*УДК 539.3*

**Р. М. Тимербаев, Ф. С. Хайруллин, Р. Г. Хакимов**

# ЗАДАЧА О ДЕФОРМИРОВАНИИ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ С ОТВЕРСТИЕМ

*Ключевые слова: пластина, плита, трехмерная задача, перемещение, напряжения, вариационный принцип Лагранжа, уравнения Бесселя, модифицированные функции Бесселя, кольцевое напряжение, соотношения упругости.*

*Приводится решение задачи о концентрации напряжений у края отверстия в круглой пластине в рамках задачи «А» (терминология А.И. Лурье [1]). Трехмерная задача о равновесии круглой пластины сводится к двумерной задаче с помощью принципа возможных перемещений Лагранжа. Приведены так же результаты расчетов безразмерного напряжения у края отверстия при действии сжимающей, плавной, быстро убывающей поверхностной нагрузки.*

*Keywords: plate, a plate, a three-dimensional challenge, movement, tension, the Lagrangian variational principle, Bessel equations, modified Bessel function, annular tension, elasticity ratio.*

*Is the stress concentration at the edge of the hole in a circular plate within the task "a" (terminology A.I. Lurie [1]). The three-dimensional problem of equilibrium of circular plates consist of two-dimensional using Lagrangian principle possible movements. See also the results of the calculations the dimensionless stress at the edge of the holes under the action of compressive, smooth, fast diminishing surface load.*

## Введение

Рассматривается круглая пластина средней толщины со сквозным отверстием [2]. Решается задача о концентрации напряжения у края отверстия при наличии сжимающей поверхностной нагрузки.

В статье используются следующие обозначения: $u,\ u_0,\ u_1$ – радиальное перемещение и его составляющие; $w$ – прогиб; $\bar{z} = z/h$, где толщина пластины – $2h$; $r_0$ – радиус отверстия.

## Решение

Решение трехмерной задачи о равновесии круглой плиты будем искать, задаваясь компонентами перемещений в виде [3].

$$u = u_0 + \bar{z}\,u_1, \quad w = \bar{z}\,w_1 . \tag{1}$$

Согласно принципу возможных перемещений имеем (массовые силы отсутствуют, действует только поперечная нагрузка)

$$\iint\limits_{\Omega} Z_n \delta w d\Omega - \delta U = 0, \tag{2}$$

где

$$\delta U = \iiint\limits_{(V)} \begin{pmatrix} \sigma_r \delta e_r + \sigma_\varphi \delta e_\varphi + \\ + \sigma_z \delta e_z + \sigma_{rz} \delta e_{rz} \end{pmatrix} \cdot r \cdot dr d\varphi dz \cdot \tag{3}$$

В (3) напряжения выражаются через перемещения по соотношениям упругости

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (\lambda + 2\mu) e_r + \lambda (e_\varphi + e_z), \\ \sigma_\varphi &= (\lambda + 2\mu) e_\varphi + \lambda (e_z + e_r), \\ \sigma_z &= (\lambda + 2\mu) e_z + \lambda (e_r + e_\varphi), \\ \sigma_{rz} &= \mu e_{rz} . \end{aligned} \tag{4}$$

а деформации выражены по соотношениям Коши

$$e_r = \frac{\partial u}{\partial r},\ e_\varphi = \frac{u}{r},\ e_z = \frac{\partial u}{\partial z},\ e_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} . \tag{5}$$

При сведении трехмерной задачи к двумерной, рассмотрим вначале выражение для $\delta U$, принимая во внимание (1) – (5)

$$\delta U = h \iint\limits_{\Omega} \left\{ \int_{-1}^{1} \left[ \begin{matrix} \sigma_r \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\delta u_0 + \bar{z}^2 \delta u_1\right) + \\ + \dfrac{\sigma_\varphi}{r}\left(\delta u_0 + \bar{z}^2 \delta u_1\right) + \\ + \dfrac{\sigma_z}{h} \delta w_1 + \\ \sigma_{rz}\left(\dfrac{2\bar{z}}{h} \delta u_1 + \bar{z} \dfrac{\partial}{\partial r} \delta w_1\right) \end{matrix} \right] d\bar{z} \right\} r dr d\varphi . \tag{6}$$

Используя формулу Остроградского – Грина, получим

$$\delta U = -\iint\limits_{\Omega} \left[ \begin{matrix} \left( \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r N_{11}^{(0)}\right) - N_{22}^{(0)} \right) \delta u_0 + \\ + \left( \begin{matrix} \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r N_{11}^{(2)}\right) - N_{22}^{(2)} - \\ \dfrac{2r}{h} N_{13}^{(1)} \end{matrix} \right) \delta u_1 + \\ + \left( \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r N_{13}^{(1)}\right) - \dfrac{r}{h} N_{33}^{(0)} \right) \delta w_1 \end{matrix} \right] dr d\varphi + \tag{7}$$

$$+ 2\pi \cdot \int_{r_0}^{R} \left( N_{11}^{(0)} \delta u_0 + N_{11}^{(2)} \delta u_1 + N_{13}^{(1)} \delta w_1 \right) \cdot r dr = 0.$$

Здесь

$$N_{11}^{(0)} = h \int_{-1}^{1} \sigma_r d\bar{z},\quad N_{22}^{(0)} = h \int_{-1}^{1} \sigma_\varphi d\bar{z},$$

$$N_{11}^{(2)} = h \int_{-1}^{1} \bar{z}^2 \sigma_r d\bar{z},\quad N_{22}^{(2)} = h \int_{-1}^{1} \bar{z}^2 \sigma_\varphi d\bar{z},$$

$$N_{13}^{(1)} = h \int_{-1}^{1} \bar{z} \sigma_{rz} d\bar{z},\quad N_{33}^{(0)} = h \int_{-1}^{1} \sigma_z d\bar{z},$$

Входящий в (2)поверхностный интеграл

$$\begin{aligned} &\iint\limits_{\Omega} Z_n \cdot \delta w d\Omega = \\ &= \iint\limits_{\Omega} Z_n \cdot \left(\bar{z} \delta w_1\right)_{-h}^{h} \cdot r dr d\varphi = \\ &= h * \iint\limits_{\Omega} S_z \delta w_1 r dr d\varphi, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$S_z = Z_n^+ + Z_n^- .$$

Если на поверхностях $z = \pm h$ действует сжимающая симметричная относительно срединной плоскости нагрузка $q/z$, то $S_z = -q$.

Объединяя в (2) соответствующие интегралы и учитывая (7), (8), получим уравнения равновесия

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial r}\left(rN_{11}^{(0)}\right) - N_{22}^{(0)} = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial r}\left(rN_{11}^{(2)}\right) - \frac{2r}{h}N_{13}^{(1)} - N_{22}^{(2)} = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial r}\left(rN_{13}^{(1)}\right) - \frac{r}{h}N_{33}^{(0)} = q.
\end{aligned} \tag{9}$$

и граничные условия на краю кругового отверстия

$$N_{11}^{(0)} = 0,\ N_{11}^{(2)} = 0,\ N_{13}^{(1)} = 0. \tag{10}$$

Учитывая (4) и (5), запишем усилия в (9) через перемещения

$$N_{11}^{(0)} = 2h(\lambda+2\mu)\frac{\partial\overline{u_0}}{\partial r} + 2\lambda h\frac{\overline{u_0}}{r} + 2\lambda w_1,$$

$$N_{22}^{(0)} = 2h(\lambda+2\mu)\frac{\overline{u_0}}{r} + 2\lambda h\frac{\partial\overline{u_0}}{\partial r} + 2\lambda w_1,$$

$$N_{11}^{(2)} = \frac{1}{3}\left[2h(\lambda+2\mu)\frac{\partial\overline{u_0}}{\partial r} + 2\lambda h\frac{\overline{u_0}}{r} + 2\lambda w_1\right] + \frac{8}{45}h\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_1}{\partial r} + \lambda\frac{u_1}{r}\right],$$

$$N_{22}^{(2)} = \frac{1}{3}\left[2h(\lambda+2\mu)\frac{\overline{u_0}}{r} + 2\lambda h\frac{\partial\overline{u_0}}{\partial r} + 2\lambda w_1\right] + \frac{8}{45}h\left[(\lambda+2\mu)\frac{u_1}{r} + \lambda\frac{\partial u_1}{\partial r}\right],$$

$$\begin{aligned}
&N_{13}^{(1)} = \frac{4}{3}\mu\left(u_1 + \frac{h}{2}\frac{\partial w_1}{\partial r}\right),\\
&N_{33}^{(0)} = 2\lambda h\left(\frac{\partial\overline{u_0}}{\partial r} + \frac{\overline{u_0}}{r}\right) + 2(\lambda+2\mu)w_1,
\end{aligned} \tag{11}$$

где $\overline{u_0} = u_0 + \frac{1}{3}u_1$.

В (11) можно установить зависимости

$$\begin{aligned}
&N_{11}^{(2)} = \frac{1}{3}N_{11}^{(0)} + \widetilde{N}_{11}^{(2)},\\
&N_{22}^{(2)} = \frac{1}{3}N_{22}^{(0)} + \widetilde{N}_{22}^{(2)},
\end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned}
&\widetilde{N}_{11}^{(2)} = \frac{8}{45}h\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_1}{\partial r} + \lambda\frac{u_1}{r}\right],\\
&\widetilde{N}_{22}^{(2)} = \frac{8}{45}h\left[(\lambda+2\mu)\frac{u_1}{r} + \lambda\frac{\partial u_1}{\partial r}\right].
\end{aligned} \tag{13}$$

Учитывая (11), (12), (13), уравнения (9) будут иметь вид

$$\begin{aligned}
&h(\lambda+2\mu)\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r\overline{u_0})\right) + \lambda\cdot\frac{\partial w_1}{\partial r} = 0,\\
&h(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_1)\right) - \frac{15\mu}{h}\left(u_1 + \frac{h}{2}\frac{\partial w_1}{\partial r}\right) = 0,\\
&2\lambda h\cdot\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r\overline{u_0})\right) - \frac{4h\mu}{3}\cdot\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(ru_1)\right) +\\
&+ 2(\lambda+2\mu)w_1 - -\frac{2\mu h^2}{3}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w_1}{\partial r}\right)\right) = -hq.
\end{aligned} \tag{14}$$

Граничные условия (10) запишутся следующим образом

$$\begin{aligned}
&h(\lambda+2\mu)\cdot\frac{\partial\overline{u_0}}{\partial r} + \lambda h\cdot\frac{\overline{u_0}}{r} + \lambda w_1 = 0,\\
&(\lambda+2\mu)\cdot\frac{\partial u_1}{\partial r} + \lambda\cdot\frac{u_1}{r} = 0,\\
&u_1 + \frac{h}{2}\cdot\frac{\partial w_1}{\partial r} = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Последовательным исключением функций из уравнений (14) можно получить самостоятельные уравнения для $\overline{u_0}, u_1, w_1$.

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\begin{aligned}&w_1 - \frac{1-\nu}{1-2\nu}\frac{2h^2}{15}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w_1}{\partial r}\right) +\\ &+\frac{(1-\nu)^2}{1-2\nu}\frac{h^4}{45}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w_1}{\partial r}\right)\right)\right)\end{aligned}\right] =$$

$$= \frac{1-\nu^2}{2E}h\frac{\partial}{\partial r}\left[q - \frac{1-\nu}{1-2\nu}\frac{2h^2}{15}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial q}{\partial r}\right)\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\begin{aligned}&\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r\overline{u_0}) - \frac{1-\nu}{1-2\nu}\cdot\frac{2h^2}{15}\cdot\frac{1}{r}\cdot\\ &\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r\overline{u_0})\right)\right) +\\ &+\frac{(1-\nu)^2}{1-2\nu}\cdot\frac{h^4}{45}\cdot\frac{1}{r}\cdot\\ &\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\overline{u_0})\right)\right)\right)\right)\end{aligned}\right] = \tag{16}$$

$$= \frac{\nu(1+\nu)}{2E}\frac{\partial}{\partial r}\left[q - \frac{1-\nu}{1-2\nu}\frac{2h^2}{15}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial q}{\partial r}\right)\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\overline{u_0}\right)-\frac{1-\nu}{1-2\nu}\cdot\frac{2h^2}{15}\cdot\frac{1}{r}\cdot\\ \cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\overline{u_0}\right)\right)\right)+\\ +\frac{(1-\nu)^2}{1-2\nu}\cdot\frac{h^4}{45}\cdot\frac{1}{r}\cdot\\ \cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\overline{u_0}\right)\right)\right)\right)\right)\end{array}\right]=$$

$$=\frac{\nu(1+\nu)}{2E}\frac{\partial}{\partial r}\left[q-\frac{1-\nu}{1-2\nu}\frac{2h^2}{15}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial q}{\partial r})\right],$$

$$u_1-\frac{1-\nu}{1-2\nu}\cdot\frac{2h^2}{15}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(ru_1\right)\right)\cdot\frac{(1-\nu)^3}{(1-2\nu\nu^2}\cdot\frac{2h^6}{6750}\cdot$$

$$\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(ru_1\right)\right)\right)\right)\right)\right)+$$

$$+\frac{(1-\nu)^2(3-5\nu)}{(1-2\nu)^2}\frac{2h^4}{225}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(ru_1\right)\right)\right)\right)=$$

$$=\frac{1-\nu^2}{4E}\cdot h^2\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left[q-\frac{1-\nu}{1-2\nu}\cdot\frac{2h^2}{15}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial q}{\partial r}\right)\right].$$

Рассмотрим первое из уравнений (16). Пренебрегая членами, содержащими $h^4$, получим

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[w_1-\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial w_1}{\partial r}\right)\right]=$$

$$=\beta_0\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left[q-\frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial q}{\partial r}\right)\right],$$

где

$$\alpha^2=\frac{1-2\nu}{1-\nu}\cdot\frac{15}{2h^2},\ \ \beta_0=-\frac{1-\nu^2}{2E}\cdot h.$$

Интегрируя последнее, приходим к уравнению Бесселя

$$\Phi-\frac{1}{\alpha^2 r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)=C_1,$$

где $\Phi=w_1-\beta_0 q$.

Частное решение его будет

$$w_1=\beta_0 q+C_1.$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения

$$w_1^0=C_2 I_0\left(\alpha r\right)+C_3 K_0\left(\alpha r\right)$$

где $I_0\left(\alpha r\right)$ и $K_0\left(\alpha r\right)$ модифицированные функции Бесселя.

Общее решение неоднородного уравнения запишется следующим образом

$$w_1=C_1+C_2 I_0\left(\alpha r\right)+C_3 K_0\left(\alpha r\right)+\beta_0 q. \tag{17}$$

Подставляя это решение в первое уравнение системы (14) и проинтегрировав его, получим

$$u_1=C_2\cdot\alpha_2\cdot I_1\left(\alpha r\right)-C_3\cdot\alpha_3\cdot K_1\left(\alpha r\right)+$$

$$+\beta_2\cdot\frac{dq}{dr}-3\gamma_1\cdot r\cdot\left(C_1+\frac{\nu}{1-2\nu}\cdot C_4\right)+\frac{C_6}{r},$$

где $\beta_2=-\frac{h}{2}\cdot\beta_0$.

Из условия ограниченности напряжений на бесконечности, получим

$$C_1=C_2=C_4=0.$$

Тогда выражения (17)-(19) запишутся так

$$w_1=C_3\cdot K_0\left(\alpha r\right)+\beta_0\cdot q,$$

$$\overline{u_0}=-C_3\cdot\alpha_2\cdot K_1\left(\alpha r\right)+\frac{\beta_1}{r}\cdot\int rqdr+\frac{C_5}{r},$$

$$u_1=-C_3\cdot\alpha_2\cdot K_1\left(\alpha r\right)+\beta_2\cdot\frac{dq}{dr}+\frac{C_6}{r}.$$

Граничные условия при этом примут вид

$$\frac{\partial\overline{u_0}}{\partial r}+\alpha_1\cdot h\cdot\frac{\overline{u_0}}{r}+\alpha_1\cdot w_1=0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial r}+\alpha_1\cdot h\cdot\frac{u_1}{r}=0,$$

$$u_1+\frac{h}{2}\cdot\frac{\partial w_1}{\partial r}=0,$$

где $\alpha_1=\frac{\nu}{h(1-\nu)}$.

Пусть на пластинку действует сжимающая, плавная, быстро убывающая от края отверстия поверхностная нагрузка

$$q=q_0\cdot e^{-m\left(\frac{r}{r_0}-1\right)}.$$

Тогда выражения для перемещений примут вид

$$w_1=C_3\cdot K_0\left(\alpha r\right)+\beta_0\cdot q_0\cdot e^{-m\left(\frac{r}{r_0}-1\right)},$$

$$\overline{u_0}=-C_3\cdot\alpha_2\cdot K_1\left(\alpha r\right)+\frac{\beta_1 r_0}{m}\cdot\left(1+\frac{r_0}{rm}\right)\cdot$$

$$\cdot q_0\cdot e^{-m\left(\frac{r}{r_0}-1\right)}+\frac{C_5}{r},$$

$$u_1=-C_3\alpha_2\cdot K_1\left(\alpha r\right)+\beta_2\cdot\frac{m}{r_0}\cdot q_0\cdot e^{-m\left(\frac{r}{r_0}-1\right)}+\frac{C_6}{r}.$$

В результате решения задачи наибольший интерес представляет величина кольцевого напряжения $\sigma_\varphi$ у края отверстия. Выражение для $\sigma_\varphi$, найденное по соотношениям упругости, имеет вид

$$\sigma_\varphi = \frac{\lambda}{\nu}\left\{ \begin{aligned} & C_3\left[ \frac{\nu(5-18\nu 8}{4h(1-\nu)} K_0(\alpha r) - \frac{1-14\nu}{30}\alpha h \cdot \cdot \frac{1}{r}\cdot K_1(\alpha r) \right] + \\ & + \frac{1-2\nu}{r^2}\cdot\left(C_5 - \frac{1}{3}C_6\right) - \\ & - \left[ (1-2\nu)\cdot\beta_1\cdot\frac{r_0}{mr}\cdot\left(1+\frac{r_0}{mr}\right) - -(1-\nu)\cdot\frac{\beta_2}{3}\frac{m}{r_0}\cdot\left(\frac{1}{r}-\frac{\nu}{1-\nu}\cdot\frac{m}{r_0}\right) \right]\cdot \\ & \cdot q_0 \cdot e^{-m(\frac{r}{r_0}-1)} + \\ & + \bar{z}^{-2}\left[ C_3\left( \nu\alpha\alpha_3 K_0(\alpha r) - (1-2\nu\nu)_3 \cdot \cdot\frac{1}{r} K_1(\alpha r) \right) + + \frac{1-2\nu}{r^2} C_6 - -(1-\nu)\beta_2\frac{m}{r_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{\nu}{1-\nu}\frac{m}{r_0}\right) \right]\cdot \\ & \cdot q_0 \cdot e^{-m\left(\frac{r}{r_0}-1\right)} \end{aligned} \right\} -$$

$$-\frac{q_0}{2}\cdot e^{-m\left(\frac{r}{r_0}-1\right)}.$$

Постоянные интегрирования $C_3$, $C_5$, $C_6$ найдем из граничных условий

$$C_3 = \frac{2\beta_2\cdot m\cdot(m-m\nu-\nu)}{r_0\gamma}\cdot q_0,$$

$$C_5 = \left[ \frac{2\beta_2\cdot m\cdot(m-m\nu-\nu)\cdot\alpha_2\cdot K_1(\alpha r_0)}{\gamma} + + \frac{\beta_1\cdot r_0^2}{m}\cdot\left(1+\frac{1}{m}\right) \right] q_0,$$

$$C_3 = \frac{6\beta_2\cdot m\cdot(m-m\cdot\nu-\nu)\cdot K_1(\alpha r_0)}{\alpha\cdot h\cdot(1-\nu)\gamma} q_0,$$

где

$$\gamma = \frac{3(1-10\nu)}{2h} r_0 K_0(\alpha r_0) + (1-2\nu)\alpha h K_1(\alpha r_0).$$

В таблице 1 приведены результаты расчетов безразмерного напряжения $\sigma_\varphi / q_0$ у края отверстия при $\bar{z} = \pm 1$ в зависимости от параметров $m$ и $\bar{r}_0 = r_0 / h$, ($\nu$= 0,3).

При больших значениях $m$ нагрузка $q$ приближается к сосредоточенной и, как видно из таблицы, с ростом $m$ при одновременном уменьшении радиуса отверстия коэффициент концентрации напряжений оказывается довольно большим, т.е. кольцевое напряжение $\sigma_\varphi$ можно сопоставлять лишь с напряжением, которое возникает при раскрое трещины в ее вершинах.

**Таблица 1 - Значение напряжения у края отверстия**

| $\bar{r}_0$ \ $m$ | 1 | 3 | 5 | 10 | 20 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -0,77 | -2,53 | -5,87 | -21,2 | -81,7 | -2000 |
| 3 | -0,523 | -0,615 | -0,772 | -1,44 | -3,96 | -82,1 |
| 5 | -0,507 | -0,537 | -0,583 | -0,778 | -1,51 | -23,4 |

## Литература


1. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости. – М.: ГИТТЛ, 1995. – 494 с.
2. Белоус П.А. "Осесимметричные задачи теории упругости". Одесса: ОГПУ, 2000. – 183 с.
3. Хайруллин Ф.С., Серазутдинов М. Н., Сидорин С.Г. Расчет напряженно-деформированного состояния сотового поликарбоната. Вестник Казанского технологического университета. № 9. Казань. 2010 г. С.433-437.
4. Хайруллин Ф.С., Сидорин С.Г. Определение напряженно-деформированного состояния материала сотовой структуры. Вестник Казанского технологического университета. Т. 15, № 18. Казань. 2012г. С. 23 - 26.



© **Р. М. Тимербаев -** к.ф.-м.н., доцент, Елабужский институт К(П)ФУ, timerais@mail.ru; **Ф. С. Хайруллин -** д.ф.-м.н., профессор КНИТУ, x_farid@mail.ru; **Р. Г. Хакимов -** к.т.н., доцент, К(П)ФУ, Институт вычислительной математики и ИТ, hakimovrg@mail.ru.