УДК 539.3:517.972

Н. Н. Рено, А. К. Сафиуллина

ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ПРОЦЕССА «ДЕФОРМАЦИЯ-НАПРЯЖЕНИЕ»

Ключевые слова: минимизация энергозатрат, математическая модель, функционал Лагранжа, вариация перемещений, кинематическая граница, стационарность функционала.

Если граничные условия для аргумента функционала Лагранжа отсутствуют, то возможность для достижения минимума энергетических затрат обеспечивается равновесностью моделируемого процесса. При этом стационарные функции функционала Лагранжа различаются на неопределенную произвольную константу, а его стационарная величина не зависит от этой константы.

Keywords: minimization of energy consumption, mathematical model, functional of Lagrang, variation of movings, kinematic border, functional extremum.

If boundary conditions for argument of a functional of Lagranzha are absent, possibility for achievement of a minimum of power expenses is provided with balance of modelled process. Thus stationary functions of a functional of Lagrang differ on uncertain any constant, and its stationary size doesn't depend on this constant.

Статья продолжает тему статей [1-6, 10] по реализации идеи о построении математической модели процесса ресурсосбережения с позиции минимизации энергетических затрат моделируемого процесса природы. В качестве демонстрационного объекта моделирования выбран достаточно хорошо изученный природный процесс «деформация-напряжение».

Среди представленных в работах [2, 10] разновидностей функционала Лагранжа, пригодных для моделирования процесса ресурсосбережения с позиции минимизации энергозатрат, функционал Лагранжа в достаточно гладких перемещениях $\Lambda[u]$ (формула (5а) статьи [2]) не требует задания граничных условий для своих аргументов. Такая нетребовательность означает, что граничные условия в соответствующей вариационной задаче могут не задаваться, т.е. объект, в котором происходит моделируемый процесс, может быть не закреплен в окружающем пространстве. Таким объектом может являться, например, любой летательный аппарат или космическое тело, совершающее свободное равномерное движение

В этой статье рассмотрим процедуру постановки *краевой задачи* для поиска компонент моделируемого процесса с позиции функционала Лагранжа в достаточно гладких перемещениях $\Lambda[u]$ (формула (5а) [2]):

$$\Lambda[u] \equiv \iiint W_\varepsilon(\hat{\varepsilon}^u)dV - \left(\iiint \rho g_i u_i dV + \iint u_i p dS_p\right). \quad (1)$$

Формируемая краевая задача является следствием свободной вариационной задачи по поиску таких аргументов рассматриваемого функционала (1), на которых этот функционал достигает стационарности, т.е. бесконечно малые возмущения таких функций не вызывают изменения функционала по крайней мере в первом порядке малости (определение см., например, http://ru.wikipedia.org/wiki/). Такие функции называют стационарными функциями, см., например, [4]. В частном случае на собственных стационарных функциях функционал может достигать экстремума, например, минимума.

В монографии [7] функционал (1) идентифицирован как функционал энергии; показано, что необходимым условием существования минимума этого функционала при отсутствии кинематических ограничений для его аргументов является самоуравновешенность внешней активной нагрузки.

В соответствии с правилами вариационного исчисления для поиска стационарных функций функционала (1) его первую вариацию $\delta\Lambda[u]$ по всем его аргументам следует приравнять нулю; в результате получается вариационное уравнение:

$$\delta\Lambda[u] = 0. \quad (2)$$

Поставим свободную вариационную задачу по поиску *безусловной стационарности* функционала (1), не накладывая тем самым никаких условий и требований на его аргументы.

Как известно, **при постановке свободной вариационной задачи** граничные условия могут быть заданы, а могут отсутствовать (см., например, [8], [9]).

В этой статье рассматривается ситуацию, когда граничные условия не заданы.

Наглядность выполняемых ниже построений и точность аналитического решения, не умаляя общности, обеспечим, рассматривая одномерную модель. Функционал (1) в этом случае упростится к виду:

$$\Lambda[u] \equiv \int_0^L \left(W_\varepsilon(\hat{\varepsilon}) - u(x) g\rho\right) F dx - $$

$$- \left. u(x) \right|_{x=L} P_s + \left. u(x) \right|_{x=0} P_0 , \quad (3а)$$

$$W_\varepsilon(\hat{\varepsilon}) \equiv \frac{E}{2}\left(\hat{\varepsilon}\right)^2; \; \frac{\partial W_\varepsilon}{\partial \hat{\varepsilon}} \equiv E\hat{\varepsilon}, \text{ где } \hat{\varepsilon} \equiv \frac{du(x)}{dx}, \quad (3б)$$

здесь g, ρ, P_0 и P_S, - известные величины.

Соответствующее функционалу (3а) вариационное уравнение $\delta\Lambda[u] = 0$ интегрированием по частям приведем к виду:

$$\delta\Lambda[u] \equiv \left. \left(E\left(\frac{du(x)}{dx}\right)F - P_S\right)\delta u \right|_{x=L} - $$

$$- \left. \left(E\left(\frac{du(x)}{dx}\right)F - P_0\right)\delta u \right|_{x=0} -$$

$$-\int_0^L \delta u \left(\frac{d}{dx} \left(E\left(\frac{du(x)}{dx}\right) F \right) + g\rho F \right) dx = 0\,; \qquad (4)$$

отсюда вытекают естественные условия стационарности функционала (3а) в виде уравнения равновесия и статических граничных условий в перемещениях:

$$\frac{d}{dx}\left(E\left(\frac{du(x)}{dx}\right) F \right) + g\rho F = 0,\ \ 0 \le x \le L\,; \qquad (5а)$$

$$E\left(\frac{du(x)}{dx}\right) F - P_0 = 0,\ \ x = 0\,; \qquad (5б)$$

$$E\left(\frac{du(x)}{dx}\right) F - P_S = 0,\ \ x = L\,. \qquad (5в)$$

Интегрируя уравнение (5а), используя статические граничные условия (5б,в), получим уравнение, требующее равенства нулю главного вектора внешних активных нагрузок P_{out}:

$$P_{out} \equiv g\rho FL + P_s - P_0 = 0, \qquad (6)$$

Равенство (6) указывает на то, что входящие в состав функционала (3а) внешние нагрузки, вызвавшие моделируемый процесс «деформация-напряжение» в незакрепленном в пространстве стержне, должны быть самоуравновешены (В [7], стр. 76 равенство (13) трактуется как обеспечивающее функционалу (8) ограничение снизу).

Кроме условия (6), из краевой задачи (5а,б,в) получим различающееся на произвольную неизвестную константу $C \neq 0$ *семейство* стационарных функций $v^0(x)$ функционала (3а):

$$v^0(x) = C + u_0(x)\,, \qquad (7а)$$

где обозначено:

$$u_0(x) \equiv x\frac{P_s}{EF} + \frac{g\rho L}{E} x \left(1 - \frac{x}{2L} \right) \qquad (7а)$$

здесь $u_0(x)$ – *опорная стационарная функция* функционала (3а), соответствует величине $C \equiv 0$.

Величина стационарного значения функционала $stv\Lambda(v^0)$ вычисляется по формуле, которую получим, подставляя решение (7) в соответствующий функционал (3а):

$$stv\Lambda(v^0) \equiv stv\Lambda(u_0) =$$

$$\equiv -L\left(3P_S^2 + 3Fg\rho LP_S + (Fg\rho L)^2\right)/(6EF)\,, \qquad (8)$$

здесь учтено тождество (6) и тождество: $dC/dx \equiv 0$.

Формула (8) показывает, что *стационарная величина функционала* (3а) *инвариантна относительно изменения на константу опорной стационарной функции функционала* (3а).

Итак, *если граничные условия для аргументов функционала Лагранжа не заданы*, то

– процесс «деформация-напряжение» вызван самоуравновешенными внешними нагрузками;

– стационарные функции (7а) функционала Лагранжа образуют множество функций, различающихся на некоторую произвольную константу;

– стационарная величина (8) *функционала* (3а) *достигается на опорной* стационарной функции (7а) *и **не зависит** от* произвольной константы в составе семейства стационарных функций функционала (3а).

Литература

1. Р.Р. Губаев, М.К. Гималеев, А.К. Сафиуллина. Вестник Каз. технол. ун-та, 11, 65-68, (2012).
2. Р.Р. Губаев, М.К. Гималеев, А.К. Сафиуллина. Вестник Каз. технол. ун-та, 12, 107-110, (2012).
3. Р.Р. Губаев, М.К. Гималеев, А.К. Сафиуллина. Вестник Каз. технол. ун-та, 12, 111-114, (2012).
4. Н.Н.Рено, А.К.Сафиуллина. Вестник Каз. технол. ун-та, 22, 151-154, (2012).
5. Н.Н.Рено, А.К.Сафиуллина**.** Вестник Каз. технол. ун-та, 22, 144-146, (2012).
6. Р.Р. Губаев, С.В. Анаников, М.К. Гималеев. *Технология вариационного моделирования на примере минимизации энергетических затрат изотермического процесса «деформация-напряжение»*. Изд-во Казан. гос. технол. ун-та, Казань, 2009, 300с.
7. Бердичевский В.Л. *Вариационные принципы механики сплошной среды*. Наука. Главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1983. 448с.
8. Р. Курант, Д. Гильберт. *Методы математической физики*: пер. с нем.в 2 т. Т.1. Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1933. 525с.
9. Н.П. Абовский, Н.П. Андреев, А.П. Деруга. *Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек*. Наука, Москва, 1978. 287с.
10. Р.Р. Губаев. *Технология вариационных моделей на примере минимизации энергетических затрат изотермического процесса*

© **Н. Н. Рено** – канд. техн. наук, доцент каф. химической кибернетики КНИТУ, irinareno@mail.ru; **А. К. Сафиуллина** – канд. техн. наук, доцент той же кафедры