

О. В. Матухина

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В УПРАВЛЕНИИ СИСТЕМОЙ С ПРОГРАММНЫМИ СВЯЗЯМИ

Ключевые слова: управление динамикой, дифференциальные связи, программные связи, стабилизация, система символьных вычислений.

Рассматриваются методы построения уравнений кинематики и управления динамикой систем с программными связями. В качестве иллюстративного примера приводится решение задачи управления динамикой плоского манипулятора, совершающего перемещение в соответствии с заданной программой движения. Проводится моделирование задачи в системе символьных вычислений.

Keywords: dynamics control, differential constraints, program constraints, stabilization, symbolic computation system. The methods of kinematic equations construction and dynamics control are considered. The solution of dynamics control problem of the flat manipulator, making movement according to the set program of movement, is provided as an illustrative example. The problem is simulated in symbolic computation system.

Введение

Многие задачи теоретического и прикладного характера, связанные, в частности, с задачами управления, состоят в построении математических моделей. Математическое моделирование является быстро развивающейся областью науки и техники. Для ее успешного развития важны отвечающие современным требованиям методы решения инженерных и математических задач с использованием компьютеров. Развитие и совершенствование такой быстро развивающейся области знания связано с разработкой систем автоматизированного моделирования. Эти системы реализуют множество стандартных и специальных математических операций, снабжены мощными графическими средствами и обладают собственными языками программирования. Все это предоставляет широкие возможности для решения задач моделирования и управления сложными системами.

Управление движением системы предполагает решение трех задач: планирование траектории движения, стабилизацию движения, управление динамикой системы. К решению задачи планирования траектории движения в рабочей среде с препятствиями можно выделить два подхода. Первый позволяет получить точное решение этой задачи, либо доказать, что решения не существует. Согласно второму подходу поиск решения задачи обхода препятствий осуществляется с помощью численных методов, применение которых предполагает существенные ограничения на формы препятствий и законы их перемещения. Стоит также отметить, что алгоритмы таких методов могут не найти решение даже тогда, когда оно существует. Современный уровень развития вычислительной техники, систем автоматизации составления и решения уравнений движения открывает возможность применения аналитических методов к решению задачи планирования траектории движения в среде с препятствиями. В частности, в [1, 2] предложен метод построения системы дифференциальных уравнений по заданным интегральным многообразиям, применение которого

для моделирования кинематических свойств системы, выраженных в виде дифференциальных связей, позволяет найти решение задачи обхода препятствий.

Для решения задач моделирования динамики используются известные классические методы, основанные на предположении о том, что уравнения связей, наложенные на систему, выполняются как в начальный момент движения, так и при всем последующем движении. Такие методы не позволяют учитывать возможные отклонения от уравнений связей. Поэтому при моделировании динамики систем необходимым условием существования требуемого программного движения является стабилизация связей. Под задачей стабилизации понимается задача выбора управлений, под воздействием которых все движения рассматриваемой системы из начальной окрестности программного движения попадут в другую, более узкую, окрестность этого движения и в дальнейшем ее не покидают. Проблемы построения уравнений программного движения и стабилизации связей излагаются в [3, 4, 5, 6, 7]. В частности, в [5] для стабилизации связей учитываются отклонения от уравнений связей и вводится соответствующая коррекция в правые части уравнений динамики. Уравнения программных связей, уравнений возмущений связей, рассмотренные в [3], гарантируют асимптотическую устойчивость и стабилизацию связей при численном решении.

В теории управления динамикой систем, содержащей элементы различной физической природы, решаются задачи аналитического построения систем дифференциальных уравнений с требуемыми свойствами решений, заданными уравнениями связей. Программное движение, соответствующее заданным свойствам, осуществляется посредством дополнительных управляющих сил. Поэтому основная задача управления сводится к определению сил, прикладываемых к системе в соответствии с поставленной целью.

В данной работе в качестве примера, иллюстрирующего эффективность изложенных

методов, приводится решение задачи управления динамикой плоского манипулятора, совершающего перемещение центра схвата в соответствии с заданной программой движения. Построение и реализация соответствующей математической модели проведены в системе символьных вычислений Maple.

Постановка задачи

Рассматривается задача построения уравнений динамики плоского двухзвенного манипулятора (рис. 1). Необходимо определить выражения управляющих моментов R_1 и R_2 , приложенных в шарнирах и обеспечивающих приближение центра схвата m_2 из произвольной точки (X_0, Y_0) рабочей зоны, расположенной в правой полуплоскости, к началу координат O , касаясь оси Ox и минуя препятствие, уравнение движения которого задано в виде: $(x - 2 + kt)^2 + 4y^2 = 1$.

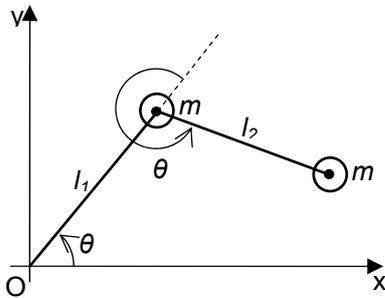


Рис. 1 – Схема плоского двухзвенного манипулятора

Математическое моделирование кинематических свойств

Требуемые движения системы будут осуществляться, если на координаты и скорости центра схвата манипулятора наложить дифференциальные связи, уравнения которых могут быть получены в соответствии с методом, изложенным в [2].

Для этого определяются частные интегралы искомой системы уравнений:

$$\begin{aligned} f_1(x, y, t) &\equiv x + k_1 t = 0, \\ f_2(x, y, t) &\equiv y = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$f_3(x, y, t) \equiv \frac{1}{2}((x - 2 + k_2 t)^2 + 4y^2 - 1) = 0$$

$$f = f_1 f_2 f_3$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial x} = x - 2 + k_2 t, \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial f_3}{\partial y} = 4y, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = k_1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial f_3}{\partial t} = k_2(x - 2 + k_2 t),$$

искомая система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y, t)(\alpha_{11}^{(1)} f_2 + \alpha_{12}^{(2)} f_1) f_3 - \\ \quad - Q(x, y, t) a - bcd, \\ \frac{dy}{dt} = P(x, y, t)(\alpha_{21}^{(1)} f_2 + \alpha_{22}^{(2)} f_1) f_3 + \\ \quad + Q(x, y, t) b - acd. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a &= f_1 f_3 + 4y f_1 f_2, \\ b &= f_2 f_3 + (x - 2 + k_2 t) f_1 f_2, \\ c &= k_1 f_2 f_3 + k_2(x - 2 + k_2 t) f_1 f_2, \\ d &= [a^2 + b^2]^{-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Коэффициенты $\alpha_{11}^{(1)}$, $\alpha_{12}^{(2)}$, $\alpha_{21}^{(1)}$, $\alpha_{22}^{(2)}$

определяются выражениями:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^{(1)} &= \alpha_{22}^{(2)} = 0, \\ \alpha_{12}^{(1)} &= -\alpha_{21}^{(1)}, \quad \alpha_{12}^{(2)} = -\alpha_{21}^{(2)}, \\ \alpha_{12}^{(1)} &= \frac{Q}{P} - \frac{\lambda_2}{\Delta_{12} f_{(12)} P}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\alpha_{12}^{(2)} = \frac{Q}{P} - \frac{\lambda_1}{\Delta_{21} f_{(21)} P}.$$

Здесь

$$\Delta_{12} = -\Delta_{21} = \frac{\partial f_1}{\partial x} \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x} \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1, \quad (6)$$

$$f_{(12)} = f_{(21)} = f_3(0,0,0) = \frac{3}{2}.$$

Полагая $P = 2$, $Q = 1$ и $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, из (5) с учетом (6) и условия устойчивости $\lambda_{12}, \lambda_{21} < 0$ получим:

$$\alpha_{21}^{(1)} = -\frac{7}{6}, \quad \alpha_{12}^{(2)} = \frac{1}{6}.$$

Подстановкой значений P , Q и коэффициентов $\alpha_{11}^{(1)}$, $\alpha_{12}^{(2)}$, $\alpha_{21}^{(1)}$, $\alpha_{22}^{(2)}$ в (3) с учетом (4), можно получить систему

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{2}{3} f_1 f_3 - 4y f_1 f_2 - bcd, \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{4}{3} f_2 f_3 + (x - 2 + k_2 t) f_1 f_2 - acd. \end{cases}$$

Учитывая (1.51), запишем систему в виде

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{3}(x + k_1 t)((x - 2 + k_2 t)^2 + 4y^2 - 1) - \\ \quad - 4(x + k_1 t)y^2 - bcd, \\ \frac{dy}{dt} = -\frac{2}{3}y((x - 2 + k_2 t)^2 + 4y^2 - 1) + \\ \quad + (x - 2 + k_2 t)(x + k_1 t)y - acd, \end{cases} \quad (7)$$

где a, b, c, d определяются выражениями (4).

Далее приводится фрагмент программы построения уравнений (7), разработанный в системе Maple:

```
fx:=diff(f(px2,py2,t),px2);
fy:=diff(f(px2,py2,t),py2);
ft:=diff(f(px2,py2,t),t);
dx:=p1-q*fy-fx*ft/(fx^2+fy^2);
```

```

dy:=p2+q*fx-fy*ft/(fx^2+fy^2);
f1:=px2+2*k*t;
f2:=py2;
f3:=(px2-2+k*t)^2+4*py2^2-1)/2;
f12:=subs(px2=0,py2=0,t=0,f3);
b2:=q/p+1/(p*f12);
c1:=-q/p+12/(p*f12);
subs(l1=-1,l2=-2,k=0.01,q=1,p=2,c1);
subs(l1=-1,l2=-2,k=0.01,q=1,p=2,b2);
p1:=p*b2*f1*f3;
p2:=p*c1*f2*f3;
f(px2,py2,t):=f1*f2*f3;
dxsubs:=subs(l1=-1,l2=-2,k=0.01,q=1,p=2,dx);
dysubs:=subs(l1=-1,l2=-2,k=0.01,q=1,p=2,dy);
Положение участков  $m_1, m_2$  манипулятора

```

определяется углами поворота звеньев θ_1, θ_2 , принимаемыми за обобщенные координаты q_1, q_2 . Прямоугольные координаты центра схвата выражаются через обобщенные координаты

$$\begin{aligned} x &= l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2), \\ y &= l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2). \end{aligned} \quad (8)$$

Выражения прямоугольных скоростей запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2))\dot{q}_1 - \\ &\quad - l_2 \sin(q_1 + q_2)\dot{q}_2, \\ \dot{y} &= (l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2))\dot{q}_1 + \\ &\quad + l_2 \cos(q_1 + q_2)\dot{q}_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Заменой прямоугольных координат X, Y и скоростей \dot{X}, \dot{Y} в (7) соответствующими выражениями в обобщенных координатах (8), (9) можно получить уравнения неголономных связей, обеспечивающие движения в соответствии с условиями задачи:

$$\begin{aligned} (l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2))\dot{q}_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2)\dot{q}_2 - \\ - \frac{1}{3} a(l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) + 2kt) - \\ - kabd(l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2)) + \\ + kb^2d + c = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} (l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2))\dot{q}_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2)\dot{q}_2 + \\ + \frac{4}{3} a(l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2)) + \\ + kbcd + b = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}(l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) - 2 + kt)^2 + \\ &\quad + 2(l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2))^2 - 1, \\ b &= 2ay + (l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) - 2 + kt) \cdot \\ &\quad \cdot (l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) + 2kt) \cdot \\ &\quad \cdot (l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2)), \\ c &= (l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) + 2kt)(a + 4y^2), \\ d &= [(a(l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2)) - b)^2 + c]^{-1}. \end{aligned}$$

Построение уравнений динамики

Уравнения динамики системы рассматриваются совместно с уравнениями связи (10). Для стабилизации связей необходимо ввести уравнения программных связей [3]:

$$\begin{aligned} y'_1 &= (l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2))\dot{q}_1 + \\ &\quad + l_2 \sin(q_1 + q_2)\dot{q}_2 - \\ &\quad - \frac{1}{3} a(l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) + 2kt) - \\ &\quad - kabd(l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2)) + \\ &\quad + kb^2d + c, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} y'_2 &= (l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2))\dot{q}_1 + \\ &\quad + l_2 \cos(q_1 + q_2)\dot{q}_2 + \\ &\quad + \frac{4}{3} a(l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2)) + \\ &\quad + kbcd + b, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}(l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) - 2 + kt)^2 + \\ &\quad + 2(l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2))^2 - 1, \\ b &= 2ay + (l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) - 2 + kt) \cdot \\ &\quad \cdot (l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) + 2kt) \cdot \\ &\quad \cdot (l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2)), \\ c &= (l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2) + 2kt)(a + 4y^2), \\ d &= [(a(l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2)) - b)^2 + c]^{-1}. \end{aligned}$$

Для построения уравнений динамики необходимо определить выражения кинетической энергии, потенциальной энергии и диссипативной функции. Для рассматриваемой системы соответствующие функции запишутся в обобщенных координатах q_1, q_2 с учетом избыточных переменных y'_1, y'_2 в виде

$$\begin{aligned} 2T &= (m_1 + m_2)l_1^2 \dot{q}_1^2 + m_2 l_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \\ &\quad + 2m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos q_2 + y_1'^2 + y_2'^2, \\ P &= g(m_1 + m_2)l_1 \sin q_1 + gm_2 l_2 \sin(q_1 + q_2), \\ 2D &= c_1 y_1'^2 + c_2 y_2'^2. \end{aligned}$$

Уравнения динамики описываются системой уравнений вида:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial P}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = \Theta^T \lambda + Q, \quad (11)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}'} + \frac{\partial D}{\partial \dot{y}'} = 0. \quad (13)$$

Используя в Maple оператор дифференцирования D и функцию diff для определения полных и частных производных функций T, P, D, можно получить дифференциальные уравнения динамики системы в виде, разрешенном относительно старших производных:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 = m_2 l_2^2 \alpha - (m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos q_2) \beta + \\ \quad + m_2 l_2^2 R_1 - (m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos q_2) R_2, \\ \ddot{q}_2 = ((m_1 + m_2) l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos q_2) \beta - \\ \quad - (m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos q_2) \alpha - \\ \quad - (m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 \cos q_2) R_1 + \\ \quad + ((m_1 + m_2) l_1^2 + m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 \cos q_2) R_2. \end{cases} \quad (14)$$

Здесь

$$\alpha = 3m_2l_1l_2\dot{q}_1\dot{q}_2 \sin q_2 - g(m_1 + m_2)l_1 \cos q_1 - gm_2l_2 \cos q_1,$$

$$\beta = m_2l_1l_2\dot{q}_1\dot{q}_2 \cos q_2 - m_2l_1l_2\dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\sin q_2 - gm_2l_2 \cos(q_1 + q_2).$$

Управляющие воздействия R_1, R_2 в (14) определяются выражениями

$$R_1 = (l_1 \sin q_1 + l_2 \sin(q_1 + q_2))\lambda_1 + (l_1 \cos q_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2))\lambda_2, \quad (15)$$

$$R_2 = l_2 \sin(q_1 + q_2)\lambda_1 + l_2 \cos(q_1 + q_2)\lambda_2.$$

Уравнения возмущений связей (12)-(13) примут вид

$$\begin{cases} \dot{y}'_1 = -c_1 y'_1, \\ \dot{y}'_2 = -c_2 y'_2. \end{cases} \quad (16)$$

Множители λ_1, λ_2 определяются в Maple с помощью команды solve из уравнений, составленных путем дифференцирования равенств (10) с учетом выражений (14) – (16).

Решение задачи

Численный эксперимент проведен в системе Maple при следующих данных $m_1 = m_2 = 1$, $l_1 = l_2 = 4$, $k = 0.01$, $c_1 = 2$, $c_2 = 5$.

Начальные условия $q_1(0)$, $q_2(0)$ определяются из равенств (8) при условии, что начальное положение центра схвата манипулятора соответствует точкам

$$(x(0), y(0)) = [(4, 0.01), (3.75, 0.1), (3.4, 0.05)].$$

Значения $\dot{q}_1(0)$, $\dot{q}_2(0)$ выбираются с условием, что система находится в состоянии покоя в начальный момент времени.

На рис. 2. приведены траектории движения центра схвата плоского манипулятора, полученные в результате решения уравнений динамики при

заданных начальных условиях с помощью встроенной функции Maple DEtools/phaseportrait.

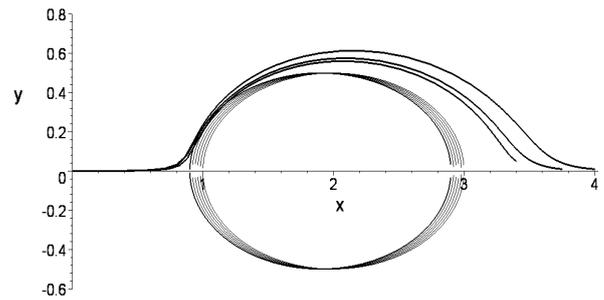


Рис. 2 – Траектории движения центра схвата манипулятора с обходом подвижного препятствия

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, номер проекта 10-01-00381.

Литература

1. Р.Г. Мухарлямов Дифференц. уравнения, 3, 10, 1673-1681 (1967).
2. О.В. Ибушева, Р.Г. Мухарлямов, Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. Науки, 150, 3, 133-139 (2008).
3. Р.Г. Мухарлямов, Прикладная математика и механика, 70, 2, 236-249 (2006).
4. Р.Г. Мухарлямов, Вестн. Рос. ун-та дружбы народов, сер. Прикладн. матем. и информ., 1, 13-28 (1995).
5. J. Baumgarte, Computer Math. Appl. Mech. Eng., 1, 1, 1-16 (1972).
6. U. M. Ascher, J. Mech., Structures and Machines, 23, 2, 135-158 (1995).
7. Р.Г. Мухарлямов, О.В. Матухина, Вестн. Казан. гос. технолог. ун-та, 15, 12, 220-224 (2012).
8. О.В. Матухина, Вестн. Казан. гос. технолог. ун-та, 15, 11, 272-274 (2012).