

Р. Ф. Гильмутдинов, А. П. Кирпичников

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАМКНУТОЙ МНОГОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ОЧЕРЕДЬЮ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Ключевые слова: Система массового обслуживания, поток требований, очередь, обслуживающее устройство.

Представлена математическая модель замкнутой многоканальной системы массового обслуживания с очередью конечной длины. Проведена подробная математическая формализация модели и впервые вычислены вторые моменты всех важнейших числовых характеристик систем массового обслуживания этого типа.

Keywords: queuing system, flow of requirements, queue, serving device.

The mathematical model of multi-channel queuing system of the closed type with queue of the finite length is presented. A detailed mathematical formalization of the model is held; for the first time the second moments of all the important numerical characteristics of queuing system of this type are calculated.

Рассматриваемая в этой работе система массового обслуживания является наиболее общей по отношению к трем ранее изученным вариантам [1 - 3] замкнутых СМО и при соответствующем выборе её параметров может быть сведена к любому из них. Предположим, что в системе имеется конечное число требований N , m обслуживающих приборов (каналов) и, кроме того, конечное число мест для ожидания, что общее число требований в очереди не может превышать E . Предположим также, что $N \geq m+E$, при этом все требования, поступающие в систему тогда, когда в ней уже имеется $m+E$ заявок, теряются и немедленно возвращаются в группу поступающих так, как будто бы они были полностью обслужены (на языке символики Кендалла – это система М/М/м/Е/Н). Граф состояний такой СМО имеет вид, изображенный на рис. 1. При $N=m+E$ эта модель переходит в модель замкнутой многоканальной СМО, рассмотренную в работе [2], а при $E=0$ – в модель Энгсета [3].

Решение уравнений Колмогорова в данном случае вполне аналогично тому, которое было получено в работе [2] для модели М/М/м/Н, так что запишем сразу его конечный результат, которым является связка формул

$$p_k = \frac{N^{[k]} \rho^k}{k!} p_0 = C_N^k \rho^k p_0 \text{ при } k \leq m;$$

$$p_k = \frac{N^{[k]} \rho^k}{m! m^{k-m}} p_0 \text{ при } m \leq k \leq m+E$$

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^m \frac{N^{[k]} \rho^k}{k!} + \frac{1}{m!} \sum_{k=m+1}^{m+E} \frac{N^{[k]} \rho^k}{m^{k-m}} \right]^{-1}.$$

В этих формулах $N^{[k]}$ – факториальные многочлены или обобщённые степени [4, 5],

$C_N^k = \frac{N!}{(N-k)!k!} = N^{[k]}/k!$ – биномиальные коэффициенты.

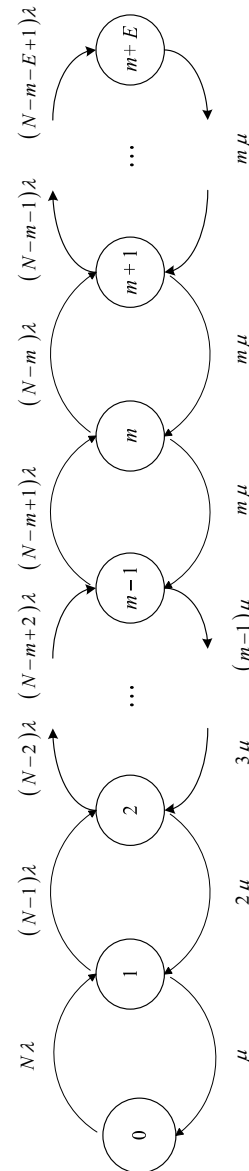


Рис. 1

Числовые характеристики установившегося режима

Вероятность отказа (аналогично [3])

$$p_{отк} = \frac{N-m-E}{N-k} p_{m+E} =$$

$$= \frac{N-m-E}{N-\bar{k}} \frac{N^{[m+E]} \rho^{m+E}}{m! m^E} p_0, \quad (1)$$

относительная пропускная способность $q = 1 - p_{отк}$, абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda (N - \bar{k}) q = \lambda [N - \bar{k} - (N - m - E) p_{m+E}]$$

или

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=0}^{m+E-1} \lambda_k p_k = \lambda \sum_{k=0}^{m+E-1} (N-k) p_k = \\ &= \lambda \left[\sum_{k=0}^{m+E} (N-k) p_k - (N-m-E) p_{m+E} \right] = \\ &= \lambda [N - \bar{k} - (N-m-E) p_{m+E}]. \end{aligned} \quad (2)$$

Вероятность ожидания

$$\begin{aligned} p_{ожид} &= \frac{1}{N-\bar{k}} \sum_{k=m}^{m+E-1} (N-k) p_k = \\ &= \frac{p_0}{m! (N-\bar{k})} \sum_{k=m}^{m+E-1} (N-k) \frac{N^{[k]} \rho^k}{m^{k-m}} = \\ &= \frac{m p_0}{\rho m! (N-\bar{k})} \sum_{k=m}^{m+E-1} \frac{N^{[k+1]} \rho^{k+1}}{m^{k+1-m}} = \\ &= \frac{m}{\rho (N-\bar{k})} \sum_{k=m+1}^{m+E} p_k = \\ &= \frac{m}{\rho (N-\bar{k})} \left(1 - \sum_{k=0}^m p_k \right). \end{aligned} \quad (3)$$

При $E=0$ $\sum_{k=0}^m p_k = 1$ и $p_{ожид} = 0$. Вероятность не-

медленного обслуживания

$$\begin{aligned} p_{обсл} &= \frac{1}{N-\bar{k}} \sum_{k=0}^{m-1} (N-k) p_k = \\ &= \frac{p_0}{N-\bar{k}} \sum_{k=0}^{m-1} (N-k) \frac{N^{[k]} \rho^k}{k!} = \\ &= \frac{p_0}{\rho (N-\bar{k})} \sum_{k=0}^{m-1} (k+1) \frac{N^{[k+1]} \rho^{k+1}}{(k+1)!} = \\ &= \frac{1}{\rho (N-\bar{k})} \sum_{k=1}^m k p_k. \end{aligned} \quad (4)$$

Среднее число требований, находящихся под обслуживанием (среднее число занятых каналов), очевидно,

$$\begin{aligned} \bar{m} &= \sum_{k=0}^m k p_k + m \sum_{k=m+1}^{m+E} p_k = \sum_{k=0}^{m-1} k p_k + m \left(1 - \sum_{k=0}^{m-1} p_k \right) = \\ &= m - \sum_{k=0}^{m-1} (m-k) p_k \end{aligned}$$

– такая же формула, что и в модели М/М/м/Н.

Среднее число требований в системе в целом

$$\begin{aligned} \bar{k} &= \sum_{k=0}^{m+E} k p_k = N \sum_{k=0}^{m+E} p_k - \sum_{k=0}^{m+E} (N-k) p_k = \\ &= N - (N-m-E) p_{m+E} - \sum_{k=0}^{m-1} (N-k) p_k - \end{aligned}$$

$$- \sum_{k=m}^{m+E-1} (N-k) p_k = N - (N-m-E) p_{m+E} -$$

$$- p_0 \sum_{k=0}^{m-1} (N-k) \frac{N^{[k]} \rho^k}{k!} -$$

$$- \frac{p_0}{m!} \sum_{k=m}^{m+E-1} (N-k) \frac{N^{[k]} \rho^k}{m^{k-m}} =$$

$$= N - (N-m-E) p_{m+E} -$$

$$- \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^{m-1} (k+1) p_{k+1} - \frac{m}{\rho} \sum_{k=m}^{m+E-1} p_{k+1} =$$

$$= N - (N-m-E) p_{m+E} -$$

$$- \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^m k p_k - \frac{m}{\rho} \sum_{k=m+1}^{m+E} p_k =$$

$$= N - (N-m-E) p_{m+E} - \frac{\bar{m}}{\rho}. \quad (5)$$

Это же соотношение можно, очевидно, получить, используя зависимость (2): $\bar{m} = A/\mu$. С помощью (5) можно легко проверить соотношения (1), (3) и (4), показав, что в данном случае мы также имеем $p_{отк} + p_{ожид} + p_{обсл} = 1$. При этом

$$p_{отк} = \frac{\rho (N-m-E)}{m + \rho (N-m-E) p_{m+E}} p_{m+E};$$

$$p_{ожид} = \frac{m}{m + \rho (N-m-E) p_{m+E}} \left(1 - \sum_{k=0}^m p_k \right);$$

$$P_{обсл} = \frac{1}{m + \rho(N - m - E)p_{m+E}} \sum_{k=1}^m k p_k,$$

так что

$$P_{ожид} + P_{обсл} = \frac{\bar{m}}{m + \rho(N - m - E)p_{m+E}}.$$

Средняя длина очереди

$$\begin{aligned} \bar{l} = \bar{k} - \bar{m} &= N - (N - m - E)p_{m+E} - \bar{m} \frac{1 + \rho}{\rho} = \\ &= N \left[1 - \frac{N - m - E}{N} p_{m+E} - \frac{\bar{m}}{m(l=0)} \right]. \end{aligned}$$

Вывод соотношения для дисперсии числа требований под обслуживанием

$$\begin{aligned} \sigma_m^2 &= \sum_{k=0}^m k^2 p_k + m^2 \sum_{k=0}^{m+E} p_k - \bar{m}^2 = \\ &= \sum_{k=0}^m k^2 p_k + m^2 \left(1 - \sum_{k=0}^m p_k \right) - \bar{m}^2 = \\ &= \bar{m}(m - \bar{m}) - \sum_{k=0}^{m-1} (m - k) k p_k = \bar{m}(m - \bar{m}) - \zeta \end{aligned}$$

совершенно аналогичен выводу этой величины для модели М/М/м/∞ с той лишь разницей, что в данном случае имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m k p_k &= \rho(N - \bar{k}) p_{обсл} = \\ &= [\bar{m} + \rho(N - m - E)p_{m+E}] p_{обсл} = \\ &= \bar{m} - [\bar{m} + \rho(N - m - E)p_{m+E}] p_{ожид} = \\ &= \bar{m}(1 - p_{ожид}) - \rho(N - m - E)p_{m+E} p_{ожид}, \end{aligned}$$

тогда как в модели М/М/м/∞ было

$$\sum_{k=1}^m k p_k = \bar{m}(1 - p_{ожид}), \text{ а в модели М/М/м/0/N}$$

$$\sum_{k=1}^m k p_k = \bar{m}. \text{ В итоге формула для параметра } \zeta$$

запишется в виде

$$\begin{aligned} \zeta &= \\ &= \frac{\rho N(m - \bar{m}) - \bar{m}(1 - p_{ожид}) + \rho(N - m - E)p_{m+E} p_{ожид}}{1 + \rho} \end{aligned}$$

и тогда

$$\begin{aligned} \sigma_m^2 &= \bar{m}(m - \bar{m}) + \\ &+ \frac{\bar{m}(1 - p_{ожид}) - \rho(N - m - E)p_{m+E} p_{ожид} - \rho N(m - \bar{m})}{1 + \rho} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\bar{m}(1 - p_{ожид}) - \rho(N - m - E)p_{m+E} p_{ожид}}{1 + \rho} +$$

$$+ (m - \bar{m}) \left(\frac{\bar{m} - \rho N}{1 + \rho} \right) =$$

$$= \frac{\bar{m}(1 - p_{ожид}) - \rho(N - m - E)p_{m+E} p_{ожид}}{1 + \rho} -$$

$$- \frac{\rho(m - \bar{m}) [\bar{l} + (N - m - E)p_{m+E}]}{1 + \rho} =$$

$$= \frac{\bar{m}(1 - p_{ожид}) - \rho(m - \bar{m}) \bar{l} - \rho(N - m - E)(m - \bar{m} + p_{ожид}) p_{m+E}}{1 + \rho},$$

аналог соотношений (5) работы [2] и (6) работы [3]. Легко видеть, что при $N = m + E$ последнее выражение переходит в зависимость (5) работы [2], а при $\bar{l} = E = 0$ получается формула (6) работы [3].

Дисперсия общего числа требований в системе

$$\sigma_k^2 = \sum_{k=0}^{m+E} k^2 p_k - \bar{k}^2 = \sum_{k=0}^{m+E} (k - N + N) k p_k - \bar{k}^2 =$$

$$= N \sum_{k=0}^{m+E} k p_k - \sum_{k=0}^{m+E} (N - k) k p_k - \bar{k}^2 =$$

$$= N \bar{k} - \sum_{k=0}^{m-1} (N - k) k p_k -$$

$$- \sum_{k=m}^{m+E} (N - k) k p_k - \bar{k}^2 = (N - \bar{k}) \bar{k} - \sum_{k=0}^{m-1} (N - k) k p_k -$$

$$- \sum_{k=m}^{m+E-1} (N - k) k p_k - (N - m - E)(m + E) p_{m+E}.$$

Обе суммы в последнем выражении можно подвергнуть затем тому же ряду преобразований, какие использовались при выводе аналогичной зависимости для модели М/М/м/∞:

$$- \sum_{k=0}^{m-1} (N - k) k p_k - \sum_{k=m}^{m+E-1} (N - k) k p_k =$$

$$= -p_0 \sum_{k=0}^{m-1} (N - k) k \frac{N^{[k]} \rho^k}{k!} -$$

$$- \frac{p_0}{m!} \sum_{k=m}^{m+E-1} (N - k) k \frac{N^{[k]} \rho^k}{m^{k-m}} =$$

$$= -\frac{p_0}{\rho} \sum_{k=0}^{m-1} (k+1-1)(k+1) \frac{N^{[k+1]} \rho^{k+1}}{(k+1)!} -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{m p_0}{\rho m!} \sum_{k=m}^{m+E-1} (k+1) \frac{N^{[k+1]} \rho^{k+1}}{m^{k+1-m}} = \\
& = -\frac{p_0}{\rho} \sum_{k=0}^{m-1} (k+1)^2 \frac{N^{[k+1]} \rho^{k+1}}{(k+1)!} + \\
& + \frac{p_0}{\rho} \sum_{k=0}^{m-1} (k+1) \frac{N^{[k+1]} \rho^{k+1}}{(k+1)!} - \\
& -\frac{m p_0}{\rho m!} \sum_{k=m}^{m+E-1} (k+1) \frac{N^{[k+1]} \rho^{k+1}}{m^{k+1-m}} + \\
& + \frac{m p_0}{\rho m!} \sum_{k=m}^{m+E-1} \frac{N^{[k+1]} \rho^{k+1}}{m^{k+1-m}} = \\
& = -\frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^m k^2 p_k + \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^m k p_k - \\
& -\frac{m}{\rho} \sum_{k=m+1}^{m+E} k p_k + \frac{m}{\rho} \sum_{k=m+1}^{m+E} p_k = \\
& = -\frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^m k^2 p_k - \frac{m}{\rho} \sum_{k=m+1}^{m+E} k p_k + \frac{\bar{m}}{\rho} = \\
& = \frac{\bar{m}}{\rho} - \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^m k^2 p_k - \frac{m}{\rho} \left(\bar{k} - \sum_{k=0}^m k p_k \right) = \\
& = \frac{\bar{m}}{\rho} - \frac{m \bar{k}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^{m-1} (m-k) k p_k,
\end{aligned}$$

откуда следует

$$\begin{aligned}
\sigma_k^2 &= (N - \bar{k}) \bar{k} + \frac{\bar{m}}{\rho} - \frac{m \bar{k}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^{m-1} (m-k) k p_k - \\
& - (N - m - E)(m + E) p_{m+E} = \\
& = (N - \bar{k}) \bar{k} + \frac{\bar{m}}{\rho} - \frac{m \bar{k}}{\rho} + \frac{\zeta}{\rho} - \\
& - (N - m - E)(m + E) p_{m+E},
\end{aligned}$$

и в силу (5) и (6)

$$\begin{aligned}
\sigma_k^2 &= (N - \bar{k}) \bar{k} - \frac{m \bar{l} + (m-1) \bar{m} - \zeta}{\rho} - \\
& - (N - m - E)(m + E) p_{m+E} = \\
& = \frac{\bar{k} \bar{m} - m \bar{l} - (m-1) \bar{m} + \zeta}{\rho} - \\
& - (N - m - E)(m + E - \bar{k}) p_{m+E} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& = \frac{1}{\rho(1+\rho)} \left\{ \bar{m}(\rho + p_{ожид}) - (m - \bar{m}) \bar{l} - \right. \\
& \left. - \rho(N - m - E) [\rho(m - \bar{m}) - p_{ожид} + (1+\rho)(E - \bar{l})] p_{m+E} \right\}
\end{aligned}$$

Ковариация числа требований в очереди и под обслуживанием

$$K_{ml} = \sum_{k=m}^N m(k-m) p_k - \bar{l} \bar{m} = (m - \bar{m}) \bar{l},$$

и тогда

$$\begin{aligned}
\sigma_l^2 &= \sigma_k^2 - \sigma_m^2 - 2 K_{ml} = \frac{\bar{m} p_{ожид} - (1+\rho)(m - \bar{m}) \bar{l}}{\rho} - \\
& - (N - m - E)(E - \bar{l} - p_{ожид}) p_{m+E},
\end{aligned}$$

ex definitio коэффициент корреляции $r_{ml} = \frac{K_{ml}}{\sigma_m \sigma_l}$.

При $\bar{l} = E = 0$ следует, $\sigma_k^2 = \sigma_m^2$, $K_{ml} = \sigma_l^2 = 0$, как и должно ожидать. В другом предельном случае при $N = m + E$ получаем формулы (7), (8) модели М/М/м/Н [2].

Среднее время обслуживания одного требования $\bar{t}_{обсл} = 1/\mu = \bar{m}/A$, дисперсия времени обслуживания $\sigma_{обсл}^2 = 1/\mu^2$. Балансовое соотношение для функции распределения времени нахождения в очереди одной заявки точно так же, как и раньше,

$$q \frac{N - \bar{k}}{N} [1 - F_{ожид}(t)] =$$

$$\begin{aligned}
& = \sum_{k=m}^{m+E-1} \frac{N-k}{N} p_k \sum_{j=0}^{k-m} \tilde{B}_j(t) = \\
& = e^{-m\mu t} \sum_{k=m}^{m+N-1} \frac{N-k}{N} p_k \sum_{j=0}^{k-m} \frac{(m\mu t)^j}{j!} = \\
& = e^{-m\mu t} \sum_{k=m}^{m+E-1} \frac{N-k}{N} p_k e_{k-m}(m\mu t),
\end{aligned}$$

где $e_m(\rho) = 1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \dots + \frac{\rho^m}{m!}$ — неполная экспоненциальная функция (неполная экспонента). При этом $e_0(\rho) = 1$, а при $m < 0$ полагаем $e_m(\rho) = 0$. Ясно, что $e_m(\rho) \rightarrow e^\rho$ при $m \rightarrow \infty$. Из формулы (6) следует

$$F_{ожид}(t) = 1 -$$

$$-\frac{e^{-m\mu t}}{q(N-\bar{k})} \sum_{k=m}^{m+E-1} (N-k) p_k e_{k-m}(m\mu t)$$

и

$$f_{\text{ожид}}(t) = \frac{m\mu}{q(N-\bar{k})} e^{-m\mu t} \sum_{k=m}^{m+E-1} (N-k) p_k \frac{(m\mu t)^{k-m}}{(k-m)!},$$

так что среднее время ожидания одной заявкой обслуживания

$$\begin{aligned} \bar{t}_{\text{ожид}} &= \int_0^{\infty} t f_{\text{ожид}}(t) dt = \\ &= \frac{1}{q(N-\bar{k})} \sum_{k=m}^{m+E-1} (N-k) \frac{(m\mu)^{k-m+1}}{(k-m)!} p_k \int_0^{\infty} t^{k-m+1} e^{-\mu m t} dt = \\ &= \frac{1}{q(N-\bar{k})} \sum_{k=m}^{m+E-1} (N-k) \frac{(m\mu)^{k-m+1}}{(k-m)!} p_k \frac{(k-m+1)!}{(m\mu)^{k-m+2}} = \\ &= \frac{1}{qm\mu(N-\bar{k})} \sum_{k=m}^{m+E-1} (N-k)(k-m+1)p_k = \\ &= \frac{p_0}{qm\mu(N-\bar{k})} \sum_{k=m}^{m+E-1} (N-k)(k-m+1) \frac{N^{[k]} \rho^k}{m^{k-m}} = \\ &= \frac{p_0}{m! \lambda (N-\bar{k}) q} \sum_{k=m}^{m+E-1} (k-m+1) \frac{N^{[k+1]} \rho^{k+1}}{m^{k+1-m}} = \\ &= \frac{1}{\lambda(N-\bar{k})q} \sum_{k=m}^{m+E-1} (k-m+1)p_{k+1} = \\ &= \frac{1}{\lambda(N-\bar{k})q} \sum_{k=m}^{m+E} (k-m)p_k = \frac{\bar{l}}{A}, \end{aligned}$$

его дисперсия

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ожид}}^2 &= \int_0^{\infty} t^2 f_{\text{ожид}}(t) dt - \bar{t}_{\text{ожид}}^2 = \\ &= \frac{1}{q(N-\bar{k})} \sum_{k=m}^{m+E-1} (N-k) \frac{(m\mu)^{k-m+1}}{(k-m)!} p_k \int_0^{\infty} t^{k-m+2} e^{-\mu m t} dt - \bar{t}_{\text{ожид}}^2 = \\ &= \frac{1}{q(N-\bar{k})} \sum_{k=m}^{m+E-1} (N-k) \frac{(m\mu)^{k-m+1}}{(k-m)!} p_k \frac{(k-m+2)!}{(m\mu)^{k-m+3}} - \bar{t}_{\text{ожид}}^2 = \\ &= \frac{1}{qm^2\mu^2(N-\bar{k})} \sum_{k=m}^{m+E-1} (N-k)(k-m+2)(k-m+1)p_k - \\ &\quad - \bar{t}_{\text{ожид}}^2 = \\ &= \frac{p_0}{qm^2\mu^2(N-\bar{k})} \times \\ &\quad \times \sum_{k=m}^{m+E-1} (N-k)(k-m+2)(k-m+1) \frac{N^{[k]} \rho^k}{m^{k-m}} - \bar{t}_{\text{ожид}}^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{p_0}{qm\mu(N-\bar{k})} \times \\ &\quad \times \sum_{k=m}^{m+E-1} (k-m+2)(k-m+1) \frac{N^{[k+1]} \rho^{k+1}}{m^{k+1-m}} - \bar{t}_{\text{ожид}}^2 = \\ &= \frac{p_0}{mm\mu A} \sum_{k=m}^{m+E} (k-m+1)(k-m) \frac{N^{[k]} \rho^k}{m^{k-m}} - \bar{t}_{\text{ожид}}^2 = \\ &= \frac{1}{m\mu A} \sum_{k=m}^{m+E} (k-m+1)(k-m)p_k - \bar{t}_{\text{ожид}}^2 = \\ &= \frac{1}{m\mu A} \left[\sum_{k=m}^{m+E} (k-m)p_k - (m-1)\bar{l} \right] - \bar{t}_{\text{ожид}}^2. \end{aligned}$$

Далее, имеем (см. [2])

$$\begin{aligned} &\sum_{k=m}^{m+E} (k-m)p_k - (m-1)\bar{l} = \\ &= \sum_{k=0}^{m+E} k^2 p_k - m \sum_{k=0}^{m+E} k p_k + \\ &\quad + \sum_{k=0}^m (m-k)p_k - (m-1)\bar{l} = \\ &= \sigma_k^2 + \bar{k}^2 - m\bar{k} + \zeta - (m-1)\bar{l} = \\ &= N\bar{k} - \frac{m\bar{l} + (m-1)\bar{m} - \zeta}{\rho} - \\ &\quad - (N-m-E)(m+E)p_{m+E} - \\ &\quad - m\bar{k} + \zeta - (m-1)\bar{l} = \\ &= (N-m+1)\bar{l} - E(N-m-E)p_{m+E} - \\ &\quad - \frac{m\bar{l} - \bar{m} p_{\text{ожид}}}{\rho}, \end{aligned}$$

так что

$$\sigma_{\text{ожид}}^2 = \frac{1}{\mu m A} \left[(N-m+1)\bar{l} - E(N-m-E)p_{m+E} - (m\bar{l} - \bar{m} p_{\text{ожид}}) / \rho \right] - \bar{t}_{\text{ожид}}^2.$$

В этом случае, очевидно, $\bar{t}_{\text{сист}} = \bar{t}_{\text{ожид}} + \bar{t}_{\text{обсл}} = \bar{k}/A$ и

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{сист}}^2 &= \sigma_{\text{обсл}}^2 + \sigma_{\text{ожид}}^2 = \\ &= \frac{2}{\mu^2} + \frac{1}{\mu m A} \left[(N+m+1)\bar{l} - (N-m-E)p_{m+E} - \right. \\ &\quad \left. - (m\bar{l} - \bar{m} p_{\text{ожид}}) / \rho \right] - \bar{t}_{\text{сист}}^2. \end{aligned}$$

Как легко видеть, при $N=m+E$ полученная выше система формул $\sigma_{ожид}^2$ и $\sigma_{сист}^2$ переходит в соответствующие зависимости (9), (10) модели М/М/м//N [2]. При $\bar{l}=E=0$ $\sigma_{ожид}^2=0$ и $\sigma_{сист}^2=\sigma_{обсл}^2=1/\mu^2$.

Литература

1. Гильмутдинов Р.Ф., Кирпичников А.П. Математическая модель замкнутой одноканальной системы массового обслуживания // Вестник Казанского технологического университета. – Казань: Изд-во КНИТУ, 2012. - № 6. - С. 189 - 195.
2. Гильмутдинов Р.Ф., Кирпичников А.П. Многоканальные системы массового обслуживания замкнутого типа // Вестник Казанского технологического университета. – Казань: Изд-во КНИТУ, 2012. - № 8. - С. 326-331.
3. Гильмутдинов Р.Ф., Кирпичников А.П. Замкнутые многоканальные системы массового обслуживания с отказами // Вестник Казанского технологического университета. – Казань: Изд-во КНИТУ, 2012. - № 10. - С. 232-234.
4. Сачков В.Н. Комбинаторные методы дискретной математики. – М.: Наука, 1977. - 384с.
5. Кирпичников А.П. Методы прикладной теории массового обслуживания. - Казань: Издательство Казанского университета, 2011. – 200с.

© Р. Ф. Гильмутдинов – ст. преп. каф. интеллектуальных систем и управления информационными ресурсами КНИТУ, ruslan.gilmutdinov@rambler.ru; А. П. Кирпичников – д-р физ.-мат. наук, зав. каф. интеллектуальных систем и управления информационными ресурсами КНИТУ, kirpichnikov@kstu.ru.