УДК 519.872

А. П. Кирпичников, А. С. Титовцев

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ПОЛИКОМПОНЕНТНЫХ ПОТОКОВ

Ключевые слова: Система массового обслуживания, система дифференцированного обслуживания, поликомпонентный поток требований, очередь.

В работе выполнена математическая формализация вероятностных характеристик стационарного режима функционирования открытых систем массового обслуживания с поликомпонентным входным потоком и множеством ограничений на длину очереди.

Keywords: queuing system, system of difference service, polycomponent flow of requirements, queue.

In work the mathematical formalization of probability characteristics of stationary mode of functioning of open queuing systems with polycomponent input flow and many of limits to length of queue is performed.

В последнее время появляется все большее количество различного рода товаров и услуг, и все чаще возникают проблемы, связанные с организацией пунктов торговли и обслуживания населения. Для описания подобных объектов хорошо подходят модели систем массового обслуживания (СМО) с пуассоновскими потоками заявок, рассмотренные в цикле работ [1-8]. Однако, СМО, встречающиеся в повседневной практике, зачастую представляют собой сложные системы, имеющие во входном потоке заявки разных типов. Предположим, что рассматриваемая СМО имеет *m* обслуживающих устройств и входной поток требований, содержащий заявки нескольких типов:

- 0-й тип – заявки, которые обслуживаются только при наличии свободного обслуживающего устройства и никогда не становятся в очередь. В случае, если на момент поступления в систему очередной подобной заявки в системе не оказывается свободного обслуживающего устройства, данная заявка покидает систему необслуженной.
- 1-й тип – заявки, которые обслуживаются при наличии свободного обслуживающего устройства, либо становятся в очередь, если число требований в очереди меньше определённого числа ε_1. В случае, когда в очереди уже имеется ε_1 или более требований, вновь поступившая заявка 1-го типа получает отказ и выбывает из системы необслуженной;
- 2-й тип – заявки, которые обслуживаются при наличии свободного обслуживающего устройства, либо становятся в очередь, если число требований в очереди меньше определённого числа ε_2. В случае, когда в очереди уже имеется ε_2 или более требований, вновь поступившая заявка 2-го типа получает отказ и выбывает из системы необслуженной, и т.д.;
- h-й тип – заявки, которые обслуживаются при наличии свободного обслуживающего устройства, либо становятся в очередь, если число требований в очереди меньше определённого числа ε_h. В случае, когда в очереди уже имеется ε_h или более требований, вновь поступившая заявка h-го типа получает отказ и выбывает из системы необслуженной.

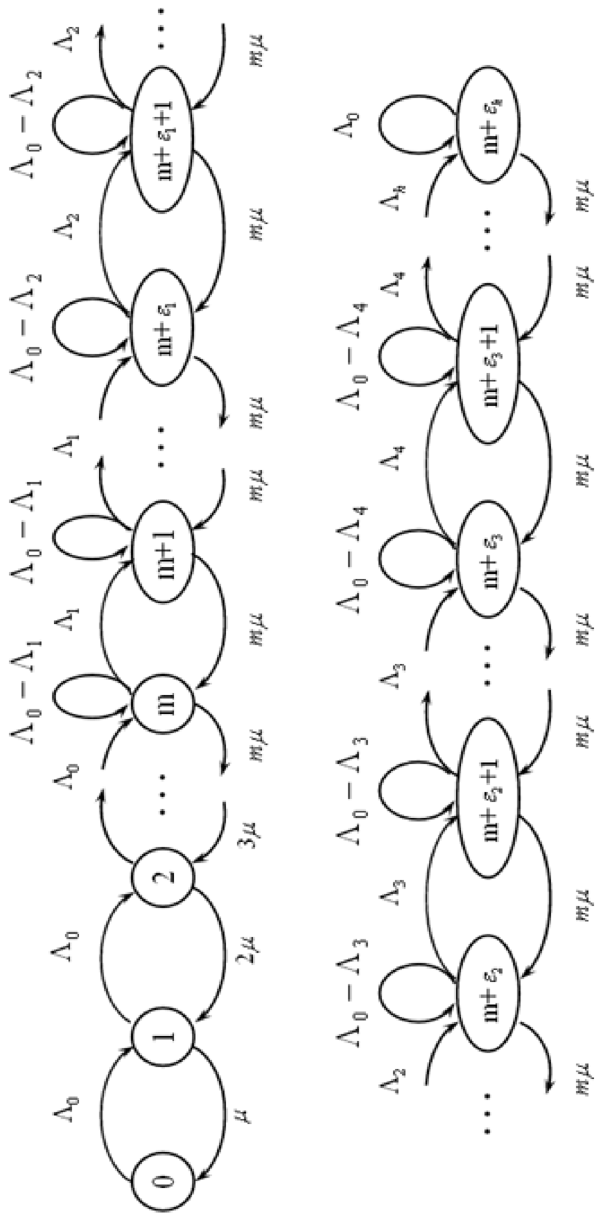

Рис. 1 - Граф состояний и переходов СМО

Потоки заявок такого рода будем называть поликомпонентными, а системы, обслуживающие каждый тип заявок по отдельным правилам, - системами дифференцированного обслуживания [9-10].

Граф состояний и переходов такой СМО приведён на рис.1.

Принятые обозначения:

$\varepsilon_0 = E_0 = 0; \qquad \varepsilon_1 = E_1; \qquad \varepsilon_2 = E_1 + E_2; \cdots$

$\varepsilon_j = \sum_{i=0}^{j} E_i = \sum_{i=1}^{j} E_i$ - ограничения длины очереди для заявок j-го типа;

$\Lambda_0 = \sum_{j=0}^{h} \lambda_j; \qquad \Lambda_1 = \sum_{j=1}^{h} \lambda_j; \qquad \Lambda_2 = \sum_{j=2}^{h} \lambda_j; \cdots$

$\Lambda_h = \lambda_h;$ где λ_j - интенсивности потоков заявок j-го типа;

$R_0 = \sum_{j=0}^{h} \rho_j; \qquad R_1 = \sum_{j=1}^{h} \rho_j; \qquad R_2 = \sum_{j=2}^{h} \rho_j; \cdots$

$R_h = \rho_h; \;\; R_i = \dfrac{\Lambda_i}{\mu}$, где ρ_j - приведенные интенсивности потоков заявок j-го типа.

Потоки заявок каждого типа, образующие поликомпонентный поток, являются простейшими и имеют интенсивности λ_j, суммарные поликомпонентные потоки с интенсивностями Λ_j также являются простейшими (пуассоновскими) [11]. Среднюю интенсивность обслуживания заявок одним обслуживающим устройством обозначим за μ. В этом случае интенсивность выходного потока обслуженных заявок до m -го состояния кратна μ и зависит от числа занятых каналов. После m-го состояния интенсивность потока обслуженных заявок равна $m\mu$. Поток обслуженных заявок также носит простейший характер.

С учетом принятых обозначений и допущений получим непрерывную марковскую цепь, граф состояний которой приведен на рис. 1. По данному графу составим систему уравнений Колмогорова для стационарного режима функционирования СМО.

$$\begin{aligned}
&P_0\Lambda_0 = P_1\mu;\\
&P_1\Lambda_0 + P_1\mu = P_0\Lambda_0 + P_2 2\mu;\\
&P_2\Lambda_0 + P_2 2\mu = P_1\Lambda_0 + P_3 3\mu;\\
&\vdots\\
&P_{m-1}\Lambda_0 + P_{m-1}(m-1)\mu = P_{m-2}\Lambda_0 + P_m m\mu;\\
&P_m\Lambda_1 + P_m m\mu = P_{m-1}\Lambda_0 + P_{m+1} m\mu;\\
&P_{m+1}\Lambda_1 + P_{m+1} m\mu = P_m\Lambda_1 + P_{m+2} m\mu;\\
&\vdots\\
&P_{m+\varepsilon_1-1}\Lambda_1 + P_{m+\varepsilon_1-1} m\mu = P_{m+\varepsilon_1-2}\Lambda_1 + P_{m+\varepsilon_1} m\mu;\\
&P_{m+\varepsilon_1}\Lambda_2 + P_{m+\varepsilon_1} m\mu = P_{m+\varepsilon_1-1}\Lambda_1 + P_{m+\varepsilon_1+1} m\mu;\\
&P_{m+\varepsilon_1+1}\Lambda_2 + P_{m+\varepsilon_1+1} m\mu = P_{m+\varepsilon_1}\Lambda_2 + P_{m+\varepsilon_1+2} m\mu;\\
&\vdots\\
&P_{m+\varepsilon_2-1}\Lambda_2 + P_{m+\varepsilon_2-1} m\mu = P_{m+\varepsilon_2-2}\Lambda_2 + P_{m+\varepsilon_2} m\mu;\\
&P_{m+\varepsilon_2}\Lambda_3 + P_{m+\varepsilon_2} m\mu = P_{m+\varepsilon_2-1}\Lambda_2 + P_{m+\varepsilon_2+1} m\mu;\\
&P_{m+\varepsilon_2+1}\Lambda_3 + P_{m+\varepsilon_2+1} m\mu = P_{m+\varepsilon_2}\Lambda_3 + P_{m+\varepsilon_2+2} m\mu;\\
&\vdots\\
&P_{m+\varepsilon_h-1}\Lambda_h + P_{m+\varepsilon_h-1} m\mu = P_{m+\varepsilon_h-2}\Lambda_h + P_{m+\varepsilon_h} m\mu;\\
&P_{m+\varepsilon_h} m\mu = P_{m+\varepsilon_h-1}\Lambda_h;\\
&\sum_{i=0}^{m+\varepsilon_h} P_i = 1.
\end{aligned} \tag{1}$$

Решение системы уравнений с учетом условия нормировки (1) даст нам вероятности возможных состояний СМО в стационарном режиме.

$$P_1 = \frac{\Lambda_0}{\mu} P_0 = R_0 P_0;$$

$$P_2 = \frac{\Lambda_0}{2\mu} P_1 = \frac{R_0}{2} P_1 = \frac{R_0^2}{2!} P_0;$$

$$P_3 = \frac{\Lambda_0}{3\mu} P_2 = \frac{R_0}{3} P_2 = \frac{R_0^3}{3!} P_0;$$

$$\vdots$$

$$P_m = \frac{\Lambda_0}{m\mu} P_{m-1} = \frac{R_0}{m} P_{m-1} = \frac{R_0^m}{m!} P_0;$$

$$P_{m+1} = \frac{\Lambda_1}{m\mu} P_m = \frac{R_1}{m} P_m = \frac{R_1}{m}\frac{R_0^m}{m!} P_0;$$

$$P_{m+2} = \frac{\Lambda_1}{m\mu} P_{m+1} = \frac{R_1}{m} P_{m+1} = \left(\frac{R_1}{m}\right)^2 \frac{R_0^m}{m!} P_0;$$

$$\vdots$$

$$P_{m+\varepsilon_1} = \frac{\Lambda_1}{m\mu} P_{m+\varepsilon_1-1} = \frac{R_1}{m} P_{m+\varepsilon_1-1} = \left(\frac{R_1}{m}\right)^{\varepsilon_1} \frac{R_0^m}{m!} P_0;$$

$$P_{m+\varepsilon_1+1} = \frac{\Lambda_2}{m\mu} P_{m+\varepsilon_1} = \frac{R_2}{m} P_{m+\varepsilon_1} = \frac{R_2}{m}\left(\frac{R_1}{m}\right)^{\varepsilon_1} \frac{R_0^m}{m!} P_0;$$

$$P_{m+\varepsilon_1+2} = \frac{\Lambda_2}{m\mu} P_{m+\varepsilon_1+1} = \frac{R_2}{m} P_{m+\varepsilon_1+1} =$$

$$= \left(\frac{R_2}{m}\right)^2 \left(\frac{R_1}{m}\right)^{\varepsilon_1} \frac{R_0^m}{m!} P_0;$$

$$\vdots$$

$$P_{m+\varepsilon_2} = \frac{\Lambda_2}{m\mu} P_{m+\varepsilon_2-1} = \frac{R_2}{m} P_{m+\varepsilon_2-1} =$$

$$= \left(\frac{R_2}{m}\right)^{E_2} \left(\frac{R_1}{m}\right)^{E_1} \frac{R_0^m}{m!} P_0;$$

$$P_{m+\varepsilon_2+1} = \frac{\Lambda_3}{m\mu} P_{m+\varepsilon_2} = \frac{R_3}{m} P_{m+\varepsilon_2} =$$

$$= \frac{R_3}{m}\left(\frac{R_2}{m}\right)^{E_2} \left(\frac{R_1}{m}\right)^{E_1} \frac{R_0^m}{m!} P_0;$$

$$P_{m+\varepsilon_2+2}=\frac{\Lambda_3}{m\mu}P_{m+\varepsilon_2+1}=\frac{R_3}{m}P_{m+\varepsilon_2+1}=$$

$$=\left(\frac{R_3}{m}\right)^2\left(\frac{R_2}{m}\right)^{E_2}\left(\frac{R_1}{m}\right)^{E_1}\frac{R_0^m}{m!}P_0;$$

$$\vdots$$

$$P_{m+\varepsilon_h}=\frac{\Lambda_h}{m\mu}P_{m+\varepsilon_h-1}=\frac{R_h}{m}P_{m+\varepsilon_h-1}=$$

$$=\left(\frac{R_h}{m}\right)^{E_h}\cdots\left(\frac{R_2}{m}\right)^{E_2}\left(\frac{R_1}{m}\right)^{E_1}\frac{R_0^m}{m!}P_0;$$

$$\sum_{i=0}^{m+\varepsilon_h}P_i=1.$$

$$P_0+R_0P_0+\frac{R_0^2}{2!}P_0+\frac{R_0^3}{3!}P_0+\cdots+\frac{R_0^m}{m!}P_0+$$

$$+\frac{R_1}{m}\frac{R_0^m}{m!}P_0+\left(\frac{R_1}{m}\right)^2\frac{R_0^m}{m!}P_0+\cdots+\left(\frac{R_1}{m}\right)^{E_1}\frac{R_0^m}{m!}P_0+$$

$$+\frac{R_2}{m}\left(\frac{R_1}{m}\right)^{E_1}\frac{R_0^m}{m!}P_0+\left(\frac{R_2}{m}\right)^2\left(\frac{R_1}{m}\right)^{E_1}\frac{R_0^m}{m!}P_0+\cdots+$$

$$+\left(\frac{R_2}{m}\right)^{E_2}\left(\frac{R_1}{m}\right)^{E_1}\frac{R_0^m}{m!}P_0+$$

$$+\frac{R_3}{m}\left(\frac{R_2}{m}\right)^{E_2}\left(\frac{R_1}{m}\right)^{E_1}\frac{R_0^m}{m!}P_0+$$

$$+\left(\frac{R_3}{m}\right)^2\left(\frac{R_2}{m}\right)^{E_2}\left(\frac{R_1}{m}\right)^{E_1}\frac{R_0^m}{m!}P_0+\cdots+$$

$$+\left(\frac{R_h}{m}\right)^{E_h}\cdots\left(\frac{R_2}{m}\right)^{E_2}\left(\frac{R_1}{m}\right)^{E_1}\frac{R_0^m}{m!}P_0=1;$$

$$P_0=\left[e_m\left(R_0\right)+\frac{R_0^m}{m!}\frac{R_1}{m}\frac{1-\left(\frac{R_1}{m}\right)^{E_1}}{1-\frac{R_1}{m}}+\right.$$

$$+\frac{R_0^m}{m!}\left(\frac{R_1}{m}\right)^{E_1}\frac{R_2}{m}\frac{1-\left(\frac{R_2}{m}\right)^{E_2}}{1-\frac{R_2}{m}}+$$

$$+\frac{R_0^m}{m!}\left(\frac{R_1}{m}\right)^{E_1}\left(\frac{R_2}{m}\right)^{E_2}\frac{R_3}{m}\frac{1-\left(\frac{R_3}{m}\right)^{E_3}}{1-\frac{R_3}{m}}+\cdots+$$

$$\left.+\frac{R_0^m}{m!}\left(\frac{R_1}{m}\right)^{E_1}\left(\frac{R_2}{m}\right)^{E_2}\cdots\left(\frac{R_{h-1}}{m}\right)^{E_{h-1}}\frac{R_h}{m}\frac{1-\left(\frac{R_h}{m}\right)^{E_h}}{1-\frac{R_h}{m}}\right]^{-1}.$$

$$P_0=\left[e_m\left(R_0\right)+\frac{R_0^m}{m!}\sum_{g=1}^{h}\frac{R_g}{m-R_g}\times\right.$$

$$\left.\times\left(1-\left(\frac{R_g}{m}\right)^{E_g}\right)\prod_{j=0}^{g-1}\left(\frac{R_j}{m}\right)^{E_j}\right]^{-1}.$$

Применяя правило Лопиталя, найдем предел:

$$\lim_{R_g\to m}\frac{R_g}{m-R_g}\left(1-\left(\frac{R_g}{m}\right)^{E_g}\right)=\lim_{\frac{R_g}{m}\to 1}\frac{\frac{R_g}{m}-\left(\frac{R_g}{m}\right)^{E_g+1}}{1-\frac{R_g}{m}}=$$

$$=\lim_{\frac{R_g}{m}\to 1}\frac{1-\left(E_g+1\right)\left(\frac{R_g}{m}\right)^{E_g}}{-1}=\frac{1-E_g-1}{-1}=E_g.$$

Тогда

$$P_0=\left[e_m\left(R_0\right)+\frac{R_0^m}{m!}\sum_{g=1}^{h}\prod_{j=0}^{g-1}\left(\frac{R_j}{m}\right)^{E_j}\times\right.$$

$$\left.\times\begin{cases}\frac{R_g}{m-R_g}\left(1-\left(\frac{R_g}{m}\right)^{E_g}\right), & R_g\ne m\\ E_g, & R_g=m\end{cases}\right]^{-1}.$$

$$P_i=\begin{cases}\frac{R_0^i}{i!}P_0,\ 0\le i\le m\\ \left(\frac{R_1}{m}\right)^{i-m}\frac{R_0^m}{m!}P_0,\ m\le i\le m+\varepsilon_1\\ \left(\frac{R_2}{m}\right)^{i-m-\varepsilon_1}\left(\frac{R_1}{m}\right)^{E_1}\frac{R_0^m}{m!}P_0,\\ \qquad m+\varepsilon_1\le i\le m+\varepsilon_2\\ \left(\frac{R_3}{m}\right)^{i-m-\varepsilon_2}\prod_{g=1}^{2}\left(\frac{R_g}{m}\right)^{E_g}\frac{R_0^m}{m!}P_0,\\ \qquad m+\varepsilon_2\le i\le m+\varepsilon_3\\ \vdots\\ \left(\frac{R_h}{m}\right)^{i-m-\varepsilon_{h-1}}\prod_{g=1}^{h-1}\left(\frac{R_g}{m}\right)^{E_g}\frac{R_0^m}{m!}P_0,\\ \qquad m+\varepsilon_{h-1}\le i\le m+\varepsilon_h\end{cases};$$

или

$$P_i=\begin{cases}\dfrac{R_0^i}{i!}P_0, \quad 0\le i\le m\\ \left(\dfrac{R_{j+1}}{m}\right)^{i-m-\varepsilon_j}\prod\limits_{g=0}^{j}\left(\dfrac{R_g}{m}\right)^{E_g}\dfrac{R_0^m}{m!}P_0,\\ \qquad m+\varepsilon_j\le i\le m+\varepsilon_{j+1},\\ \qquad 0\le j\le h-1\end{cases}.$$

Вероятность немедленного обслуживания

$$P_{НО}=\sum_{i=0}^{m-1}P_i=P_0\left[1+R_0+\frac{R_0^2}{2!}+\cdots+\frac{R_0^{m-1}}{(m-1)!}\right]=$$
$$=e_{m-1}(R_0)P_0.$$

Для удобства формализации введем базовые вероятностные характеристики:

$$P_{Б1}=\sum_{i=m}^{m+\varepsilon_1-1}P_i=\frac{R_0^m}{m!}P_0\left[1+\frac{R_1}{m}+\left(\frac{R_1}{m}\right)^2+\cdots+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{R_1}{m}\right)^{E_1-1}\right]=\frac{1-\left(\dfrac{R_1}{m}\right)^{E_1}}{1-\dfrac{R_1}{m}}\frac{R_0^m}{m!}P_0.$$

$$P_{Б2}=\sum_{i=m+\varepsilon_1}^{m+\varepsilon_2-1}P_i=\left(\frac{R_1}{m}\right)^{E_1}\frac{R_0^m}{m!}P_0\left[1+\frac{R_2}{m}+\left(\frac{R_2}{m}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\cdots+\left(\frac{R_2}{m}\right)^{E_2-1}\right]=\frac{1-\left(\dfrac{R_2}{m}\right)^{E_2}}{1-\dfrac{R_2}{m}}\left(\frac{R_1}{m}\right)^{E_1}\frac{R_0^m}{m!}P_0.$$

$$\vdots$$

$$P_{Бh}=\sum_{i=m+\varepsilon_{h-1}}^{m+\varepsilon_h-1}P_i=\prod_{g=1}^{h-1}\left(\frac{R_g}{m}\right)^{E_g}\frac{R_0^m}{m!}P_0\times$$
$$\times\left[1+\frac{R_h}{m}+\left(\frac{R_h}{m}\right)^2+\cdots+\left(\frac{R_h}{m}\right)^{E_h-1}\right]=$$
$$=\frac{1-\left(\dfrac{R_h}{m}\right)^{E_h}}{1-\dfrac{R_h}{m}}\prod_{g=1}^{h-1}\left(\frac{R_g}{m}\right)^{E_g}\frac{R_0^m}{m!}P_0.$$

$$P_{m+\varepsilon_h}=\left(\frac{R_h}{m}\right)^{E_h}\prod_{g=1}^{h-1}\left(\frac{R_g}{m}\right)^{E_g}\frac{R_0^m}{m!}P_0=$$
$$=\prod_{g=1}^{h}\left(\frac{R_g}{m}\right)^{E_g}\frac{R_0^m}{m!}P_0.$$

$$P_{Бi}=\frac{1-\left(\dfrac{R_i}{m}\right)^{E_i}}{1-\dfrac{R_i}{m}}\prod_{g=0}^{i-1}\left(\frac{R_g}{m}\right)^{E_g}\frac{R_0^m}{m!}P_0.$$

Применяя правило Лопиталя, найдем предел:

$$\lim_{R_i\to m}\frac{1-\left(\dfrac{R_i}{m}\right)^{E_i}}{1-\dfrac{R_i}{m}}=\lim_{\frac{R_i}{m}\to 1}\frac{-E_i\left(\dfrac{R_i}{m}\right)^{E_i-1}}{-1}=E_i.$$

Тогда

$$P_{Бi}=\prod_{g=0}^{i-1}\left(\frac{R_g}{m}\right)^{E_g}\frac{R_0^m}{m!}P_0\begin{cases}\dfrac{m}{m-R_i}\left(1-\left(\dfrac{R_i}{m}\right)^{E_i}\right),\\ \qquad R_i\ne m\\ E_i, \quad R_i=m\end{cases}.$$

Вероятность ожидания вновь прибывшей заявки в очереди

$$P_{ож}=\frac{\Lambda_1}{\Lambda_0}\sum_{i=m}^{m+\varepsilon_1-1}P_i+\frac{\Lambda_2}{\Lambda_0}\sum_{i=m+\varepsilon_1}^{m+\varepsilon_2-1}P_i+\frac{\Lambda_3}{\Lambda_0}\sum_{i=m+\varepsilon_2}^{m+\varepsilon_3-1}P_i+$$
$$+\cdots+\frac{\Lambda_h}{\Lambda_0}\sum_{i=m+\varepsilon_{h-1}}^{m+\varepsilon_h-1}P_i=\sum_{i=1}^{h}\frac{R_i}{R_0}P_{Бi}=\frac{1}{R_0}\sum_{i=1}^{h}R_iP_{Бi}.$$

Вероятность отказа в обслуживании вновь прибывшей заявке

$$P_{отк}=\frac{\Lambda_0-\Lambda_1}{\Lambda_0}\sum_{i=m}^{m+\varepsilon_1-1}P_i+\frac{\Lambda_0-\Lambda_2}{\Lambda_0}\sum_{i=m+\varepsilon_1}^{m+\varepsilon_2-1}P_i+$$
$$+\frac{\Lambda_0-\Lambda_3}{\Lambda_0}\sum_{i=m+\varepsilon_2}^{m+\varepsilon_3-1}P_i+\cdots+\frac{\Lambda_0-\Lambda_h}{\Lambda_0}\sum_{i=m+\varepsilon_{h-1}}^{m+\varepsilon_h-1}P_i+$$
$$+P_{m+\varepsilon_h}=\frac{1}{R_0}\sum_{i=1}^{h}(R_0-R_i)P_{Бi}+P_{m+\varepsilon_h}=$$
$$=\sum_{i=1}^{h}P_{Бi}-P_{ож}+P_{m+\varepsilon_h}=1-P_{НО}-P_{ож}.$$

Приведённые в данной работе результаты могут быть полезны при организации работы и проектировании объектов, работающих по принципу систем массового обслуживания.

Литература

1. *Кирпичников, А.П.* Системы обслуживания с неоднородным входным потоком требований, отказами и очередью./ А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев // Вестник Казан. технол. ун-та. – 2011. – №5. – С. 154 – 161.
2. *Кирпичников, А.П.* Системы массового обслуживания с отказами и неограниченной очередью./ А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев // Обозрение прикл. и промышл. матем. – 2007. – Т. 14 - Вып. 5. – С. 893 – 896.
3. *Кирпичников, А.П.* Методика оптимальной организации систем массового обслуживания с отказами и очередью./

А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев // Обозрение прикл. и промышл. матем. – 2008. – Т. 15 - Вып. 6. – С. 1090 – 1091.
4. *Кирпичников, А.П.* Открытые системы дифференцированного обслуживания поликомпонентных потоков./ А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев // Вестник Казан. технол. ун-та. – 2012. – Т.15-№1. – С. 148 – 152.
5. *Кирпичников, А.П.* О нестационарном режиме в системах дифференцированного обслуживания поликомпонентных потоков./ А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев // Вестник Казан. технол. ун-та. – 2012. – Т.15-№6. – С. 201 – 202.
6. *Кирпичников, А.П.* Характеристики систем дифференцированного обслуживания поликомпонентных потоков./ А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев // Вестник Казан. технол. ун-та. – 2012. – Т.15-№8. – С. 337 – 340.
7. *Кирпичников А.П.* Прикладная теория массового обслуживания. Казань: Изд. КГУ, 2008.
8. *Кирпичников А.П.* Методы прикладной теории массового обслуживания. Казань: Изд. КГУ, 2011.
9. *Титовцев, А.С.* Открытые многоканальные системы дифференцированного обслуживания поликомпонентных потоков: дис. … канд. техн. наук / А.С. Титовцев. – Казань, 2011. – 143 с.
10. *Титовцев А.* Системы дифференцированного обслуживания поликомпонентных потоков. Модели и характеристики. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2012.
11. *Хинчин А.Я.* Работы по математической теории массового обслуживания. М.: Едиториал УРСС, 2004.

© **А. П. Кирпичников** - д.ф.-м.н., зав. каф. интеллектуальных систем и управления информационными ресурсами КНИТУ, kirpichnikov@kstu.ru; **А. С. Титовцев -** к.т.н., доц. той же кафедры.