ГИДРОДИНАМИКА, ТЕПЛО- И МАССООБМЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ, ЭНЕРГЕТИКА

УДК 66.048.37

С. В. Анаников, М. Ю. Сорокин

ТЕПЛООТДАЧА ОТ ЖИДКОСТИ, ПЕРЕМЕЩАЕМОЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО КОЛЬЦЕВОГО СЕЧЕНИЯ

Ключевые слова: температурное поле, теплообмен, локальный тепловой поток, цилиндрический канал в форме эллиптического кольца, краевая задача, собственные значения, собственные функции, обычное и модифицированное уравнения Матье.

Изучается температурное поле при движении жидкости в полубесконечном цилиндрическом канале эллиптического кольцевого сечения при смешанных граничных условиях. Задача решается методом разделения переменных. В результате она приводится к трем граничным задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, два из которых представляют собой обычное и модифицированное уравнения Матье. Получены решения для температурного поля в жидкости и удельного теплового потока на внутреннюю стенку канала.

Keywords: temperature field, heat exchange, local stream of heat, cylindrical canal in form of elliptical ring, boundary task, own values, own functions, ordinary and modified equations of Mathieu.

The temperature field moving liquid into half-infinite canal which has cross section in form elliptical ring at mixed boundary conditions is studied. The task is resolved by method of dividing variables. As result it is reduced at three boundary tasks for ordinary differential equations of second order. Two differential equations of three are usual and modified equations of Mathieu. Solutions obtain for temperature field into liquid and specific heat stream on the internal wall of canal.

В работе, как и в [1-9], решается задача о теплообмене при движении жидкости в каналах различной геометрической формы при различных граничных условиях.

В частности, ставится и решается задача о теплоотдаче горячей жидкости, перемещаемой в полубесконечном цилиндрическом канале, имеющем сечение в форме эллиптического кольца.

Принимается, что температура внутренней стенки, омываемой движущейся жидкостью, постоянна, а наружная стенка канала теплоизолирована, то есть решается смешанная краевая задача.

Математическая постановка задачи

Даны две осесимметричные полубесконечные цилиндрические поверхности эллиптического поперечного сечения (два осесимметричных полубесконечных эллиптических цилиндра, образующих канал эллиптической формы). Между ними в осевом направлении (ось z) перемещается греющая жидкость с постоянной средней скоростью v . Компоненты скорости вдоль других осей декартовой системы координат предполагаются равными нулю.

В начальное сечение канала подается жидкость с температурой T_G . Температура внутренней стенки эллиптического канала, обращенного к жидкости, равна T_{cm} , причем $T_{cm} \ll T_G$. Наружная эллиптическая поверхность канала теплоизолирована. Расход греющей жидкости – Q .

Требуется найти температурное поле в жидкости и локальный тепловой поток на внутреннюю стенку эллиптического канала.

Дифференциальное уравнение энергии для рассматриваемого случая, преобразованное из декартовой системы координат к координатам эллиптического цилиндра согласно [2], где решается задача для эллиптической трубы, позволяет записать следующую краевую задачу

$$v \frac{\partial T(\xi, \eta, z)}{\partial z} = a^2 \left\{ \frac{2c^{-2}}{ch2\xi - \cos 2\eta} \left[\frac{\partial^2 T(\xi, \eta, z)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T(\xi, \eta, z)}{\partial \eta^2} \right] + \frac{\partial^2 T(\xi, \eta, z)}{\partial z^2} \right\}, \quad (1)$$

$$\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z < \infty,$$

$$T(\xi_1, \eta, z) = T_{cm}, \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z < \infty, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T(\xi_2, \eta, z)}{\partial \xi} = 0, \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z < \infty, \quad (3)$$

$$T(\xi, \eta, z) = T(\xi, \eta + \pi, z), \quad \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \quad (4)$$

$$0 \leq \eta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z < \infty,$$

$$T(\xi, \eta, 0) = F(\xi, \eta), \quad \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi, \quad (5)$$

$$\frac{\partial T(\xi, \eta, \infty)}{\partial z} = 0, \quad \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi. \quad (6)$$

Здесь предполагается общий случай симметричного распределения температуры вдоль координат ξ и η на входе в канал ($z = 0$).

Если перейти к отсчету температуры от T_{cm}

$$\theta(\xi, \eta, z) = T(\xi, \eta, z) - T_{cm}, \quad (7)$$

то задача (1)-(6) примет вид

$$v \frac{\partial \theta(\xi, \eta, z)}{\partial z} = a^2 \left\{ \frac{2c^{-2}}{ch2\xi - \cos 2\eta} \left[\frac{\partial^2 \theta(\xi, \eta, z)}{\partial \xi^2} + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 \theta(\xi, \eta, z)}{\partial \eta^2} \right] + \left. \frac{\partial^2 \theta(\xi, \eta, z)}{\partial z^2} \right\}, \quad (8)$$

$$\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z < \infty,$$

$$\theta(\xi_1, \eta, z) = 0, \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z < \infty, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \theta(\xi_2, \eta, z)}{\partial \xi} = 0, \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z < \infty, \quad (10)$$

$$\theta(\xi, \eta, z) = \theta(\xi, \eta + \pi, z), \quad \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \quad (11)$$

$$0 \leq \eta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z < \infty,$$

$$\theta(\xi, \eta, 0) = F(\xi, \eta) - T_{cm} = F_1(\xi, \eta), \quad (12)$$

$$\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi,$$

$$\frac{\partial \theta(\xi, \eta, \infty)}{\partial z} = 0, \quad \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi. \quad (13)$$

Задача(8)-(13) решается методом разделения переменных.

Если положить

$$\theta(\xi, \eta, z) = f(\xi, \eta)Z(z), \quad (14)$$

то вместо (8) можно получить

$$\frac{\nu}{a^2} \frac{Z'(z)}{Z(z)} - \frac{Z''(z)}{Z(z)} = \frac{2c^{-2}}{ch2\xi - \cos 2\eta} \left[\frac{\partial^2 f(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \right] \frac{1}{f(\xi, \eta)} = -\nu^2 (\nu > 0),$$

где $k = \nu^2 c^2 / 4$, ν - константа разделения.

Откуда

$$Z''(z) - \frac{\nu}{a^2} Z'(z) - \nu^2 Z(z) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + 2k(ch2\xi - \cos 2\eta) \times f(\xi, \eta) = 0. \quad (15)$$

Последующее разделение переменных в (15) с помощью функции

$$f(\xi, \eta) = \psi(\xi)\phi(\eta), \quad (16)$$

где $\psi(\xi)$ - функция одного ξ , а $\phi(\eta)$ - функция одного η , позволяет получить

$$\frac{1}{\psi(\xi)} \frac{d^2 \psi(\xi)}{d\xi^2} + 2kch2\xi = -\frac{1}{\phi(\eta)} \frac{d^2 \phi(\eta)}{d\eta^2} + 2k \cos 2\eta = h.$$

Так как левая часть этого уравнения не зависит от η , а правая часть - от ξ , то каждая часть равна одной и той же постоянной величине h .

Следовательно, имеют место два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\frac{d^2 \phi}{d\eta^2} + (h - 2k \cos 2\eta)\phi = 0,$$

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} - (h - 2kch2\xi)\psi = 0,$$

где h - постоянная разделения.

Два последних уравнения представляют собой каноническую форму обычного и модифицированного уравнений Маттье. Как известно, каждое из

этих уравнений, в случае замены $\xi = \pm i\eta$ и $\eta = \pm i\xi$ (i - мнимая единица) переводит одно уравнение в другое.

Таким образом можно записать три задачи

$$Z''(z) - \frac{\nu}{a^2} Z'(z) - \nu^2 Z(z) = 0, \quad (17)$$

$$\frac{dZ(\infty)}{dZ} = 0. \quad (18)$$

$$\phi''(\eta) + (h - 2k \cos 2\eta)\phi(\eta) = 0, \quad (19)$$

$$\phi(\eta) = \phi(\eta + \pi). \quad (20)$$

$$\psi''(\xi) - (h - 2kch2\xi)\psi(\xi) = 0, \quad (21)$$

$$\psi(\xi_1) = 0, \quad (22)$$

$$\frac{d\psi(\xi_2)}{d\xi} = 0. \quad (23)$$

Решение задачи (17), (18) имеет вид

$$Z(z) = C \exp \left[-\frac{\sqrt{\nu^2 + 4a^4\nu^2} - \nu}{2a^2} z \right]. \quad (24)$$

где C - произвольная постоянная.

Решается задача (19), (20).

Функция $\phi(\eta)$ должна быть однозначной и периодической относительно координаты η . Поскольку рассматривается случай, когда распределение температуры симметрично относительно обеих осей эллипса, то функция $\phi(\eta)$ должна быть четной и иметь период π относительно η . Несимметричное распределение температуры относительно той или иной оси эллипса должно быть рассмотрено отдельно.

Задача (19), (20), с учетом вышеизложенного, приводит к выбору функции

$$\phi(\eta) = ce_{2n}(\eta, k). \quad (25)$$

Решением (21)-(23) будет

$$\psi(\xi) = C_{2n}Ce_{2n}(\xi, k) + F_{2n}Fey_{2n}(\xi, k), \quad (26)$$

$$C_{2n}Ce_{2n}(\xi_1, k) + F_{2n}Fey_{2n}(\xi_1, k) = 0, \quad (27)$$

$$C_{2n}Ce'_{2n}(\xi_2, k) + F_{2n}Fey'_{2n}(\xi_2, k) = 0. \quad (28)$$

Характеристическое уравнение для определения собственных значений k из соотношений (27), (28) может быть получено из условия

$$\begin{vmatrix} Ce_{2n}(\xi_1, k) & Fey_{2n}(\xi_1, k) \\ Ce'_{2n}(\xi_2, k) & Fey'_{2n}(\xi_2, k) \end{vmatrix} = 0. \quad (29)$$

Условие (29) позволяет получить нетривиальное (ненулевое) решение системы уравнений (27), (28) относительно искомым коэффициентов C_{2n}, F_{2n} .

Таким образом, решением уравнения (15) должна быть, согласно (16), (25), (26) функция $f(\xi, \eta) = [C_{2n}Ce_{2n}(\xi, k) + F_{2n}Fey_{2n}(\xi, k)] \times ce_{2n}(\eta, k)$.

Тогда на основании (14), (24), (30) будет $\theta(\xi, \eta, z) = f(\xi, \eta)Z(z) = f(\xi, \eta)C \times$

$$\exp \left[-\frac{\sqrt{\nu^2 + 4a^4\nu^2} - \nu}{2a^2} z \right] = \sum_{n=0}^{\infty} [C_{2n}Ce_{2n}(\xi, k) +$$

$$+ F_{2n} Fey_{2n}(\xi, k)] ce_{2n}(\eta, k) \times \exp \left[-\frac{\sqrt{v^2 + 4a^4 v^2} - v}{2a^2} z \right]. \quad (30a)$$

Здесь произвольная постоянная C , как мало-значимая, может быть принята равной единице. В итоге на основании соотношений (14), (24), (29), (30) получено

$$\theta(\xi, \eta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [C_{2n} Ce_{2n}(\xi, k_{2n,m}) + F_{2n} Fey_{2n}(\xi, k_{2n,m})] ce_{2n}(\eta, k_{2n,m}) \times \exp \left[-\frac{\sqrt{v^2 + 4a^4 v^2} - v}{2a^2} z \right]. \quad (31)$$

Характеристическое уравнение для определения собственных значений $k_{2n,m}$ можно записать на основе (29)

$$Ce_{2n}(\xi_1, k_{2n,m}) Fey'_{2n}(\xi_2, k_{2n,m}) - Ce'_{2n}(\xi_2, k_{2n,m}) \times Fey_{2n}(\xi_1, k_{2n,m}) = 0, \quad (32)$$

Подстановкой F_{2n} из (27) в соотношение (31) можно получить

$$\theta(\xi, \eta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{2n} [Ce_{2n}(\xi, k_{2n,m}) \times Fey_{2n}(\xi_1, k_{2n,m}) - Ce_{2n}(\xi_1, k_{2n,m}) \times Fey_{2n}(\xi, k_{2n,m})] \times ce_{2n,m}(\eta, k_{2n,m}) \times \exp \left[-\frac{\sqrt{v^2 + 4a^4 v_{2n,m}^2} - v}{2a^2} z \right], \quad (33)$$

где $A_{2n} = C_{2n} / Fey_{2n}(\xi_1, k_{2n,m})$, $v_{2n,m}^2 = 4k_{2n,m} / c^2$.

Если ввести обозначения

$$V_{2n}(\xi, k_{2n,m}) = Fey_{2n}(\xi_1, k_{2n,m}) Ce_{2n}(\xi, k_{2n,m}) - Ce_{2n}(\xi_1, k_{2n,m}) Fey_{2n}(\xi, k_{2n,m}), \quad (34)$$

то можно (33) записать в виде

$$\theta(\xi, \eta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{2n} V_{2n}(\xi, k_{2n,m}) ce_{2n}(\eta, k_{2n,m}) \times \exp \left[-\frac{\sqrt{v^2 + 4a^4 v_{2n,m}^2} - v}{2a^2} z \right]. \quad (35)$$

Очевидно, что вновь введенные коэффициенты A_{2n} в разложениях (33), (35) должны быть определены из граничных условий.

Наконец, условие (12) дает возможность от (35) перейти к выражению

$$F_1(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{2n} V_{2n}(\xi, k_{2n,m}) \times ce_{2n}(\eta, k_{2n,m}). \quad (36)$$

Другими словами, необходимо разложить функцию $F_1(\xi, \eta)$ по произведениям обычных и модифицированных функций Матье.

Для этого следует доказать теорему об ортогональности функций Матье для кольцевого эллиптического сечения в интервале изменения переменной ξ от ξ_1 до ξ_2 . Для доказательства используется подход, примененный в [10].

Предварительно необходимо отметить, что, поскольку функции $\psi(\xi) = Ce_{2n}(\xi, k_{2n,m})$ и $\psi(\xi) = Fey_{2n}(\xi, k_{2n,m})$ удовлетворяют одному и тому же уравнению (21), то и функция $V_{2n}(\xi, k_{2n,m})$ удовлетворяет этому же уравнению.

Пусть $k_{2n,m}$ таково, что при n целом положительном и при $\xi = \xi_1, \xi = \xi_2$ удовлетворяются условия (22), (23), то есть

$$\psi_{2n}(\xi_1, k_{2n,m}) = 0,$$

$$\psi'_{2n}(\xi_2, k_{2n,m}) = 0,$$

где ψ_{2n} - решение уравнения (21).

Тогда, если h и k - действительные числа (как в нашем случае), то точка $(h_{2n,m}, k_{2n,m})$ лежит на характеристической кривой для функции $\phi_{2n}(\eta, k)$, являющейся решением целого порядка уравнения (19) [10], вследствие известной взаимосвязи обычных и модифицированных уравнений Матье. Тогда можно записать

$$\frac{d^2 \phi_{2n}}{d\eta^2} + (h_{2n,m} - 2k_{2n,m} \cos 2\eta) \phi_{2n} = 0,$$

$$\frac{d^2 \psi_{2n}}{d\xi^2} - (h_{2n,m} - 2k_{2n,m} ch 2\xi) \psi_{2n} = 0.$$

Если положить $\zeta_{2n,m} = \psi_{2n} \phi_{2n}$, то для точки $(h_{2n,m}, k_{2n,m})$ (здесь дополнительный индекс у функций Матье введен временно для доказательства теоремы об ортогональности и в дальнейшем будет опущен) можно получить

$$\frac{\partial^2 \zeta_{2n,m}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \zeta_{2n,m}}{\partial \eta^2} + 2k_{2n,m} (ch 2\xi - \cos 2\eta) \times \zeta_{2n,m} = 0. \quad (37)$$

Также для точки $(h_{2p,r}, k_{2p,r})$

$$\frac{\partial^2 \zeta_{2p,r}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \zeta_{2p,r}}{\partial \eta^2} + 2k_{2n,m} (ch 2\xi - \cos 2\eta) \times \zeta_{2p,r} = 0. \quad (38)$$

Умножением уравнений (37) на $\zeta_{2p,r}$ и (38)

на $\zeta_{2n,m}$ с последующим вычитанием второго уравнения из первого, после преобразований, получено

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[\zeta_{2p,r} \frac{\partial \zeta_{2n,m}}{\partial \xi} - \zeta_{2n,m} \frac{\partial \zeta_{2p,r}}{\partial \xi} \right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\zeta_{2p,r} \frac{\partial \zeta_{2n,m}}{\partial \eta} - \zeta_{2n,m} \frac{\partial \zeta_{2p,r}}{\partial \eta} \right] + 2(k_{2n,m} - k_{2p,r})(ch2\xi - \cos 2\eta) \zeta_{2n,m} \zeta_{2p,r} = 0. \quad (39)$$

Интегрирование выражения (39) по ξ от ξ_1 до ξ_2 и по η от 0 до 2π дает

$$\int_0^{2\pi} \left[\zeta_{2p,r} \frac{\partial \zeta_{2n,m}}{\partial \xi} - \zeta_{2n,m} \frac{\partial \zeta_{2p,r}}{\partial \xi} \right]_{\xi_1}^{\xi_2} d\eta + \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left[\zeta_{2p,r} \frac{\partial \zeta_{2n,m}}{\partial \eta} - \zeta_{2n,m} \frac{\partial \zeta_{2p,r}}{\partial \eta} \right]_0^{2\pi} d\xi + 2(k_{2n,m} - k_{2p,r}) \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_0^{2\pi} (ch2\xi - \cos 2\eta) \times \zeta_{2n,m} \zeta_{2p,r} d\xi d\eta = 0. \quad (40)$$

Так как $\psi_{2n} = V_{2n,m}(\xi, k_{2n,m})$, а $\phi_{2n} = ce_{2n,m}(\eta, k_{2n,m})$, то в первом интеграле подинтегральная функция обращается в ноль при $\xi = \xi_1$ на основании соотношения (34), а при $\xi = \xi_2$ на основании характеристического уравнения (32). Поскольку производная от ψ_{2n} , а следовательно, и от $V_{2n,m}(\xi, k_{2n,m})$ по ξ в точности равна левой части характеристического уравнения, взятой с обратным знаком (здесь знак не имеет практического значения, так как данное выражение равно нулю).

Подинтегральная функция второго интеграла в (40) обращается в ноль ввиду ее периодичности относительно η . Отсюда следует, что последний интеграл в этом равенстве обращается в ноль при $p \neq n$, т.е.

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_0^{2\pi} (ch2\xi - \cos 2\eta) \zeta_{2n,m} \zeta_{2p,r} d\xi d\eta = 0. \quad (41)$$

Это верно и при $p = n$, если $r \neq m$. При $p = n$, $r = m$ рассматриваемый двойной интеграл в этом равенстве не обращается в ноль. Тогда можно записать

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_0^{2\pi} V_{2n,m}^2(\xi) ce_{2n,m}^2(\eta) (ch2\xi - \cos 2\eta) \times d\xi d\eta \neq 0. \quad (42)$$

Теперь вычисляются коэффициенты A_{2n} в выражении (36), для чего умножаются обе части данного соотношения на $V_{2pr}(\xi, k_{2p,r}) ce_{2p,r}(\eta, k_{2p,r})(ch2\xi - \cos 2\eta)$ и интегрируются по η от 0 до 2π и по ξ от ξ_1 до ξ_2 .

Тогда все члены ряда, содержащегося в первой части, обратятся в ноль, кроме члена, для которого $p = n$, $r = m$.

Итак

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_0^{2\pi} F_1(\xi, \eta) V_{2n,m}(\xi, k_{2n,m}) ce_{2n,m}(\eta, k_{2n,m}) \times (ch2\xi - \cos 2\eta) d\xi d\eta = A_{2n} \times$$

$$\times \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_0^{2\pi} V_{2n,m}^2(\xi, k_{2n,m}) ce_{2n,m}^2(\eta, k_{2n,m}) \times (ch2\xi - \cos 2\eta) d\xi d\eta.$$

Откуда

$$A_{2n} = \frac{\int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_0^{2\pi} F_1(\xi, \eta) V_{2n,m}(\xi, k_{2n,m}) \times \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_0^{2\pi} V_{2n,m}^2(\xi, k_{2n,m}) \times ce_{2n,m}(\eta, k_{2n,m})(ch2\xi - \cos 2\eta) d\xi d\eta}{\int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_0^{2\pi} V_{2n,m}^2(\xi, k_{2n,m}) \times ce_{2n,m}^2(\eta, k_{2n,m})(ch2\xi - \cos 2\eta) d\xi d\eta}. \quad (43)$$

Тогда согласно (35), (43) будет

$$\theta(\xi, \eta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_0^{2\pi} F_1(\xi, \eta) V_{2n,m}(\xi, k_{2n,m}) \times ce_{2n,m}(\eta, k_{2n,m})(ch2\xi - \cos 2\eta) d\xi d\eta}{\int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_0^{2\pi} V_{2n,m}^2(\xi, k_{2n,m}) \times ce_{2n,m}^2(\eta, k_{2n,m})(ch2\xi - \cos 2\eta) d\xi d\eta} \times V_{2n,m}(\xi, k_{2n,m}) ce_{2n,m}(\eta, k_{2n,m}) \times \exp \left[-\frac{\sqrt{v^2 + 4a^4 v_{2n,m}^2} - v}{2a^2} z \right].$$

Или после исключения дополнительно индекса у функций Матье согласно (7), получится

$$T(\xi, \eta, z) = T_{cm} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_0^{2\pi} F_1(\xi, \eta) V_{2n}(\xi, k_{2n,m}) \times ce_{2n}(\eta, k_{2n,m})(ch2\xi - \cos 2\eta) d\xi d\eta}{\int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_0^{2\pi} V_{2n}^2(\xi, k_{2n,m}) \times ce_{2n}^2(\eta, k_{2n,m})(ch2\xi - \cos 2\eta) d\xi d\eta} \times V_{2n}(\xi, k_{2n,m}) ce_{2n}(\eta, k_{2n,m}) \times \exp \left[-\frac{\sqrt{v^2 + 4a^4 v_{2n,m}^2} - v}{2a^2} z \right], \quad (44)$$

где

$$V_{2n}(\xi, k_{2n,m}) = ce_{2n}(\eta, k_{2n,m}) Fe_{2n}(\xi_1, k_{2n,m}) - Ce_{2n}(\xi_1, k_{2n,m}) Fe_{2n}(\xi, k_{2n,m});$$

$$v_{2n,m}^2 = 4k_{2n,m} / c^2.$$

Удельный тепловой поток на внутреннюю стенку канала

$$q = \frac{\lambda_{жс}}{c \sqrt{ch^2 \xi_1 - \cos^2 \eta}} \frac{\partial T(\xi, \eta, z)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_1}.$$

Это выражение вытекает из рассмотрения в эллиптических координатах дифференциалов дуг эллипса и

гиперболы с учетом того, что дифференцирование выполняется по нормали к эллипсу. Или

$$q = \frac{\lambda_{ж}}{c\sqrt{ch^2\xi_1 - \cos^2\eta}} \times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_0^{2\pi} F_1(\xi, \eta) V_{2n}(\xi, k_{2n,m}) \times \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_0^{2\pi} V_{2n}^2(\xi, k_{2n,m}) \times ce_{2n}(\eta, k_{2n,m}) (ch2\xi - \cos 2\eta) d\xi d\eta}{\int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_0^{2\pi} V_{2n}^2(\xi, k_{2n,m}) \times ce_{2n}^2(\eta, k_{2n,m}) (ch2\xi - \cos 2\eta) d\xi d\eta} \times V'_{2n}(\xi, k_{2n,m}) \Big|_{\xi=\xi_1}^{ce_{2n}(\eta, k_{2n,m})} \times \exp \left[-\frac{\sqrt{v^2 + 4a^4 v_{2n,m}^2} - v}{2a^2} z \right]. \quad (45)$$

Если условие (5) упростить и принять, что $T(\xi, \eta, 0) = T_{\Gamma}$, где T_{Γ} - температура горячей жидкости в начальном сечении эллиптического цилиндра, то решения упрощаются

$$T(\xi, \eta, z) = T_{cm} + (T_{\Gamma} - T_{cm}) \times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\int_{\xi_1}^{\xi_2} V_{2n}(\xi, k_{2n,m}) \times \int_{\xi_1}^{\xi_2} V_{2n}^2(\xi, k_{2n,m}) \times \left(2A_0^{(2n)} ch2\xi - A_2^{(2n)} \right) d\xi}{\int_{\xi_1}^{\xi_2} V_{2n}^2(\xi, k_{2n,m}) \times (ch2\xi - Q_{2n}) d\xi} \times V_{2n}(\xi, k_{2n,m}) ce_{2n}(\eta, k_{2n,m}) \times \exp \left[-\frac{\sqrt{v^2 + 4a^4 v_{2n,m}^2} - v}{2a^2} z \right]; \quad (46)$$

$$q = \frac{\lambda_{ж}(T_{\Gamma} - T_{cm})}{c\sqrt{ch^2\xi_1 - \cos^2\eta}} \times \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\int_{\xi_1}^{\xi_2} V_{2n}(\xi, k_{2n,m}) \times \int_{\xi_1}^{\xi_2} V_{2n}^2(\xi, k_{2n,m}) \times \left(2A_0^{(2n)} ch2\xi - A_2^{(2n)} \right) d\xi}{\int_{\xi_1}^{\xi_2} V_{2n}^2(\xi, k_{2n,m}) \times (ch2\xi - Q_{2n}) d\xi} \times V'_{2n}(\xi, k_{2n,m}) \Big|_{\xi=\xi_1}^{ce_{2n}(\eta, k_{2n,m})} \times \exp \left[-\frac{\sqrt{v^2 + 4a^4 v_{2n,m}^2} - v}{2a^2} z \right]. \quad (47)$$

Здесь было учтено, что [10]

$$\int_0^{2\pi} ce_{2n}^2(\eta, k_{2n,m}) d\eta = \pi, \\ \int_0^{2\pi} ce_{2n}(\eta, k_{2n,m}) \cos 2\eta d\eta = \pi A_2^{(2n)}, \\ \int_0^{2\pi} ce_{2n}(\eta, k_{2n,m}) d\eta = 2\pi A_0^{(2n)}, \\ \int_0^{2\pi} ce_{2n}^2(\eta, k_{2n,m}) \cos 2\eta d\eta = \pi Q_{2n}.$$

Последний вариант записи решений удобен для вычислений, так как коэффициенты разложений $A_0^{(2n)}$, $A_2^{(2n)}$ протабулированы [11].

Обозначения

$T(\xi, \eta, z)$ - текущая температура жидкости в эллиптических координатах, К;

v - средняя постоянная скорость движения жидкости в кольцевом эллиптическом канале, м/с;

T_{Γ} - температура горячей жидкости на входе в канал при $z = 0$, К;

T_{cm} - температура внутренней стенки канала при $\xi = \xi_1$, К;

a^2 - коэффициент температуропроводности жидкости, м²/с;

c - фокусное расстояние эллипса, м;

ξ, η - эллиптические координаты (безр., рад.);

ξ_1, ξ_2 - внутренняя и внешняя границы канала, безр.;

$k_{2n,m}$ - корни характеристического уравнения (29);

$Ce_{2n}(\xi, k)$, $Ce_{2n}(\xi, k_{2n,m})$, $Ce_{2n}(\xi_1, k)$, $Ce_{2n}(\xi_1, k_{2n,m})$ - модифицированные функции Матье первого рода при h , k и $k_{2n,m}$ действительных и отличных от нуля;

$Ce'(\xi_2, k)$, $Ce'_{2n}(\xi_2, k_{2n,m})$ - производные по ξ от модифицированных функций Матье первого рода при h , k и $k_{2n,m}$ действительных и отличных от нуля;

$Fey_{2n}(\xi, k)$, $Fey_{2n}(\xi, k_{2n,m})$, $Fey_{2n}(\xi_1, k)$,

$Fey_{2n}(\xi_1, k_{2n,m})$ - модифицированные функции Матье второго рода при h , k и $k_{2n,m}$ действительных и отличных от нуля;

$Fey'_{2n}(\xi_2, k)$, $Fey'_{2n}(\xi_2, k_{2n,m})$ - производные по ξ от модифицированных функций Матье второго рода при h , k и $k_{2n,m}$ действительных и отличных от нуля;

$ce_{2n}(\eta, k_{2n,m})$, $ce_{2n,m}(\eta, k_{2n,m})$ - обычные функции Матье первого рода при h , k и $k_{2n,m}$ действительных и отличных от нуля;

A_{2n} , C_{2n} , F_{2n} - определяемые константы;

$\theta(\xi, \eta, z)$ - текущая избыточная температура жидкости в эллиптических координатах, К;

Q - объемный расход жидкости, (м³/с, м³/ч);

$\lambda_{ж}$ - теплопроводность жидкости, Вт/(м К);

q - удельный тепловой поток, Вт/ м².

Литература

1. С.В. Анаников, М.Ю. Сорокин, В.П. Бурдинов, Э.В. Чиркунов, Теоретические основы химической технологии (ТОХТ), **38**, 6, 655-660 (2004).
2. С.В. Анаников, Вестник Казанского технологического университета, **15**, 6, 42-46 (2012).
3. С.В. Анаников, Вестник Казанского технологического университета, **15**, 6, 147-150 (2012).
4. С.В. Анаников, Вестник Казанского технологического университета, **15**, 11, 143-145 (2012).
5. С.В. Анаников, Вестник Казанского технологического университета, **15**, 14, 90-93 (2012).
6. С.В. Анаников, М.Ю. Сорокин, Вестник Казанского технологического университета, **15**, 18, 58-63 (2012).
7. С.В. Анаников, Вестник Казанского технологического университета, **15**, 20, 56-61 (2012).
8. С.В. Анаников, Вестник Казанского технологического университета, **16**, 2, 52-55 (2013).
9. С.В. Анаников, Вестник Казанского технологического университета, **16**, 3, 58-62 (2013).
10. Мак-Лахлан Н.В., Теория и приложения функций Маттье. Иностранная литература. Москва. 1953. 476с.
11. Стретт М.Д.О. Функции Ляме, Маттье и родственные им в физике и технике. ГНТИ Украины, Харьков-Киев. 1935. 238с.

© С. В. Анаников – д-р техн. наук, проф. каф. химической кибернетики КНИТУ, ananikovsv@rambler.ru; М. Ю. Сорокин – соискатель той же кафедры, sorokinmu@rambler.ru.