УДК 004.94:531.3

О. В. Матухина

О МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИКИ В ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ СИМВОЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Ключевые слова: управление динамикой, дифференциальные связи, программные связи, стабилизация, система символьных вычислений.

Рассматриваются методы математического моделирования кинематики и динамики систем с программными связями в системах символьных вычислений. Решается задача стабилизации связей. Определяются выражения управляющих сил, действующих на систему с целью выполнения уравнений связей.

Keywords: dynamics control, differential constraints, program constraints, stabilization, symbolic computation system.

The modeling methods of kinematics and dynamics of systems with program constraints in symbolic computation systems are considered. The problem of constraints stabilization is solved. The expressions for control forces, acting on the system in order to ensure compliance with constraints equations imposed on the system, are determined.

Введение

В теории управления динамикой систем, содержащей элементы различной физической природы, решаются задачи аналитического построения систем дифференциальных уравнений с требуемыми свойствами решений, заданными уравнениями связей. При численном решении систем дифференциально-алгебраических уравнений, составленных из уравнений динамики и уравнений связей, возникает проблема стабилизации связей. В [1] приводится модификация уравнений динамики систем со связями, позволяющая решить эту задачу. В работе [2] вводятся в рассмотрение уравнения программных связей.

В задачах моделирования кинематики и динамики механических систем получил широкое распространение предложенный Н. П. Еругиным [3] метод построения множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую на. В частности, в работе [4] рассмотрена задача построения множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданные интегральные многообразия, методом, предложенным в [3], и определена конструкция систем дифференциальных уравнений из условия устойчивости этих многообразий. В работе [5] построена автономная система дифференциальных уравнений по заданному распределению фазовых траекторий на плоскости, определены коэффициенты, предусмотренные в конструкции системы, исходя из вида интегральных кривых и особых точек. В работе [6] предложена структура системы дифференциальных уравнений, позволяющая описать кинематические свойства системы уравнениями дифференциальных связей. Изложенные в [5, 6] методы построения динамических систем эффективно используется для программирования движения управляемых механических систем [7, 8].

В последнее время интенсивно развиваются методы автоматизации составления и решения уравнений движения. Удобные для автоматизации формы записи уравнений движения могут быть получены при использовании методов и принципов теоретической механики. Вариационные принципы механики и связанные с ними комплекс физических идей и математических методов имеют активное значение как в теоретической механике, так и в различных научных и технических проблемах. При создании методов автоматизированного моделирования представляет интерес изложенный в работе [2] аналитический метод построения уравнений движения, основанный на вариационном принципе Даламбера-Лагранжа. В работе [3] уравнения динамики получены на основе интегрального вариационного принципа Гамильтона-Остроградского. Изложенный в данной работе метод построения уравнений динамики в канонических переменных позволяет дифференциальные уравнения динамики представить в виде, удобном для их решения численными методами.

В данной работе предлагаются аналитические методы моделирования кинематических свойств и управления динамикой систем с программными связями, реализуемые в автоматизированных информационных системах компьютерной математики. Вследствие динамических аналогий методы, предложенные в работе, применимы для решения задач управления динамикой систем, содержащих элементы различной физической природы, в том числе механических, электрических, робототехнических, экономических систем.

Моделирование кинематических свойств

Для программирования движения управляемых механических систем может быть эффективно использован метод построения динамических систем с заранее заданными кинематическими свойствами [6]. Рассмотрим следующую задачу. Пусть требуется определить аналитические выражения управляющих воздействий, приложенных к механической системе для перемещения изображающей точки в некоторой области G плоскости xOy с обходом «подвижных» препятствий.

Для решения поставленной задачи можно использовать общую структуру систем дифференциальных уравнений следующего вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P_1(x,y,t) - Q(x,y,t) f_y - \dfrac{f_x f_t}{f_x^2 + f_y^2}, \\ \dfrac{dy}{dt} = P_2(x,y,t) + Q(x,y,t) f_x - \dfrac{f_y f_t}{f_x^2 + f_y^2}, \end{cases} \qquad (1)$$

В системе (1) $P_1(x,y,t)$, $P_2(x,y,t)$ – непрерывные функции, обращающиеся в нуль вдоль кривых $f_i(x,y,t) = 0$ $(i = 1,\ldots,r)$, $Q(x,y,t)$ – произвольная непрерывная функция, $f = f_0 f_1 \ldots f_r f_{r+1}$, $f_0 \equiv 1$, $f_{r+1} \equiv 1$, $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$, $f_t = \frac{\partial f}{\partial t}$. Варьируя значениями функций $P_1(x,y,t)$, $P_2(x,y,t)$, $Q(x,y,t)$ можно обеспечить устойчивость или неустойчивость кривых $f_i(x,y,t) = 0$.

Выражая прямоугольные координаты x, y и скорости $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ через обобщенные координаты $q_1,\ldots,q_n$ и скорости $\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_n$ $\left(\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt},\ i = 1,\ldots,n\right)$ механической системы и подставляя полученные выражения в (1), можно получить уравнения неголономных связей, описывающие кинематические свойства механической системы.

Построение уравнений динамики в канонических переменных

Динамика системы описывается уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = R + Q, \qquad \dot{q} = \frac{dq}{dt} \qquad (2)$$

с учетом наложенных на нее уравнений голономных и неголономных программных связей [2]

$$\Phi(q,t) = y(t),\ \Phi = (\phi_\mu),\ \mu = 1,\ldots,\ m_1, \qquad (3)$$

$$\Psi(q,\dot{q},t) = y'(t),\ \Psi = (\psi_\eta),\ \eta = 1,\ldots,\ m_2 \qquad (4)$$

В уравнениях (2)-(4) в качестве основной переменной выступает вектор обобщенных координат перемещений $q(t)$, $q = (q_j)$, $j = 1,\ldots,n$. $L(y,\dot{y},y',q,\dot{q},t) = T(y,\dot{y},y',q,\dot{q}) - P(y,q,t)$ – функция Лагранжа, $T = T(y,\dot{y},y',q,\dot{q})$ – кинетическая энергия системы, $P = P(y,q,t)$ – потенциальная энергия, $D = D(y,\dot{y},y',q,\dot{q},t)$ – диссипативная функция, $Q = Q(q,\dot{q},t)$ – обобщенные непотенциальные внешние силы, $R = R(q,\dot{q},t)$ – управляющие силы или реакции связей. Избыточные переменные $y(t)$, $y'(t)$, оценивающие отклонения от уравнений связей, должны удовлетворять дифференциальным уравнениям возмущений связей, разрешенных относительно старших производных,

$$\begin{aligned} &\frac{d\dot{y}}{dt} = g(y,\dot{y},y',q,\dot{q},t), \\ &\frac{dy'}{dt} = h(y,\dot{y},y',q,\dot{q},t), \\ &g(0,\ 0,\ 0,\ q,\ \dot{q},\ t) = 0, \\ &h(0,\ 0,\ 0,\ q,\ \dot{q},\ t) = 0. \end{aligned} \qquad (5)$$

Уравнения (5) составляются таким образом, чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость и стабилизацию связей.

Управляющие силы R в (2) определяются выражением [2]

$$R = \Theta^T \lambda, \qquad (6)$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Phi_q \\ \Psi_{\dot{q}} \end{pmatrix},\ \Phi_q = \left(\frac{\partial \phi_\mu}{\partial q_j}\right),\ \Psi_{\dot{q}} = \left(\frac{\partial \psi_\eta}{\partial \dot{q}_j}\right),$$

где $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_{m_1+m_2})$ – вектор произвольных множителей.

Равенствами

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}},\ x = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}},\ z = \frac{\partial L}{\partial y'} \qquad (7)$$

вводятся в рассмотрение новые переменные $p = (p_1,p_2,\ldots,p_n)$, $x = (x_1,x_2,\ldots,x_{m_1})$, $z = (z_1,z_2,\ldots,z_{m_2})$, принимаемые в качестве обобщенных импульсов.

Рассматривая обобщенные скорости как функции обобщенных координат перемещений и импульсов $\dot{q} = \dot{q}(y,x,z,q,p,t)$, $\dot{y} = \dot{y}(y,x,z,q,p,t)$, $y' = y'(y,x,z,q,p,t)$, функцию Гамильтона $H(y,x,z,q,p,t)$ и соответственно уравнения (2) с учетом (6) можно представить в виде

$$H(y,x,z,q,p,t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i + \sum_{\mu=1}^{m_1} x_i \dot{y}_i + \sum_{\eta=1}^{m_2} z_i y_i' - L(y,\dot{y},y',q,\dot{q},t), \qquad (8)$$

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad (9)$$

$$\dot{p} + \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = \Theta^T \lambda + Q. \qquad (10)$$

Уравнения возмущений связей в канонических переменных примут вид

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial x}, \qquad (11)$$

$$y' = \frac{\partial H}{\partial z}, \qquad (12)$$

$$\dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} = 0, \qquad (13)$$

$$\dot{z} + \frac{\partial D}{\partial y'} = 0. \qquad (14)$$

Уравнения (9), (10) составляют уравнения движения в канонических переменных и рассматриваются совместно с уравнениями возмущений связей (11) – (14). Совокупность q, p, x, y, z составляет канонические переменные.

Определение управляющих воздействий

Управляющие силы определяются в виде $R = \Theta^T \lambda$. Для определения выражений множителей λ следует продифференцировать уравнения связей (3), (4) с учетом дифференцирования уравнений (9), (11), (12) по времени. Тогда обобщенные управляющие силы можно представить в виде

$$R = \begin{pmatrix} \Phi_q \\ \Psi_{\dot q} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_1 - B_1 \\ A_2 - B_2 \end{pmatrix}. \qquad (15)$$

Исключением множителей λ из уравнений системы (10) можно получить окончательный вид уравнений движения

$$\dot q = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad (16)$$

$$\dot p = \begin{pmatrix} \Phi_q \\ \Psi_{\dot q} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_1 - B_1 \\ A_2 - B_2 \end{pmatrix} + Q - \frac{\partial H}{\partial q} - \frac{\partial D}{\partial \dot q}. \qquad (17)$$

Пример

Необходимо построить уравнения динамики в канонических переменных плоского двухзвенного манипулятора.

Пусть m_1, m_2 – массы звеньев, g – ускорение свободного падения. Для программирования движения манипулятора по заданной траектории необходимо на координаты и скорости конца схвата наложить ограничения, описываемые уравнениями дифференциальных связей. Соответствующие уравнения неголономных связей $\psi_1 = 0, \psi_2 = 0$ могут быть получены с помощью системы (1). Для решения задачи стабилизации связей вводятся уравнения программных связей $\psi_1 = y_1', \psi_2 = y_2'$. Выражения кинетической, потенциальной энергии, диссипативной функции системы с учетом избыточных переменных y_1', y_2' запишутся в виде

$$2T = (m_1 + m_2)l_1^2 \dot q_1^2 + m_2 l_2^2 (\dot q_1 + \dot q_2)^2 +$$
$$+ 2m_2 l_1 l_2 \dot q_1 (\dot q_1 + \dot q_2) cosq_2 + y_1'^2 + y_2'^2,$$
$$P = g(m_1 + m_2) l_1 sinq_1 + g m_2 l_2 sin(q_1 + q_2),$$
$$2D = c_1 y_1'^2 + c_2 y_2'^2.$$

Учитывая $L = T - P$, из равенств (7) можно получить

$$p_1 = \alpha \dot q_1 + \beta \dot q_2, p_2 = \beta \dot q_1 + \gamma \dot q_2,$$
$$z_1 = y_1', z_2 = y_2',$$

где $\alpha = (m_1 + m_2) l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2 m_2 l_1 l_2 cosq_2$, $\beta = m_2 l_1^2 + m_2 l_1 l_2 cosq_2, \gamma = m_2 l_2^2$.

Выражая обобщенные скорости $\dot q_1, \dot q_2$ через канонические переменные p_1, p_2, можно получить уравнения динамики в канонических переменных

$$\begin{cases} \dot q_1 = (\gamma p_1 - \beta p_2)\left(\alpha\gamma - \beta^2\right)^{-1}, \\ \dot q_2 = (\alpha p_2 - \beta p_1)\left(\alpha\gamma - \beta^2\right)^{-1}, \\ \dot p_1 = -g(m_1 + m_2) l_1 cosq_1 - \\ \qquad - g m_2 l_2 cos(q_1 + q_2) + R_1, \\ \dot p_2 = -m_2 l_1 l_2 sinq_2 \left[\gamma(\gamma - \beta)p_1^2 + \beta(\beta - \alpha)p_2^2 + \right. \\ \qquad \left. + \left(\alpha\gamma - 2\beta\gamma + \beta^2\right) p_1 p_2 \right] (\alpha\gamma - \beta^2)^{-2} - \\ \qquad - g m_2 l_2 cos(q_1 + q_2) + R_2. \end{cases}$$

Построение и решение полученных уравнений проведены в системе символьных вычислений Maple. Некоторые результаты моделирования динамики манипулятора с применением изложенных методов приведены в работе [9].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, номер проекта 10-01-00381.

Литература

1. *J. Baumgarte*, Computer Math. Appl. Mech. Eng., 1, 1, 1-16 (1972).
2. *Р.Г. Мухарлямов*, Прикладная математика и механика, 70, 2, 36–249 (2006).
3. *Н.П. Еругин*, Прикладная математика и механика,. XVI, 659-670 (1952).
4. *Р.Г. Мухарлямов*, Дифференц. уравнения, 3, 2, 180-192 (1967).
5. *Р.Г. Мухарлямов*, Дифференц. уравнения, 3, 10, 1673-1681 (1967).
6. *О.В. Ибушева, Р.Г. Мухарлямов*, Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. Науки, 150, 3, 133-139 (2008).
7. *О.В. Матухина*, *Вестн.* Казан. гос. технолог. ун-та, 15, 11, 272-274 (2012).
8. *Р.Г. Мухарлямов*, *О.В. Матухина*, Вестн. Казан. гос. технолог. ун-та, 15, 12, 220-224 (2012).
9. *О.В. Ибушева, Р.Г. Мухарлямов*, Вестн. Казан. гос. техн. ун-та им. А.Н. Туполева, 1, 75-80 (2010).

© **О. В. Матухина** – канд. физ.-мат. наук, доц. каф. информационных систем и технологий НХТИ КНИТУ, ovmatukhina@gmail.com.