1}\left[A\frac{\partial v^1}{\partial\xi^3}+\frac{\partial v_3}{\partial\xi^1}-\frac{2K^2\xi^1}{A}v_3-\frac{2K\xi^1}{A}v^2\right], \qquad (4)
$$

$$
\rho c_p\left[\frac{\partial T}{\partial\xi^1}v^1+\frac{\partial T}{\partial\xi^2}v^2+\frac{\partial T}{\partial\xi^3}\left(-\frac{K\left(\xi^1\right)^2}{A}v^2+\frac{1}{A}v_3\right)\right]=
$$

$$
=\frac{\partial}{\partial\xi^1}\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial\xi^1}\right)+\frac{\partial}{\partial\xi^2}\lambda\left(\frac{A}{\left(\xi^1\right)^2}\frac{\partial T}{\partial\xi^2}-K\frac{\partial T}{\partial\xi^3}\right)+
$$

$$
+\frac{\partial}{\partial\xi^3}\lambda\left(-K\frac{\partial T}{\partial\xi^2}+\frac{\partial T}{\partial\xi^3}\right)+\frac{\lambda}{\xi^1}\left(\frac{\partial T}{\partial\xi^1}\right)+\frac{\mu(I_2,T)}{2}I_2, \qquad (5)
$$

где $\xi^1=r,\ \xi^2=\varphi-Kz,\ \ \xi^3=z$ - винтовая система координат, r,φ,z - переменные цилиндрической системы координат; $K=2\pi/S$, S – шаг винтового канала, $v_1=v^1$, $v_2=\left(\left(\xi^1\right)^2/A\right)\cdot v^2+\left(K\left(\xi^1\right)^2/A\right)\cdot v_3$, $v^3=\left(-K\left(\xi^1\right)^2/A\right)\cdot v^2+\left(1/A\right)\cdot v_3$ - основные компоненты вектора скорости (v^1,v^2 перпендикулярны к v_3, которая направлена вдоль винтовых линий), $A=1+K^2\left(\xi^1\right)^2$, ρ,c_p,λ - плотность, теплоемкость и коэффициент теплопроводности среды, P – давление, T – температура.

На совместных границах ставятся условия непрерывности гидродинамических и температурных полей, а также условия однозначности соответствия для локальных систем координат.

В качестве условий однозначности взяты следующие граничные условия для скорости и температуры:

- условие прилипания жидкости на стенках канала и поверхности закручивателя;

- условие для температуры одного из трех видов: 1) граничное условие первого рода; 2) граничное условие второго рода; 3) граничное условие третьего рода;

- $v_0=\dfrac{4\cdot Q}{\pi\cdot d^2}$ среднерасходная скорость жидкости на входе в канал; Q - расход;

- на выходе ставится гидродинамическое условие $p=p_a=Const$,

- условие стабилизации температурного поля по длине канала.

Зависимость $\mu=\mu(I_2,T)$ для каждой конкретной среды определяются из соответствующих экспериментальных исследований и могут иметь различный характер. В представленной работе для описания зависимости вязкости $\mu=\mu(I_2,T)$ взята модель Кутателадзе —Хабахпашевой [16]. В работе [17] представлен один из частных случаев модели Кутателадзе —Хабахпашевой, описывающий поведение 0,65% раствора Na-КМЦ.

$$
I_2=trB^2=\left(\frac{2\partial v^1}{\partial\xi^1}\right)\left(\frac{2\partial v^1}{\partial\xi^1}\right)+2\left(\frac{A}{\left(\xi^1\right)^2}\frac{2\partial v^1}{\partial\xi^2}-K\frac{\partial v^1}{\partial\xi^3}+\frac{\partial v^2}{\partial\xi^1}\right)\times
$$

$$
\times\left(\frac{\partial v^1}{\partial\xi^2}+\frac{\left(\xi^1\right)^2}{A}\frac{\partial v^2}{\partial\xi^1}+\frac{K\left(\xi^1\right)^2}{A}\frac{\partial v_3}{\partial\xi^1}-\frac{2K^2\left(\xi^1\right)^3}{A^2}v^2-\frac{2K^3\left(\xi^1\right)^3}{A^2}v_3\right)+
$$

$$
+2\left(-K\frac{\partial v^1}{\partial\xi^2}+\frac{\partial v^1}{\partial\xi^3}-\frac{K\left(\xi^1\right)^2}{A}\frac{\partial v^2}{\partial\xi^1}-\frac{2K\xi^1}{A^2}v^2+\frac{1}{A}\frac{\partial v_3}{\partial\xi^1}-\frac{2K^2\xi^1}{A^2}v_3\right)\times
$$

$$
\times\left(\frac{\partial v^1}{\partial\xi^3}+\frac{\partial v_3}{\partial\xi^1}-\frac{2K\xi^1}{A}v^2-\frac{2K^2\xi^1}{A}v_3\right)+
$$

$$
+\left(\frac{2A}{\left(\xi^1\right)^2}\frac{\partial v^2}{\partial\xi^2}+\frac{2}{\left(\xi^1\right)^3}v^1-2K\frac{\partial v^2}{\partial\xi^3}\right)\times
$$

$$
\times\left(\frac{2\left(\xi^1\right)^2}{A}\frac{\partial v^2}{\partial\xi^2}+\frac{2K\left(\xi^1\right)^2}{A}\frac{\partial v_3}{\partial\xi^2}+2\xi^1v^1\right)+
$$

$$
+2\left(-2K\frac{\partial v^2}{\partial\xi^2}+\frac{1}{\left(\xi^1\right)^2}\frac{\partial v_3}{\partial\xi^2}+\frac{A+K^2\left(\xi^1\right)^2}{A}\frac{\partial v^2}{\partial\xi^3}-\frac{K}{A}\frac{\partial v_3}{\partial\xi^3}\right)\times
$$

$$
\times\left(\frac{\left(\xi^1\right)^2}{A}\frac{\partial v^2}{\partial\xi^3}+\frac{K\left(\xi^1\right)^2}{A}\frac{\partial v_3}{\partial\xi^3}+\frac{\partial v_3}{\partial\xi^2}+2K\xi^1v^1\right)+
$$

$$
+\left(\frac{2K^2\left(\xi^1\right)^2}{A}\frac{\partial v^2}{\partial\xi^2}-\frac{2K}{A}\frac{\partial v_3}{\partial\xi^2}-\frac{2K\left(\xi^1\right)^2}{A}\frac{\partial v^2}{\partial\xi^3}+\frac{2}{A}\frac{\partial v_3}{\partial\xi^3}\right)\times
$$

$$
\times\left(2\frac{\partial v_3}{\partial\xi^3}+2K^2\xi^1v^1\right). \qquad (6)
$$

Заключение

В данной работе предложена математическая модель, описывающая процессы теплообмена и гидродинамики при ламинарном течении вязких реологически сложных сред в изогнутых каналах с закручивателем потока.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 12-08-31067 мол_а

Литература

1. W.R. Dean. Fluid Motion in a Curved Channel. *Proc. R. Soc. Lond*, A 121, 402-420 (1928).
2. G.S. Williams, C.W. Hubbell, G.H. Fenkell. Experiments at Detroit, Mich. On the effect of curvature upon the flow of water in pipes. *Trans. ASCE*, 47, 1–196 (1902).
3. J.H. Grindley, A.H. Gibson. On the frictional resistance to the flowof air through a pipe. *Proc. R. Soc. Lond*, A 80, 114–139 (1908).
4. J. Eustice. Flow of water in curved pipes. *Proc. R. Soc. Lond*, A 84, 107–118 (1910).
5. Ru Yang, Fan, Pin Chiang. An experimental heat transfer study for periodically varying-curvature curved-pipe.

International Journal of Heat and Mass Transfer, 45, 3199–3204 (2002).
6. C.E. Kalb, J.D. Seader. Fully developed viscous-flow heat transfer in curved circular tubes with uniform wall temperature. *AIChE J*, 20, 340-346 (1974).
7. D. Goering, J.A.C. Humphrey. The dual influence of curvature and buoyancy in fully developed tube flows. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 40, 2187-2199 (1997).
8. J. Zhang, B. Zhang, J. Ju. Fluid flow in a rotating curved rectangular duct. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 22, 583–592 (2001).
9. M.R.H. Nobari, B.R. Ahrabi, G. Akbari. A numerical analysis of developing flow and heat transfer in a curved annular pipe. *International Journal of Thermal Sciences*, 48, 1542–1551 (2009).
10. А.М. Бубенчиков, Д.К. Фирсов, М.А. Котовщикова. Ламинарное вязкое течение в искривленных каналах сложного сечения. *Мат. Моделирование*, 16, 11, 107–119 (2004).
11. А.В. Фафурин, Е.А. Фафурина. Кинематическая структура закрученного потока. *Вестник Казан. технол. ун-та*, 14, 43-46 (2011) .
12. С.В. Анаников. Температурное поле при течении жидкости в полубесконечном призматическом канале треугольного поперечного сечения (граничные условия первого рода). *Вестник Казан. технол. ун-та*, 6, 147-150 (2012).
13. А.И. Кадыйров. Теплообмен при ламинарном течении неньютоновской жидкости на начальном тепловом участке круглой трубы при различных законах изменения числа Био. *Труды Академэнерго*, 4, 3-14 (2006).
14. А.И. Кадыйров, Е.К. Вачагина. Исследование гидродинамики при ламинарном течении неньютоновских жидкостей в изогнутом канале. *Теплофизика и Аэромеханика*, 19, 3, 279-289 (2012).
15. П. Жермейн. *Курс механики сплошных сред.* Высшая школа, Москва, 1983, 399с.
16. С.С. Кутателадзе, В.И. Попов, Е.М. Хабахпашева. К гидродинамике жидкостей с переменной вязкостью. *ПМТФ*, 1, 45-49 (1966).
17. А.И. Кадыйров. Влияние соотношения геометрических размеров на гидродинамическое сопротивление при течении неньютоновской среды в призматических каналах при условии равенства периметров поперечного сечения. *Известия Самарского научного центра РАН*, 12, 1(9), 2236-2238 (2010).

© **А. И. Кадыйров -** канд. техн. наук, ст. науч. сотр. Исследовательского центра проблем энергетики КазНЦ РАН, aidarik@rambler.ru; **Е. К. Вачагина –** д-р техн. наук, проф. каф. ПТЭ КГЭУ, evachagina@mail.ru.