

ВАРИАЦИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

Ключевые слова: тонкостенный стержень, напряжения и деформации, вариационные соотношения, принцип Лагранжа, вариационный метод.

В статье представлены вариационные соотношения теории тонкостенных стержней открытого профиля, изложен метод, позволяющий на основе простейших соотношений для компонент деформаций представить вариационные соотношения принципа Лагранжа для стержней, поперечное сечение которых составлено как из прямолинейных, так и криволинейных участков.

Keywords: thin-walled rods, stresses and deformations, variation ratios, principle Lagrange, variational method.

The article presents the variational relations of the theory of thin-walled open-profile rods, the method which allows to present variational relations of Lagrange principle for rods with transverse sections consisting of both rectilinear and curvilinear parts based on the simple relations for components of deformation.

В настоящее время теория тонкостенных стержней в достаточной мере разработана и изложена в фундаментальных работах [1,2]. Однако, при расчете предварительно напряженных конструкций возникает необходимость формулировки вариационных принципов с использованием компонент напряжений и деформаций [3-5], которых в известной автору литературе не представлены.

Для описания напряженно-деформированного состояния тонкостенного стержня используем теорию, учитывающую сдвиги, возникающие при изгибе и при кручении стержня. Эта модель основывается на гипотезах принятых в теории стержней Тимошенко и в теории тонкостенных стержней открытого профиля [2]. Применяются основные гипотезы теории Тимошенко:

1. При деформировании продольные волокна стержня не взаимодействуют друг с другом в перпендикулярных к ним направлениях (гипотеза ненадавливания).
2. Поперечные сечения стержня, плоские до деформации, после деформации остаются плоскими.
3. Напряжения, связанные с изгибом в плоскости, проходящей через главную ось поперечного сечения стержня, постоянны по ширине сечения.
4. Справедлив закон Гука.

Кроме этих предположений используются гипотезы, принятые в теории тонкостенных стержней с учетом сдвигов:

1. Гипотеза неизменяемости контура, в соответствии с которой, при деформировании стержня, профиль стержня в плоскости поперечного сечения перемещается как абсолютно твердое тело.
2. Гипотеза безмоментности, согласно которой, составляющие касательных напряжений, перпендикулярные к профилю поперечного сечения стержня (к срединной поверхности) равны нулю.

Для описания деформирования стержня введем декартовую систему координат $Oxyz$, с осью Ox , перпендикулярной к плоскости поперечного сечения (рис. 1). Обозначим через $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – орты этой системы координат.

Для вычисления компонент напряженно-деформированного состояния в заданных точках $M(y_t, z_t)$, на линии срединной поверхности поперечного сечения, вводится локальная декартова система координат, с осями My_t, Mz_t , направленными по касательной и по нормали к профилю стержня (рис. 1). Обозначим орты этих осей $\bar{i}_t, \bar{t}, \bar{n}$. Полагаем, что $\bar{n} = \bar{t} \times \bar{i}_x$.

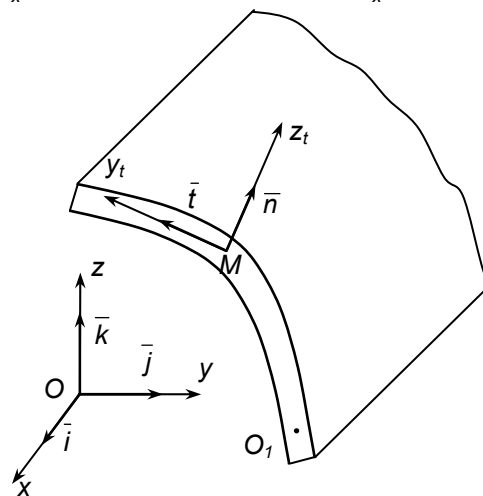


Рис. 1

В системе координат Oyz ,

$$\bar{t} = t_y \bar{j} + t_z \bar{k}, \quad \bar{n} = n_y \bar{j} + n_z \bar{k}. \quad (1)$$

где t_y, t_z, n_y, n_z – направляющие косинусы осей My_t, Mz_t .

Справедливы равенства:

$$t_y = \bar{j} \cdot \bar{t}, \quad t_z = \bar{k} \cdot \bar{t}, \quad n_y = \bar{j} \cdot \bar{n}, \quad n_z = \bar{k} \cdot \bar{n},$$

$$n_y = t_z, \quad n_z = -t_y,$$

$$y = y_M + y_t t_y + z_t t_z, \quad z = z_M + y_t t_z - z_t t_y, \quad (2)$$

$$t_y = \frac{dy}{ds} = \frac{\partial y}{\partial y_t} = -\frac{\partial z}{\partial z_t}, \quad t_z = \frac{dz}{ds} = \frac{\partial y}{\partial z_t} = \frac{\partial z}{\partial y_t}.$$

Для описания перемещений и деформаций используем векторы перемещения и углов поворота поперечного сечения стержня:

$$\bar{u} = u_1(x)\bar{j} + u_2(x)\bar{j} + u_3(x)\bar{k};$$

$$\bar{\varphi} = \varphi_1(x)\bar{j} + \varphi_2(x)\bar{j} + \varphi_3(x)\bar{k}. \quad (3)$$

Здесь $u_1(x), u_2(x), u_3(x)$ - перемещения в направлении осей Ox, Oy, Oz , $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ - углы поворота поперечных сечений стержня относительно этих осей.

С учетом (3) и принятых гипотез, возникающие при изгибе и растяжении-сжатии перемещения точек в поперечном сечении стержня $u_u(x, y, z)$, $v_u(x)$, $w_u(x)$ в направлении осей Ox, Oy, Oz , определяются по формулам:

$$u_u(x, y, z) = u_1(x) + z\varphi_2(x) - y\varphi_3(x);$$

$$v_u(x) = u_2(x); \quad w_u(x) = u_3(x). \quad (4)$$

При кручении тонкостенного стержня возникает деplanation, появляются перемещения $u_k(x, y, z)$ в направлении продольной оси Ox . В соответствии с теорией тонкостенных стержней с учетом сдвигов [2]

$$u_k(x, y, z) = -\beta(x) \omega(y, z), \quad (5)$$

где $\beta(x)$ - функция меры деplanation; $\omega(y, z)$ - секториальная площадь профиля.

Кроме деplanation $u_k(x, y, z)$, при кручении, в плоскости поперечного сечения стержня возникают перемещения, связанные с поворотом сечения. Для описания этих перемещений введем, двумерный вектор

$$\bar{V}(x, y, z) = v(x, y, z) \bar{t} + w(x, y, z) \bar{n}. \quad (7)$$

Здесь $v(x, y, z), w(x, y, z)$ - перемещения в некоторой точке $M(y_M, z_M)$ профиля (на линии пересечения срединной поверхности стержня с поперечным сечением) в направлении осей My_t и Mz_t (рис. 1).

В соответствии с гипотезой неизменяемости контура, получается, что при кручении, тонкостенный стержень в плоскости поперечного сечения поворачивается как абсолютно жесткое тело. Следовательно, вектор $\bar{V} = v \bar{t} + w \bar{n}$ может быть представлен в следующем виде [2] (рис. 2):

$$\bar{V} = \bar{v}_P + \bar{\theta} \times \bar{R}_{PM}. \quad (8)$$

Здесь $\bar{v}_P = \eta \bar{j} + \xi \bar{k}$ - вектор перемещения точки $P(y_P, z_P)$ поперечного сечения, которая называется центром кручения; η, ξ - компоненты вектора перемещения точек в системе координат Oyz ; $\bar{\theta} = \theta \bar{i}$ - вектор углов поворота сечения вокруг оси проходящей через полюс $P(y_P, z_P)$ и параллельной оси Ox ; $\bar{R}_{PM} = (\bar{r} - \bar{r}_P) = (y_M - y_P) \bar{j} + (z_M - z_P) \bar{k}$ - вектор, проведенный из полюса P в точку M профиля. Выполняя операцию векторного умножения в формуле (8) и приравнявая правые части соотношений (7) и (8), получаем

$$v \bar{t} + w \bar{n} = [\eta - \theta(z_M - z_P)] \bar{j} + [\xi + \theta(y_M - y_P)] \bar{k}. \quad (9)$$

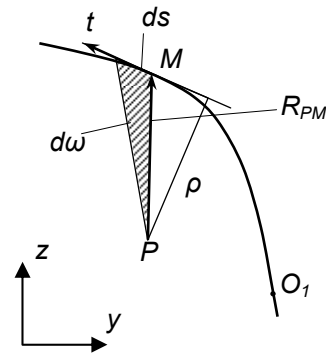


Рис. 2

Умножая это уравнение скалярно на вектора $\bar{t}$ и $\bar{n}$, определяем перемещения в направлениях осей y_t и z_t :

$$v = [\eta - \theta(z_M - z_P)] \bar{j} \cdot \bar{t} + [\xi + \theta(y_M - y_P)] \bar{k} \cdot \bar{t},$$

$$w = [\eta - \theta(z_M - z_P)] \bar{j} \cdot \bar{n} + [\xi + \theta(y_M - y_P)] \bar{k} \cdot \bar{n}.$$

С учетом формул (1), (2) находим

$$v(x, y_M, z_M) = \eta t_y + \xi t_z + \theta [(y_M - y_P) t_z - (z_M - z_P) t_y],$$

$$w(x, y_M, z_M) = \eta t_z - \xi t_y - \theta [(y_M - y_P) t_y + (z_M - z_P) t_z]. \quad (10)$$

В дальнейшем полагаем, что полюс $P(y_P, z_P)$ совпадает с началом системы координат $Oxyz$. Следовательно,

$$\theta = \varphi_1(x), \quad \eta = u_2(x), \quad \xi = u_3(x). \quad (11)$$

С учетом равенств (11), формулы (10) принимают следующий вид:

$$v(x, y_M, z_M) = u_2(x) t_y + u_3(x) t_z + \varphi_1(x) [y_M t_z - z_M t_y],$$

$$w(x, y_M, z_M) = u_2(x) t_z - u_3(x) t_y - \varphi_1(x) [y_M t_y + z_M t_z]. \quad (12)$$

Таким образом, перемещения точек срединной линии поперечного сечения стержня в плоскости сечения описываются соотношениями (12). Для точек $M_n(x, y)$, лежащих на оси Mz_t (рис. 3), величины t_y, t_z , такие же, как и для точки $M(y_M, z_M)$, поэтому полученный результат в виде соотношений (12) можно использовать и для определения перемещений $v(x, y, z), w(x, y, z)$ в точках $M_n(y, z)$, лежащих на оси Mz_t (на линии перпендикулярной к срединной линии поперечного сечения стержня).

Полагая в формулах (12) $y_M = y, z_M = z$, получим

$$v(x, y, z) = u_2(x) t_y + u_3(x) t_z + \varphi_1(x) [y t_z - z t_y],$$

$$w(x, y, z) = u_2(x) t_z - u_3(x) t_y - \varphi_1(x) [y t_y + z t_z]. \quad (13)$$

В этом случае секториальная характеристика (площадь) профиля

$$\omega(y, z) = \omega(s) = \int_{O_n}^{M_n} \rho ds = \int_0^s \rho ds. \quad (14)$$

Здесь s - длина дуги линии $O_n M_n$, отсчитываемая от некоторой точки O_n (рис. 3); $\rho(y, z) = \bar{R}_{PM_n} \cdot \bar{n} = y n_y + z n_z = y t_z - z t_y$ - длина перпендикуляра, проведенного из начала координат $Oxyz$ к касательной к линии $O_n M_n$ в точке M_n . Так как стержень тонкостенный, то в дальнейшем полагаем

$$\rho(y, z) = \rho(y_M, z_M) = y_M n_y + z_M n_z = y_M t_z - z_M t_y.$$

Таким образом получается, что при растяжении-сжатии, изгибе и кручении тонкостенного открытого профиля в направлении нормали к поперечному сечению (в направлении оси Ox) возникают перемещения вызванные растяжением-сжатием, изгибом и деформацией сечения при кручении:

$$u(x, y, z) = u_u(x, y, z) + u_\kappa(x, y, z) = u_1(x) + z\varphi_2(x) - y\varphi_3(x) - \beta(x)\omega(s). \quad (15)$$

Деформации и напряжения будем вычислять в системе координат $My_t z_t$. Используем формулы теории упругости:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \gamma_{xy_t} = \gamma_{xs} = \frac{\partial u}{\partial y_t} + \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\gamma_{xz_t} = \frac{\partial u}{\partial z_t} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{y_t z_t} = \frac{\partial v}{\partial z_t} + \frac{\partial w}{\partial y_t}. \quad (16)$$

Обратим внимание на то, что по формулам (16) вычисляются деформации в фиксированной точке M и в фиксированной локальной системе координат $My_t z_t$. В этом случае, в точке M

$$ds = dy_t \text{ (рис. 1 - 3), следовательно } \frac{\partial}{\partial y_t} = \frac{\partial}{\partial s}.$$

С учетом этого равенства и выражений (2), (13), (15), (16) находим

$$\varepsilon_x = \frac{du_1(x)}{dx} + z \frac{d\varphi_2(x)}{dx} - y \frac{d\varphi_3(x)}{dx} - \frac{d\beta(x)}{dx} \omega(s),$$

$$\gamma_{xy_t} = \frac{du_2(x)}{dx} t_y + \frac{du_3(x)}{dx} t_z + \frac{d\varphi_1(x)}{dx} [y t_z - z t_y] + \varphi_2(x) t_z - \varphi_3(x) t_y - \beta(x) \rho(y_M, z_M), \quad (17)$$

$$\gamma_{xz_t} = \frac{du_2(x)}{dx} t_z - \frac{du_3(x)}{dx} t_y - \frac{d\varphi_1(x)}{dx} [y t_y + z t_z] + \varphi_2(x) t_y - \varphi_3(x) t_z,$$

$$\gamma_{y_t z_t} = 0.$$

Так как принята гипотеза безмоментности, следует полагать $\tau_{xz_t} = G\gamma_{xz_t} = 0$.

В соответствии с гипотезой ненадавливания, продольные волокна стержня не взаимодействуют в нормальном по отношению к ним направлении, следовательно, нормальные напряжения в направлении осей My_t , Mz_t равны нулю: $\sigma_{y_t} = \sigma_{z_t} = 0$.

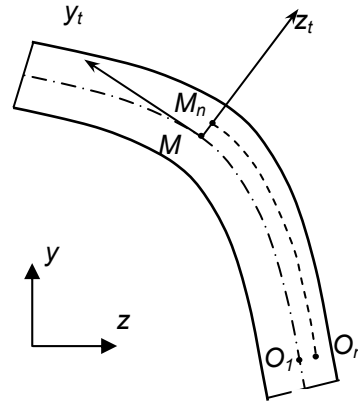


Рис. 3

Таким образом, в тонкостенном стержне возникают только напряжения $\sigma_x = E\varepsilon_x$ и $\tau_{xy_t} = G\gamma_{xy_t}$, действующие в его поперечном сечении. С учетом формул (17), получаем

$$\sigma_x = E\varepsilon_x, \quad \tau_{xy_t} = G\gamma_{xy_t};$$

$$\varepsilon_x = \frac{du_1(x)}{dx} + z \frac{d\varphi_2(x)}{dx} - y \frac{d\varphi_3(x)}{dx} - \frac{d\beta(x)}{dx} \omega(s), \quad (18)$$

$$\gamma_{xy_t} = \frac{du_2(x)}{dx} t_y + \frac{du_3(x)}{dx} t_z + \frac{d\varphi_1(x)}{dx} [y t_z - z t_y] + \varphi_2(x) t_z - \varphi_3(x) t_y - \beta(x) \rho(y_M, z_M).$$

Подчеркнем, что формулы (17), (18) справедливы для точек поперечного сечения стержня, лежащих на оси Mz_t , т.к. для них выполняется равенство $\frac{\partial}{\partial y_t} = \frac{\partial}{\partial s}$.

Координаты точек, лежащих на оси Mz_t ($y_t = 0$) вычисляются по формулам $y = y_M + z_t t_z$, $z = z_M - z_t t_y$. Подставляя эти выражения в соотношение (18) для γ_{xy_t} , с учетом того, что $\rho(y_M, z_M) = y_M t_z - z_M t_y$ получим

$$\gamma_{xy_t} = \gamma + \gamma_{xy_t}^k$$

Здесь

$$\gamma_{xy_t} = \frac{du_2(x)}{dx} t_y + \frac{du_3(x)}{dx} t_z + \frac{d\varphi_1(x)}{dx} \rho(y_M, z_M) + \varphi_2(x) t_z - \varphi_3(x) t_y - \beta(x) \rho(y_M, z_M),$$

$$\gamma_{xy_t}^k = \frac{d\varphi_1(x)}{dx} z_t.$$

Следовательно, касательные напряжения можно представить в виде суммы

$$\tau_{xy_t} = G\gamma_{xy_t} = \tau + \tau_{xy_t}^k,$$

где τ - постоянное по толщине стенки среднее касательное напряжение, $\tau_{xy_t}^k$ - напряжение чистого

кручения, распределенное по толщине стенки по линейному закону:

$$\tau = G \left\{ \left[\frac{du_2(x)}{dx} - \varphi_3(x) \right] t_y + \left[\frac{du_3(x)}{dx} + \varphi_2(x) \right] t_z + \left[\frac{d\varphi_1(x)}{dx} - \beta(x) \right] \rho(y_M, z_M) \right\},$$

$$\tau_{xy_t}^k = G \frac{d\varphi_1(x)}{dx} z_t. \quad (19)$$

Обозначим координаты точек на линии $y_t = 0$ через (y_i, z_i) , соответствующую z_t координату $-z_{ti}$, а длину дуги, которая соответствует точке $M - s_i$. Следовательно, для точек, лежащих на оси Mz_t

$$\sigma_x(y_i, z_i) = E \varepsilon_x(y_i, z_i),$$

$$\tau_{xy_t}(y_i, z_i) = G \gamma_{xy_t} = \left[\gamma(y_M, z_M) + \gamma_{xy_t}^k(z_{ti}) \right];$$

$$\varepsilon_x(y_i, z_i) = \frac{du_1(x)}{dx} + z_i \frac{d\varphi_2(x)}{dx} - y_i \frac{d\varphi_3(x)}{dx} - \frac{d\beta(x)}{dx} \omega(s_i),$$

$$\gamma(y_M, z_M) = \frac{du_2(x)}{dx} t_y + \frac{du_3(x)}{dx} t_z + \frac{d\varphi_1(x)}{dx} \rho(y_M, z_M) + \varphi_2(x) t_z - \varphi_3(x) t_y - \beta(x) \rho(y_M, z_M),$$

$$\gamma_{xy_t}^k = \frac{d\varphi_1(x)}{dx} z_{ti}. \quad (20)$$

Потенциальная энергия деформации стержня в точке (y_i, z_i)

$$U_A(y_i, z_i) = \frac{1}{2} [\sigma_x(y_i, z_i) \varepsilon_x(y_i, z_i) + \tau_{xy_t}^*(y_i, z_i) \gamma_{xy_t}^*(y_i, z_i)]. \quad (21)$$

Здесь

$$\tau_{xy_t}^*(y_i, z_i) = G \gamma_{xy_t}^*,$$

$$\gamma_{xy_t}^* = \gamma(y_M, z_M) + k^* \gamma_{xy_t}^k(z_{ti}), \quad k^* = 2.$$

Введение в выражение для потенциальной энергии деформации (21) слагаемого

$$\tau_{xy_t}^*(y_i, z_i) \gamma_{xy_t}^*(y_i, z_i),$$

вместо

$$\tau_{xy_t}(y_i, z_i) \gamma_{xy_t}(y_i, z_i)$$

объясняется следующим. Как известно [2], при чистом кручении узкой полосы, касательные напряжения τ_{xy_t} ; τ_{xz_t} вносят одинаковый вклад в величину момента чистого кручения H . Согласно принятой гипотезе безмоментности, полагалось $\tau_{xz_t} = 0$, следовательно, момент чистого кручения в этом случае будет создаваться только напряжением τ_{xy_t} , причем справедливо равенство

$$\iint_A (\tau_{xy_t} z_{ti}) dA = \iint_A (\tau_{xy_t}^k z_{ti}) dA = \frac{1}{2} H.$$

Для компенсации отсутствия в формуле для потенциальной энергии деформации (21) напряжения τ_{xz_t} , вместо $\tau_{xy_t}(y_i, z_i)$, $\gamma_{xy_t}(y_i, z_i)$ используются $\tau_{xy_t}^*(y_i, z_i)$, $\gamma_{xy_t}^*(y_i, z_i)$. При этом получается $\iint_A (\tau_{xy_t}^* z_{ti}) dA = k^* \iint_A (\tau_{xy_t}^k z_{ti}) dA = \frac{1}{2} k^* H$. Для некоторых профилей величина коэффициент k^* может быть уточнена на основе экспериментальных данных по формуле $k^* = 2\alpha$, где α - поправочный коэффициент.

Вариация потенциальной энергии деформации

$$\delta U_A(y_i, z_i) = [\sigma_x(y_i, z_i) \delta \varepsilon_x(y_i, z_i) + \tau_{xy_t}^*(y_i, z_i) \delta \gamma_{xy_t}^*(y_i, z_i)]. \quad (22)$$

Для точки (y_i, z_i) , вариация работы внешних сил, распределенных по длине и по площади поперечных сечений стержня

$$\delta W_A(y_i, z_i) = q_u^A(y_i, z_i) \delta u(y_i, z_i) + q_v^A(y_i, z_i) \delta v(y_i, z_i) + q_w^A(y_i, z_i) \delta w(y_i, z_i), \quad (23)$$

где q_u^A , q_v^A , q_w^A - проекции внешних сил на оси координат Ox , Oy_t , Oz_t .

Подставляя в (23) выражения для перемещений (13), (15), получим

$$\delta W_A(y_i, z_i) = q_u^A(y_i, z_i) [\delta u_1(x) + z \delta \varphi_2(x) - y \delta \varphi_3(x) - \delta \beta(x) \omega(s)] + q_v^A(y_i, z_i) [\delta u_2(x) t_y + \delta u_3(x) t_z + \delta \varphi_1(x) (y_i t_z - z_i t_y)] + q_w^A(y_i, z_i) [\delta u_2(x) t_z - \delta u_3(x) t_y - \delta \varphi_1(x) (y_i t_y + z_i t_z)]. \quad (24)$$

Учитывая, что $t_y^2 + t_z^2 = 1$, а усилия q_u^A , q_v^A , q_w^A выражаются через проекции внешних сил на оси координат Ox , Oy , Oz q_1^A , q_2^A , q_3^A по формулам $q_u^A = q_1^A$, $q_v^A = q_2^A(x) t_y + q_3^A(x) t_z$, $q_w^A = q_2^A(x) t_z - q_3^A(x) t_y$, вариацию работы внешних (24) можно представить в следующем виде:

$$\delta W_A(y_i, z_i) = q_1^A(y_i, z_i) [\delta u_1(x) + z_i \delta \varphi_2(x) - y_i \delta \varphi_3(x) - \delta \beta(x) \omega(s)] + q_2^A(y_i, z_i) [\delta u_2(x) - \delta \varphi_1(x) z_i] + q_3^A(x) [\delta u_3(x) + \delta \varphi_1(x) y_i] \quad (25)$$

Для расчета напряженно-деформированного состояния стержневой системы используем вариационный принцип Лагранжа:

$$\delta U - \delta W = 0. \quad (26)$$

Здесь δU - вариация потенциальной энергии деформации системы, δW - вариация работы внешних сил.

Для стержня длиной l_c и с площадью поперечного сечения A

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_{l_c} \iint_A \delta U_A dA dl, \\ \delta W &= \int_{l_c} \iint_A \delta W_A dA dl.\end{aligned}\quad (27)$$

Для вычисления интегралов $\iint_A \delta U_A dA$, $\iint_A \delta W_A dA$ используем численное интегрирование. При этом получается

$$\begin{aligned}\iint_A \delta U_A dA &= \sum_{i=1}^I \delta U_A(y_i, z_i) g_i, \\ \iint_A \delta W_A dA &= \sum_{i=1}^I \delta W_A(y_i, z_i) g_i.\end{aligned}\quad (28)$$

Здесь g_i - весовые множители, зависящие от используемой для численного интегрирования квадратурной формулы, размеров и формы поперечного сечения.

С учетом равенств (25), (22), (27) (28), находим

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_{l_c} \left\{ \sum_{i=1}^I \delta U_A(y_i, z_i) g_i \right\} dl = \\ &= \int_{l_c} \left\{ \sum_{i=1}^I [\sigma_x(y_i, z_i) \delta \varepsilon_x(y_i, z_i) + \right. \\ &\quad \left. \tau_{xy_t}(y_i, z_i) \delta \gamma_{xy_t}(y_i, z_i)] g_i \right\} dl;\end{aligned}\quad (29)$$

$$\begin{aligned}\delta W &= \int_{l_c} \left\{ \sum_{i=1}^I \delta W_A(y_i, z_i) g_i \right\} dl = \\ &= \int_{l_c} \left\{ \sum_{i=1}^I \left\{ q_1^A(y_i, z_i) [\delta u_1(x) + z_i \delta \varphi_2(x) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \{ q_1^A(y_i, z_i) [\delta u_1(x) + z_i \delta \varphi_2(x) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - y_i \delta \varphi_3(x) - \delta \beta(x) \omega(s)] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + q_2^A(y_i, z_i) [\delta u_2(x) - \delta \varphi_1(x) z_i] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + q_3^A(x) [\delta u_3(x) + \delta \varphi_1(x) y_i] \right\} g_i \right\} dl.\end{aligned}$$

Полагая в последнем выражении

$$\begin{aligned}F_1(x) &= \iint_A q_1^A(x) dA = \sum_{i=1}^I q_1^A(x, y_i, z_i) g_i, \\ F_2(x) &= \iint_A q_2^A(x) dA = \sum_{i=1}^I q_2^A(x, y_i, z_i) g_i, \\ F_3(x) &= \iint_A q_3^A(x) dA = \sum_{i=1}^I q_3^A(x, y_i, z_i) g_i, \\ m_1(x) &= \iint_A (q_3^A(x) y - q_2^A(x) z) dA = \\ &= \sum_{i=1}^I \{ q_3^A(x, y_i, z_i) y_i - q_2^A(x, y_i, z_i) z_i \} g_i,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m_2(x) &= \iint_A q_1^A(x) z dA = \\ &= \sum_{i=1}^I q_1^A(x, y_i, z_i) z_i g_i,\end{aligned}$$

$$m_3(x) = \iint_A q_1^A(x) y dA = \sum_{i=1}^I q_1^A(x, y_i, z_i) y_i g_i,$$

$$m_B(x) = \iint_A q_1^A(x) \omega(s) dA = \sum_{i=1}^I q_1^A(x, y_i, z_i) \omega(s_i) g_i,$$

получаем вариацию работы распределенных по длине стержня внешних сил F_1, F_2, F_3 , моментов

m_1, m_2, m_3 и бимомент m_B :

$$\begin{aligned}\delta W &= \int_{l_c} [F_1(x) \delta u_1(x) + F_2(x) \delta u_2(x) + \\ &+ F_3(x) \delta u_3(x) + m_1(x) \delta \varphi_1(x) + m_2(x) \delta \varphi_2(x) + \\ &+ m_3(x) \delta \varphi_3(x) - m_B(x) \delta \beta(x)] dl.\end{aligned}$$

Аналогично, для сил сосредоточенных сил F_{1k}, F_{2k}, F_{3k} , приложенных в точках продольной оси стержня с координатой x_k и моментов, $M_{1j}, M_{2j}, M_{3j}, M_{Bj}$, действующих в точках с координатой x_j вариация работы внешних сил

$$\begin{aligned}\delta W_L &= \sum_{k=1}^K [F_{1k} \delta u_1(x_k) + F_{2k} \delta u_2(x_k) + F_{3k} \delta u_3(x_k)] + \\ &+ \sum_{j=1}^J [M_{1j} \delta \varphi_1(x_j) + M_{2j} \delta \varphi_2(x_j) + \\ &+ M_{3j} \delta \varphi_3(x_j) + M_{Bj} \delta \beta(x_j)].\end{aligned}$$

Таким образом, вариация работы распределенных и сосредоточенных в точках внешних сил

$$\begin{aligned}\delta W &= \int_{l_c} [F_1(x) \delta u_1(x) + F_2(x) \delta u_2(x) + \\ &+ F_3(x) \delta u_3(x) + m_1(x) \delta \varphi_1(x) + m_2(x) \delta \varphi_2(x) + \\ &+ m_3(x) \delta \varphi_3(x) - m_B(x) \delta \beta(x)] dl + \\ &+ \sum_{k=1}^K [F_{1k} \delta u_1(x_k) + F_{2k} \delta u_2(x_k) + F_{3k} \delta u_3(x_k)] + \\ &+ \sum_{j=1}^J [M_{1j} \delta \varphi_1(x_j) + M_{2j} \delta \varphi_2(x_j) + \\ &+ M_{3j} \delta \varphi_3(x_j) + M_{Bj} \delta \beta(x_j)].\end{aligned}\quad (30)$$

Вариационный принцип Лагранжа (26) можно записать с использованием формул (29), (30), в которых напряжения и деформации вычисляются в локальной декартовой системе координат My, z_t . Получилось, что основные положения предложенного в статье [6] метода расчета криволинейных, естественно-закрученных стержней, основанного на соотношениях для прямолинейного стержня, можно распространить и для тонкостенных стержней с криволинейным профилем.

Представим выражение для потенциальной энергии деформации стержня в усилиях и моментах для случаев, когда выполняются равенства

$$\begin{aligned}\iint_A \omega dA &= \int_l h \omega ds = 0, \\ \iint_A \omega y dA &= 0, \quad \iint_A \omega z dA = 0.\end{aligned}\quad (31)$$

Полагаем, что оси Oy , Oz являются главными центральными осями поперечного сечения стержня. Для выбранных осей координат

$$\begin{aligned}\int_{-0.5h}^{0.5h} z_t dz_t &= \int_{-0.5h}^{0.5h} t_y z_t dz_t = \int_{-0.5h}^{0.5h} t_z z_t dz_t = 0, \\ \iint_A y dA &= \iint_A z dA = \iint_A y z dA = 0.\end{aligned}\quad (32)$$

Используя формулы (18) - (19), (21), (31), (32), учитывая, что $y t_z - z t_y = \rho + z_t$, выражение для потенциальной энергии деформации стержня можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{2} \int_{l_c} \iint_A U_A dA dl = \\ &= \frac{1}{2} \int_{l_c} \iint_A [\sigma_x \varepsilon_x + \tau_{xy_t}^* \gamma_{xy_t}^*] dA dl = \\ &= \frac{1}{2} \int_{l_c} \iint_A [E \varepsilon_x^2 + G (\gamma_{xy_t}^*)^2] dA dl = \\ &= \frac{1}{2} \int_{l_c} \iint_A \left\{ E \left[\frac{du_1}{dx} + z \frac{d\varphi_2}{dx} - y \frac{d\varphi_3}{dx} - \frac{d\beta}{dx} \omega \right]^2 + \right. \\ &\quad + G \left[\left(\frac{du_2}{dx} - \varphi_3 \right) t_y + \left(\frac{du_3}{dx} + \varphi_2 \right) t_z + \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{d\varphi_1}{dx} - \beta \right) \rho + k^* \frac{d\varphi_1}{dx} z_t \right]^2 \right\} dA dl = \\ &= \frac{1}{2} \int_{l_c} \iint_A \left\{ \left[\frac{du_1}{dx} \frac{du_1}{dx} + \left(z \frac{d\varphi_2}{dx} \right)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(y \frac{d\varphi_3}{dx} \right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dx} \omega \right)^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + G \left[\left(k^* \frac{d\varphi_1}{dx} z_t \right)^2 + \left(\left(\frac{du_2}{dx} - \varphi_3 \right) t_y \right)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\left(\frac{du_3}{dx} + \varphi_2 \right) t_z \right)^2 + 2 \left(\left(\frac{du_2}{dx} - \varphi_3 \right) \left(\frac{du_3}{dx} + \varphi_2 \right) t_y t_z \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left[\left(\frac{d\varphi_1}{dx} - \beta \right) \rho \right]^2 + 2 \left(\left(\frac{du_2}{dx} - \varphi_3 \right) t_y \left(\frac{d\varphi_1}{dx} - \beta \right) \rho + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + 2 \left(\frac{du_3}{dx} + \varphi_2 \right) t_z \left(\frac{d\varphi_1}{dx} - \beta \right) \rho \right] \right\} dA dl.\end{aligned}\quad (33)$$

Для выбранной системы координат $Oxyz$, усилия и моменты в поперечных сечениях стержня вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}N &= \iint_A \sigma_x dA = EA \frac{du_1}{dx}, \\ Q_y &= \iint_A \tau t_y dA = G \iint_A \left[\left(\frac{du_2}{dx} - \varphi_3 \right) t_y t_y + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{du_3}{dx} + \varphi_2 \right) t_z t_y + \left(\frac{d\varphi_1}{dx} - \beta \right) \rho t_y \right] dA,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Q_z &= \iint_A \tau t_z dA = G \iint_A \left[\left(\frac{du_2}{dx} - \varphi_3 \right) t_y t_z + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{du_3}{dx} + \varphi_2 \right) t_z t_z + \left(\frac{d\varphi_1}{dx} - \beta \right) \rho t_z \right] dA, \\ M_y &= \iint_A \sigma_x z dA = EI_y \frac{d\varphi_2}{dx}, \\ M_z &= \iint_A \sigma_x y dA = -EI_z \frac{d\varphi_3}{dx},\end{aligned}\quad (34)$$

$$\begin{aligned}M_\omega &= \iint_A (\tau t_z y - \tau t_y z) dA = \iint_A G \left[\left(\frac{du_2}{dx} - \varphi_3 \right) \rho t_y + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{du_3}{dx} + \varphi_2 \right) \rho t_z + \left(\frac{d\varphi_1}{dx} - \beta \right) \rho^2 \right] dA\end{aligned}$$

$$B = \iint_A \sigma_x \omega dA = E \frac{d\beta}{dx} I_\omega,$$

$$H = k^* \iint_A (\tau_{xy_t} z_t) dA = G \frac{d\varphi_1(x)}{dx} I_k,$$

$$\text{где } I_\omega = \iint_A (\omega)^2 dA, \quad I_k = k^* \iint_A (z_t)^2 dA.$$

С учетом соотношений (34), формула для потенциальной энергии деформации (33) принимает вид:

$$\begin{aligned}U &= \frac{1}{2} \int_{l_c} \left[\frac{N^2}{EA} + \frac{M_y^2}{EI_y} + \frac{M_z^2}{EI_z} + \frac{B^2}{EI_\omega} + \frac{H^2}{GI_k} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{Q_y^* Q_y}{GA} + \frac{Q_z^* Q_z}{GA} + \frac{M_\omega^* M_\omega}{GI_{\rho k}} \right] dA dl.\end{aligned}\quad (35)$$

$$\text{Здесь } Q_y^* = GA \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \varphi_3 \right), \quad Q_z^* = GA \left(\frac{\partial u_3}{\partial x} + \varphi_2 \right),$$

$$M_\omega^* = GI_{\rho k} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \beta \right), \quad I_{\rho k} = \iint_A \rho^2 dA.$$

Получилось, что выражение для потенциальной энергии деформации (35) имеет «нестандартный» вид, в него входят поперечные силы Q_y , Q_z , момент стесненного кручения M_ω , а также Q_y^* , Q_z^* , M_ω^* . Указанная особенность объясняется тем, что при выводе основных соотношений теории тонкостенных стержней было принято $\tau_{xz_t} = 0$.

Для уточнения распределения касательных напряжений τ по длине поперечного сечения можно использовать формулы, полученные на основе уравнений равновесия отсеченной части стержня [2]:

$$\tau = -Q_y \frac{S_{oz}}{hl_z} - Q_z \frac{S_{oy}}{hl_y} - M_\omega \frac{S_{o\omega}}{hl_\omega}.$$

$$\text{Здесь } S_{oy} = \iint_{A_0} z dA, \quad S_{oz} = \iint_{A_0} y dA, \quad S_{o\omega} = \iint_{A_0} \omega dA,$$

A_0 - площадь отсеченной части сечения (Рис. 4).

Литература

1. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. М.: Физматгиз, 1959. 566 с.
2. Сливкер В.И. Строительная механика. Вариационные

- основы. Учебное пособие. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2005. – 736 с.
3. *Серазутдинов М.Н.* Расчет усиливаемых нагруженных конструкций вариационным методом / *М.Н. Серазутдинов, М.Н. Убайдуллоев, Х.А. Абрагим* // Изв. вузов. Строительство. 2010. № 7. С. 118 – 123.
4. *Серазутдинов М. Н., Абрагим Х.А.* Несущая способность стержневых элементов конструкций, усиливаемых в напряженном состоянии. / *Серазутдинов М.Н.* // Вестник Казанского технологического университета. 2010 г. № 9. С. 512 – 518.
5. *М.Н. Серазутдинов, М.Н. Убайдуллоев, А.Х. Абрагим.* Влияние монтажных сил на несущую способность усиливаемых стержневых систем. / *Серазутдинов М.Н.* // Вестник Казанского технологического университета. 2011 г. № 10. С. 116 – 124.
6. *Серазутдинов М.Н.* Метод расчета криволинейных стержней. / *М.Н. Серазутдинов, Ф.С. Хайруллин* // Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1991. № 5. С. 104 – 108.

© **М. Н. Серазутдинов** - д-р физ. мат. наук, проф. зав. каф. теоретической механики и сопротивления материалов КНИТУ, serazmn@mail.ru.