ГИДРОДИНАМИКА, ТЕПЛО- И МАССООБМЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ, ЭНЕРГЕТИКА

УДК 66.048.37

С. В. Анаников

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛООТДАЧА ОТ ЖИДКОСТИ, ПЕРЕМЕЩАЕМОЙ ЧЕРЕЗ КОЛЬЦЕВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ КАНАЛ

Ключевые слова: температурное поле, удельный тепловой поток, радиально-кольцевой канал, краевая задача, собственные значения, собственные функции, бесселевы функции.

Решается смешанная граничная задача для неустановившегося теплообмена в потоке нагретой жидкости, перемещаемой в бесконечно-протяженном радиально-кольцевом канале. Записывается уравнение энергии в движущейся среде в цилиндрических координатах. Принимается во внимание независимость температуры жидкости от тангенциальной координаты φ. Учитывается перенос тепла в направлении осевой координаты z как теплопроводностью, так и конвекцией, в направлении оси r - теплопроводностью. Задача решается последовательным применением одностороннего преобразования Лапласа и конечного интегрального преобразования Ханкеля. В результате получены соотношения для расчета температурного поля и локального удельного теплового потока на стенку канала. Решения выражаются с помощью экспоненциальных и бесселевых функций первого и второго рода действительного аргумента нулевого и первого порядков.

Keywords: temperature field, specific stream of heat, radial-circular canal, boundary task, characteristic numbers, characteristic functions, bessel's functions.

Mixed boundary task is solved for unstable of heat conduction of hot liquid stream, transferring into infinitely large length radial-circular canal. Is written equation of energy for moving of liquid in cilindric coordinates. Is taken into consideration independence of liquid's temperature from tangential coordinate φ. Heat transfer along axis z by heat heat conductivity and convection, along axis r - by heat conductivity is taken into account. The solution of task is found by successive application of one-sided Laplace's transformation and infinite of Hankel's transformation. In result was obtained correlation for calculation of temperature field and local heat stream on the wall of canal. The solution is written by exponential and bessel's functions. Is used bessel's functions first and second kind real argument of order zero and one.

В представленной работе, как и в ряде предыдущих [1-7], решается задача о теплообмене при протекании жидкости в каналах различной формы при отличающихся условиях теплоотдачи на границе.

В частности, ставится задача о теплоотдаче горячей жидкости, движущейся в бесконечно-протяженном радиально-кольцевом канале (рис.1).

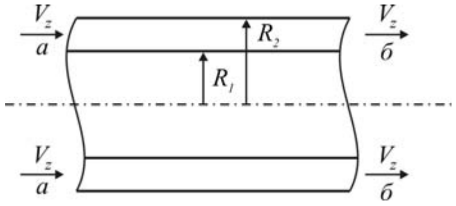

Рис. 1 - *а* - вход греющей жидкости; *б* - выход греющей жидкости

При теоретическом изучении теплообмена принято, что температура стенки, омываемой движущейся жидкостью, принимается постоянной. Такое условие часто реализуется на практике, например, в теплообменных устройствах, в которых технологические процессы протекают при постоянной, заранее известной температуре рабочей среды. Рассматривается случай, когда наружная поверхность канала теплоизолирована.

Уравнение энергии и уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости в цилиндрических координатах [8,9] записывается в виде

$$\frac{\partial T}{\partial \tau}+V_r\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{V_\varphi}{r}\frac{\partial T}{\partial \varphi}+V_r\frac{\partial T}{\partial z}=$$

$$=a^2\left[\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}\right],$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial (rV_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial V_z}{\partial z}=0,$$

где $a^2=\lambda_{ж}/C_{ж}\rho_{ж\,0}$

Для рассматриваемого случая необходимо положить: $V_r=V_\varphi=\dfrac{\partial T}{\partial \varphi}\equiv 0$. Из уравнения неразрывности и элементарных соображений сразу следует, что $V_z=const$, или $V_z=\dfrac{Q}{\pi\left(R_2^2-R_1^2\right)}$,

где Q – объемный секундный расход греющей жидкости.

Постановка задачи

Даны две осесимметричные цилиндрические поверхности (рис.2). Между ними в момент времени $\tau=0$ в направлении оси z начинает перемещаться греющая жидкость с постоянной средней скоростью V_z. Радиус внутренней цилиндрической поверхности – R_1, радиус наружной цилиндрической поверхности – R_2. Расход греющей жидкости Q. Температура внутренней цилиндрической поверхности, обращенной к жидкости, равна T_{cm}. В начальный момент времени имеет место равномерное распределение температуры по сечению потока жидкости. Наружная цилиндрическая поверхность теплоизолирована.

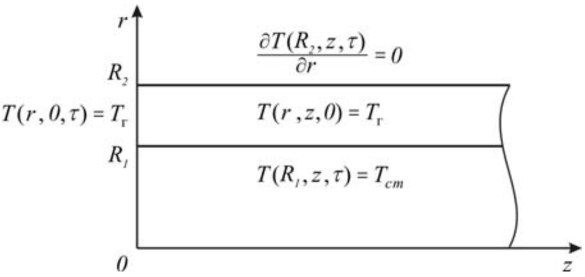

Рис. 2 - Начальные и граничные условия

Требуется найти температурное поле в жидкости и локальный удельный тепловой поток на внутреннюю цилиндрическую стенку.

Начально-краевая задача

$$\frac{\partial T(r,z,\tau)}{\partial \tau}+V_z\frac{\partial T(r,z,\tau)}{\partial z}=a^2\frac{\partial^2 T(r,z,\tau)}{\partial z^2}+$$
$$+\frac{a^2}{r}\frac{\partial T(r,z,\tau)}{\partial r}=a^2\frac{\partial^2 T(r,z,\tau)}{\partial r^2} \quad (1)$$
$$R_1<r<R_2,\quad 0<z<\infty,\quad \tau>0,$$
$$T(r,z,0)=T_Г,\ R_1<r<R_2,\ 0<z<\infty, \quad (2)$$
$$T(r,0,\tau)=T_Г,\ R_1<r<R_2,\ \tau>0, \quad (3)$$
$$\frac{\partial T(r,\infty,\tau)}{\partial z}=0,\ R_1<r<R_2,\ \tau>0, \quad (4)$$
$$T(R_1,z,\tau)=T_{cm},\ 0<z<\infty,\ \tau>0, \quad (5)$$
$$\frac{\partial T(R_2,z,\tau)}{\partial r}=0,\ 0<z<\infty,\ \tau>0. \quad (6)$$

После перехода к безразмерной температуре
$$\theta=\frac{T(r,z,\tau)-T_{cm}}{T_Г-T_{cm}},$$
получается
$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau}+V_z\frac{\partial\theta}{\partial z}=a^2\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}+\frac{a^2}{r}\frac{\partial\theta}{\partial r}+a^2\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2},$$
$$R_1<r<R_2,\ 0<z<\infty,\ \tau>0, \quad (7)$$
$$\theta(r,z,0)=1,\ R_1<r<R_2,\ 0<z<\infty, \quad (8)$$
$$\theta(r,0,\tau)=1,\ R_1<r<R_2,\ \tau>0, \quad (9)$$
$$\frac{\partial\theta(r,\infty,\tau)}{\partial z}=0,\ R_1<r<R_2,\ \tau>0, \quad (10)$$
$$\theta(R_1,z,\tau)=0,\ 0<z<\infty,\ \tau>0, \quad (11)$$
$$\frac{\partial\theta(R_2,z,\tau)}{\partial r}=0,\ 0<z<\infty,\ \tau>0. \quad (12)$$

Применение к задаче (7)-(12) одностороннего преобразования Лапласа по переменной τ [10]
$$F(r,z,s)=\int_0^\infty e^{-s\tau}\theta(r,z,\tau)\,d\tau, \quad (13)$$
позволяет получить
$$a^2\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}-V_z\frac{\partial F}{\partial z}+a^2\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}+\frac{a^2}{r}\frac{\partial F}{\partial r}-sF=-1, \quad (14)$$
$$R_1<r<R_2,\ 0<z<\infty,$$
$$F(r,0,s)=\frac{1}{s},\ R_1<r<R_2, \quad (15)$$
$$\frac{\partial F(r,\infty,s)}{\partial z}=0,\ R_1<r<R_2, \quad (16)$$
$$F(R_1,z,s)=0,\ 0<z<\infty, \quad (17)$$
$$\frac{\partial F(R_2,z,s)}{\partial r}=0,\ 0<z<\infty. \quad (18)$$

Для решения неоднородной краевой задачи (14)-(18) применяется конечное интегральное преобразование Ханкеля [10]
$$\phi(P_n,z,s)=\int_{R_1}^{R_2} rF(r,z,s)V_0(P_n r)dr, \quad (19)$$
где
$$V_0(P_n r)=J_0(P_n r)Y_0(P_nR_1)-J_0(P_nR_1)Y_0(P_n r), \quad (20)$$
а P_n являются положительными корнями трансцендентного уравнения
$$J_1(P_n R_2)Y_0(P_nR_1)-J_0(P_nR_1)Y_1(P_n R_2)=0. \quad (21)$$

Тогда, после ряда преобразований, имеет место краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения относительно переменной z
$$\frac{\partial^2\phi(P_n,z,s)}{\partial z^2}-A\frac{\partial\phi(P_n,z,s)}{\partial z}-B\phi(P_n,z,s)=-D, \quad (22)$$
$$\phi(P_n,0,s)=L/s, \quad (23)$$
$$\frac{\partial\phi(P_n,\infty,s)}{dz}=0, \quad (24)$$
где $A=V_z/a^2$, $B=\left(a^2P_n{}^2+s\right)/a^2$, $D=L/a^2$,
$$L=\int_{R_1}^{R_2} rV(P_n r)dr=-\frac{2}{\pi P_n{}^2}, \quad [8]$$
s – параметр.

Решением задачи (22)-(24), после элементарных алгебраических преобразований и замены A, B, D и L их значениями, будет
$$\phi(P_n,z,s)=-\frac{2}{\pi\left(a^2P_n{}^2+s\right)}\left[\frac{1}{P_n{}^2}+\frac{a^2}{s}\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left(-\frac{\sqrt{V_z{}^2+4a^2\left(a^2P_n{}^2+s\right)}-V_z}{2a^2}z\right)\right]. \quad (25)$$

Обратное преобразование по Ханкелю [10]
$$H^{-1}[\phi(P_n,z,s)]=F(r,z,s)=\frac{\pi^2}{2}\times$$
$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P_n{}^2J_1{}^2(P_nR_2)V_0(P_n r)}{J_0{}^2(P_nR_1)-J_1{}^2(P_nR_2)}\phi(P_n,z,s)$$
для уравнения (25) дает

$$F(r,z,s)=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1^2(P_nR_2)V_0(P_nr)}{J_1^2(P_nR_2)-J_0^2(P_nR_1)}\times$$
$$\times\left[\frac{1}{a^2P_n^2+s}+\frac{a^2P_n^2}{(a^2P_n^2+s)s}\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left(-\frac{\sqrt{V_z^2+4a^2(a^2P_n^2+s)}-V_z}{2a^2}z\right)\right]. \qquad (26)$$

Для перехода от изображения (26) по Лапласу к оригиналу воспользуемся таблицами изображений. Согласно [10] имеем

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s+a^2P_n^2}\right]=\exp\left(-a^2P_n^2\tau\right). \qquad (27)$$

Для получения оригинала от изображения второго члена, стоящего в квадратных скобках (26), выполним следующие преобразования

$$\exp\left(-\frac{\sqrt{V_z^2+4a^2(a^2P_n^2+s)}-V_z}{2a^2}z\right)=$$
$$=\exp\left(-\sqrt{\frac{z^2}{a^2}\left(s+\frac{V_z^2}{4a^2}+a^2P_n^2\right)}\right)\exp\left(\frac{V_z}{2a^2}z\right). \qquad (28)$$

Переход от изображения к оригиналу в (28) для экспоненциальной функции [11] дает

$$L^{-1}\left\{\exp\left(-\sqrt{\frac{z^2}{a^2}\left(s+\frac{V_z^2}{4a^2}+a^2P_n^2\right)}\right)\right\}=$$
$$=\frac{z}{2a\tau\sqrt{\pi\tau}}\exp\left\{-\frac{1}{4a^2\tau}\left[\left(4a^4P_n^2+V_z^2\right)\times\tau^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+z^2\right]\right\}. \qquad (29)$$

Тогда

$$L^{-1}\left\{\exp\left[-\frac{\sqrt{V_z^2+4a^2(a^2P_n^2+s)}-V_z}{2a^2}z\right]\right\}=$$
$$=\frac{z\exp\left(V_zz/2a^2\right)}{2\tau\sqrt{\pi a^2\tau}}\exp\left\{-\frac{1}{4a^2\tau}\left[\left(4a^4P_n^2+V_z^2\right)\times\tau^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.+z^2\right]\right\}. \qquad (30)$$

Согласно [12]

$$L^{-1}\left[\frac{a^2P_n^2}{(a^2P_n^2+s)s}\right]=1-\exp\left(-a^2P_n^2\tau\right). \qquad (31)$$

С применением теоремы о свертке [12] для функций (30), (31) при переходе от изображения (26) к оригиналу, с использованием (27), получено

$$L^{-1}[F(r,z,s)]=\theta(r,z,\tau)=$$
$$=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1^2(P_nR_2)V_0(P_nr)}{J_1^2(P_nR_2)-J_0^2(P_nR_1)}\times$$
$$\times\left\{\exp\left(-a^2P_n^2\tau\right)+\int_0^{\tau}\left[1-\exp\left(-a^2P_n^2\tau+a^2P_n^2t\right)\right]\times\right.$$
$$\times\frac{z\exp\left(V_zz/2a^2\right)}{2at\sqrt{\pi t}}\times$$
$$\left.\times\exp\left(-\frac{4a^4P_n^2t^2+V_z^2t^2+z^2}{4a^2t}\right)dt\right\}. \qquad (32)$$

Преобразование (32) позволяет получить

$$\theta(r,z,\tau)=\frac{T(r,z,\tau)-T_{cm}}{T_{\Gamma}-T_{cm}}=$$
$$=\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1^2(m\mu_n)V_0\left(\mu_n\frac{r}{R_1}\right)}{J_1^2(m\mu_n)-J_0^2(\mu_n)}\times$$
$$\times\left\{\exp\left(-\frac{a^2\mu_n^2}{R_1^2}\tau\right)+\frac{z}{2a\sqrt{\pi}}\times\right.$$
$$\times\exp\left(\frac{V_zz}{2a^2}\right)\times$$
$$\times\int_0^{\tau}\frac{1}{t\sqrt{t}}\left[\exp\left(-\frac{4a^4\mu_n^2t^2+V_z^2R_1^2t^2+z^2R_1^2}{4a^2R_1^2t}\right)-\right.$$
$$\left.\left.-\exp\left(-\frac{4a^4\mu_n^2\tau t+V_z^2R_1^2t^2+z^2R_1^2}{4a^2R_1^2t}\right)\right]dt\right\}. \qquad (33)$$

При этом характеристическое уравнение (21) для нахождения μ_n приобретает вид

$$J_1(m\mu_n)Y_0(\mu_n)-J_0(\mu_n)Y_1(m\mu_n)=0, \qquad (34)$$

где $m=\frac{R_2}{R_1}$, $\quad \mu_n=P_nR_1$.

Функция $V_0\left(\mu_n\frac{r}{R_1}\right)$ согласно (20) запишется так

$$V_0\left(\mu_n\frac{r}{R_1}\right)=J_0\left(\mu_n\frac{r}{R_1}\right)Y_0(\mu_n)-$$
$$-J_0(\mu_n)Y_0\left(\mu_n\frac{r}{R_1}\right).$$

Удельный тепловой поток на цилиндрическую стенку определяется из известного соотношения

$$q=-\lambda_{ж}\left.\frac{\partial T(r,z,\tau)}{\partial r}\right|_{r=R_1}. \qquad (35)$$

Применение (35) к выражению (33) дает

$$q=\frac{2\lambda_{ж}(T_{\Gamma}-T_{cm})}{R_1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_1^2(m\mu_n)}{J_1^2(m\mu_n)-J_0^2(\mu_n)}\times$$

$$\times\left\{\exp\left(-\frac{a^2\mu_n^2}{R_1^2}\tau\right)+\frac{z}{2a\sqrt{\pi}}\times\right.$$

$$\times \exp\left(\frac{V_z z}{2a^2}\right)\times$$

$$\times \int_0^{\tau} \frac{1}{t\sqrt{t}}\left[\exp\left(-\frac{4a^4\mu_n{}^2t^2+V_z{}^2R_1{}^2t^2+z^2R_1{}^2}{4a^2R_1{}^2t}\right)-\right.$$

$$\left.\left.-\exp\left(-\frac{4a^4\mu_n{}^2\tau t+V_z{}^2R_1{}^2t^2+z^2R_1{}^2}{4a^2R_1{}^2t}\right)\right]dt\right\}. \qquad (36)$$

При выводе выражения (36) было учтено, что согласно [10]

$$-V_0'\left(\mu_n\frac{r}{R_1}\right)=\frac{\mu_n}{R_1}V_1\left(\mu_n\frac{r}{R_1}\right)=$$

$$=\left[J_1\left(\mu_n\frac{r}{R_1}\right)Y_0(\mu_n)-J_0(\mu_n)Y_1\left(\mu_n\frac{r}{R_1}\right)\right]\frac{\mu_n}{R_1};$$

$$V_1(\mu_n)=J_1(\mu_n)Y_0(\mu_n)-J_0(\mu_n)Y_1(\mu_n)=\frac{2}{\pi\,\mu_n}.$$

Здесь штрих при $V_0\left(\mu_n\frac{r}{R_1}\right)$ означает производную по r.

Обозначения

r, z - радиальная и аксиальная координаты цилиндрической системы координат, м;

$T(r,z,\tau)$ -текущая температура жидкости, К;

$T_Г$ - постоянная температура горячей жидкости, К;

T_{cm} - постоянная температура стенки канала при $r=R$, К;

V_r, V_z, V_φ, - радиальная, осевая и тангенциальная компоненты скорости жидкости, м/с;

Q - объемный расход жидкости, м^3/с;

$J_0(P_n r),\ J_0\left(\mu_n\frac{r}{R_1}\right),\ J_0(P_n R_1), J_0(\mu_n),\ J_0(P_n R_2)$- бесселевы функции первого рода нулевого порядка соответствующего действительного аргумента;

$J_1(P_n R_2)$- бесселева функция первого рода первого порядка, действительного аргумента $P_n R_2$;

$Y_0(P_n r), Y_0(P_n R_1)$- бесселевы функции второго рода нулевого порядка действительных аргументов $P_n r$ и $P_n R_1$;

$Y_1(P_n R_2)$- бесселева функция второго рода первого порядка действительного аргумента $P_n R_2$

R_1, R_2 - малый и большой радиусы кольцевого цилиндрического канала, м;

a^2 - коэффициент температуропроводности, м^2/с;

q - удельный тепловой поток, Вт/ м^2;

$\theta(r,z,\tau)$- текущая температура жидкости, безразмерная;

$\lambda_ж$ - коэффициент теплопроводности жидкости, Вт/(м К);

τ - время, с;

$\pi = 3{,}14159...$.

Литература

1. С.В. Анаников, М.Ю. Сорокин, В.П. Бурдиков, Э.В.Чиркунов, Теоретические основы химической технологии (ТОХТ), **38**, 6, 655-660 (2004).
2. С.В. Анаников, Вестник Казанского технологического университета, **15**, 6, 42-46 (2012).
3. С.В. Анаников, Вестник Казанского технологического университета, **15**, 6, 147-150 (2012).
4. С.В. Анаников, Вестник Казанского технологического университета, **15**, 11, 143-145 (2012).
5. С.В. Анаников, Вестник Казанского технологического университета, **15**,14,90-93 (2012).
6. С.В. Анаников, М.Ю. Сорокин, Вестник Казанского технологического университета, **15**, 18, 58-63 (2012).
7. С.В. Анаников, Вестник Казанского технологического университета, **15**, 20, 56-61 (2012).
8. А.В. Лыков, Тепломассообмен: Справочник. Энергия. Москва. 1964. 228 с.
9. Л.Г. Лойцянский, Механика жидкости и газа. Наука. Москва. 1987. 840 с.
10. А.В. Лыков, Теория теплопроводности. Высшая школа. Москва. 1967. 599 с.
11. В.А. Диткин, Справочник по операционному исчислению. ГИТТЛ. Москва-Ленинград. 1951. 256 с.
12. Г. Дёч, Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. ГИФМЛ. Москва. 1958. 208 с.

© С. В. Анаников – д.т.н., проф. каф. химической кибернетики КНИТУ; ananikovsv@rambler.ru.