

Т. В. Лаптева, Н. Н. Зиятдинов, Д. Д. Первухин

ОДНОЭТАПНАЯ ЗАДАЧА ПРОЕКТИРОВАНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ОЧИСТКИ СТОЧНЫХ ВОД С ВЕРОЯТНОСТНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Ключевые слова: вероятностные ограничения, оптимизация, оптимальное проектирование, одноэтапная задача, система биологической очистки сточных вод.

При проектировании химико-технологических систем (ХТС) обычно приходится учитывать наличие неопределенности исходной информации. Игнорирование возможности изменения неопределенных параметров может привести к нарушению требований, предъявляемых к ХТС. В статье приводится пример подобной ситуации для задачи проектирования системы биологической очистки сточных вод. Для получения решения учитывающего неопределенность информации была сформулирована и решена одноэтапная задача оптимального проектирования с вероятностными ограничениями.

Keywords: probabilistic constraints, optimization, optimal design, one-stage problem, biological wastewater treatment system.

Chemical process design usually has to take account of initial information uncertainty. Ignoring possible changes of uncertain parameters may lead to system's requirements violation. This article shows an example of this kind of situation in biological wastewater treatment system design problem. To obtain solution which takes into account uncertainty of information one-stage optimal design problem with probabilistic constraints has been formulated and solved.

Задача оптимизации ХТС решается, как правило, в условиях некоторой неточности исходной физико-химической, технологической и экономической информации. Однако полученная система должна быть работоспособной в процессе функционирования несмотря на неточности в исходной информации. Один из вариантов учета неопределенности - решение задачи в некоторой средней точке по неопределенным параметрам [1], а затем корректировка полученных значений согласно опыта проектировщика - не гарантирует ни оптимальности итогового решения, ни выполнения требований, предъявляемых к проектируемой ХТС.

Мы будем учитывать возможные изменения неопределенных параметров с помощью математического ожидания критерия в качестве целевой функции. Для каждого ограничения потребуем (его) выполнение с заданной вероятностью на области неопределенности. Такая задача имеет вид [2]

$$f^* = \min_{x \in X} E[f(x, \theta)], \quad (1)$$

$$\Pr\{g_j(x, \theta) \leq 0\} \geq \alpha_j, \quad j = 1, \dots, m. \quad (2)$$

Если все неопределенные параметры $\theta_i, i = 1, \dots, n$ являются независимыми случайными величинами, имеющими нормальное распределение $N(E[\theta_i]; \sigma_i^2)$, то можно получить верхнюю оценку задачи (1)-(2) в следующем виде (на k -ой итерации) [3]:

$$f^{(k)} = \min_{x \in X, \theta_i^{L,j,l}, \theta_i^{U,j,l}} E[f(x, \theta)] \quad (3)$$

$$\max_{w^{jl} \in T_W^{jl}} g_j(x, \theta_i^{L,j,l} + (\theta_i^{U,j,l} - \theta_i^{L,j,l})w^{jl}) \leq 0, \\ j = 1, \dots, m, \quad l = 1, \dots, N_j^{(k)},$$

$$\sum_{r=1}^{N_j^{(k)}} [\Phi(\tilde{\theta}_i^{U,j,r}) - \Phi(\tilde{\theta}_i^{L,j,r})] \dots \geq \alpha_j, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$\theta_{ijq}^{U,j,sjq} \leq \theta_{ijq}^{j,(q)}, \quad q \in S_{j1}^{(k)}, \quad \theta_{ijq}^{L,j,sjq} \geq \theta_{ijq}^{j,(q)},$$

$$q \in S_{j2}^{(k)},$$

$$\theta_i^L \leq \theta_i^{L,j,r}, \quad \theta_i^{U,j,r} \leq \theta_i^U, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$r = 1, \dots, N_j^{(k)},$$

$$T_W^{jl} = \{w_i^{jl} : 0 \leq w_i^{jl} \leq 1, i = 1, \dots, n\}$$

Для вычисления $E[f(x, \theta)]$ воспользуемся приближением, основанном на разбиении области неопределенности на подобласти и разложении $f(x, \theta)$ в ряд Тейлора по θ [4]. В (3) также учтено

дробление некоторых областей T_{α_j} на подобласти

на каждой итерации для уточнения получаемой

оценки. Здесь $\tilde{\theta}_i^{L,j} = \frac{\theta_i^{L,j} - E[\theta_i]}{\sigma_i}$,

$\tilde{\theta}_i^{U,j} = \frac{\theta_i^{U,j} - E[\theta_i]}{\sigma_i}$, $E[\theta_i]$ и σ_i - математическое

ожидание и дисперсия $\theta_i \in [\theta_i^L, \theta_i^U]$, $\Phi(\eta)$ - функция стандартного нормального распределения; $\theta_i^{L,j,r}$ и $\theta_i^{U,j,r}$ - левая и правая границы (по каждой из неопределенных величин) r -ой подобласти $T_{jr}^{(k)}$ (их $N_j^{(k)}$ штук на k -ой итерации) области неопределенности для j -ого ограничения; совокуп-

ность $S_j^{(k)}$ содержит в себе центральные точки областей $T_{jr}^{(k)}$.

Пример

В системе биологической очистки сточных вод (БОСВ) (рис.1) сточная вода (поток №1), после предварительной очистки от механических примесей и нейтрализации, подается на вход аэротенка. Далее очищенная вода (поток №2) поступает во вторичный отстойник, откуда осветленная вода (поток №3) после обеззараживания выводится в водоем. Поток уплотненного ила из вторичного отстойника (поток №4) разделяется, и часть его передается в регенератор активного ила и далее поступает на вход аэротенка (поток №7). Часть потока №4 – избыточный ил (поток №5) идет на дальнейшую переработку. Обозначения объектов на рис. 1 приведены на рис. 2.

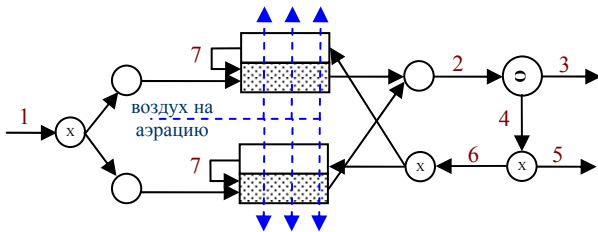


Рис. 1 - Система биологической очистки сточных вод



Рис. 2 - Условные обозначения

В моделях аппаратов технологической схемы БОСВ учтена многокомпонентность загрязнений, основными загрязнениями являются фенолы, СПАВы, гликоли. Обобщенный показатель загрязнений характеризуется химическим потреблением кислорода (ХПК). В моделях учтены процессы отмирания, автолиза биомассы и ее окисление, что позволяет связать работу аэротенка, вторичного отстойника и регенератора в единую систему [5].

В качестве модели гидродинамической структуры потока в коридоре была выбрана ячеечная модель с учетом неоднородностей в виде обратного перемешивания и застойных зон.

Математическая модель аэротенка имеет следующий вид:

- уравнение материального баланса по биомассе

$$v_{i-1}x_{i-1} - v_i x_i + v^r (x_{i+1} - x_i) + v^z (x_z - x_i) = (k_1 x_i - \bar{\mu}_i^1 x_i) V_i$$

- уравнение материального баланса по компонентам субстрата

$$l_i v_{cm} s_{cm}^j + v_{i-1} s_{i-1}^j - v_i s_i^j + v^r (s_{i+1}^j - s_i^j) + v^z (s_z^j - s_i^j) = \alpha^j \bar{\mu}_i^j \frac{c_i}{K_C + c_i} \cdot \frac{1}{1 + d \cdot y_i} x_i V_i$$

- уравнение материального баланса по неактивной биомассе

$$v_{i-1} y_{i-1} - v_i y_i + v^r (y_{i+1} - y_i) + v^z (y_z - y_i) = (k_2 x_i y_i - k_1 x_i) V_i$$

- уравнение материального баланса по растворенному кислороду

$$v_{i-1} c_{i-1} - v_i c_i + v^r (c_{i+1} - c_i) + v^z (c_z - c_i) = K_L a_i (H P z_i - c_i) V_i - \alpha_{O_2} \bar{\mu}_i^1 x_i V_i$$

- уравнение материального баланса по кислороду в газовой фазе

$$G_i \rho \Gamma (z_0 - z_i) = K_L a_i (H P z_i - c_i) V_i \cdot 10^{-3}$$

где v_i , v^r , v^z – объемный расход потока: поступающего в i -ую ячейку, обратного перемешивания и обмена с застойной зоной соответственно, м³/ч; V_i – объем i -ой ячейки, м³; l_i – доля потока сточной воды в i -ю ячейку; v_{cm} – расход сточной воды в аэротенк, м³/ч; G_i – объемный расход воздуха, подаваемого в i -ю ячейку, м³/ч; x , y , c – концентрация активной, неактивной биомассы и растворенного кислорода соответственно, мг/л; s^1 , s^j – концентрация обобщенного загрязнения, мгО₂/л, и j -го компонента загрязнения, мг/л; $j = 1$ (ХПК), 2 (фенолы), 3 (СПАВы), 4 (гликоли), соответственно; z_i – остаточная концентрация кислорода в воздухе в i -ой ячейке, мг/л; z_0 – концентрация кислорода в воздухе, кг/м³; $\bar{\mu}^1$, $\bar{\mu}^j$ – удельные скорости роста активной биомассы по обобщенному загрязнению и окисления j -го компонента загрязнения соответственно, 1/ч; индексы: i – номер ячейки, r – обратное перемешивание, z – застойная зона, cm – сточная вода; K_C – коэффициент полунасыщения по кислороду, мг/л; d – коэффициент ингибирования роста микроорганизмов неактивной биомассой, л/мг; k_1 – коэффициент скорости гибели биомассы, 1/ч; α^1 , α^j – стехиометрические коэффициенты, k_2 – коэффициент окисления неактивной биомассы, л/(мг·ч), $K_L a$ – объемный коэффициент массо-передачи, 1/ч; H – растворимость кислорода,

мг/(л·атм); P – давление воздуха, подаваемого в аппарат, атм.

В результате идентификации модели кинетики по лабораторному эксперименту [6] в качестве удельной скорости роста активной биомассы по обобщенному загрязнению была выбрана модель Мозера

$$\bar{\mu}^1 = k \frac{\left(s^1/S_L\right)^m}{1 + \left(s^1/S_L\right)^n},$$

для удельной скорости окисления основных загрязнений взята степенная модель

$$\bar{\mu}^j = k \cdot s^n.$$

Также были определены значения: коэффициента ингибирования роста микроорганизмов неактивной биомассой $d = 0,0001$, л/мг, коэффициента скорости отмирания активной биомассы $k_1 = 0,0038$, 1/ч, коэффициента окисления неактивной биомассы $k_2 = 0,0001$, л/(мг·ч). Для удельной скорости роста биомассы по ХПК коэффициенты были определены равными: $k = 0,074$, $S_L = 220$, $n = 2,7$, $m = 3,25$. В степенной модели для удельной скорости покомпонентного окисления коэффициенты $k = 0,0006$ и $n = 1,5$ (для фенолов), $k = 0,00007$ и $n = 1,2$ (для СПАВ), $k = 0,0002$ и $n = 1,5$ (для гликолей).

Значение объемного коэффициента массопередачи $K_L a$ вычисляется по формуле $K_L a = k_L \cdot a$, где k_L – коэффициент массопередачи, a – удельная поверхность контакта фаз. Коэффициент массопередачи рассчитывается по модели Хигби [7]:

$$k_L = 2 \sqrt{\frac{D_{ж} \cdot W_t \cdot a}{6 \cdot \pi}}$$

где $D_{ж}$ – коэффициент молекулярной диффузии кислорода, м²/с; W_t – скорость свободного всплытия пузыря воздуха, м/с. Для определения удельной поверхности контакта фаз используется зависимость, предложенная Кальдербанком [8]:

$$a = K \frac{(\rho \cdot W \cdot g)^{0,4} \rho^{0,2}}{\sigma^{0,6}} (W/W_t)^{0,5}$$

где K – эмпирический коэффициент, $K = 1,44$; ρ – плотность жидкости, г/см³; σ – поверхностное натяжение жидкости, дин/см; W – приведенная скорость воздуха, м/с, вычисляется из соотношения $W = G/S$, где G – объемный расход воздуха в аппарат, м³/с; S – площадь поперечного сечения аппарата, м².

Математическая модель регенератора отличается от модели азротенка значениями коэффициентов $d = 0,0001$, л/мг; $k_1 = 0,0018$, 1/ч; $k_2 = 0,008$, л/(мг·ч).

В основу модели вторичного отстойника положена теория лимитирующего потока Дика [9].

Математическая модель вторичного отстойника включает уравнения:

- уравнение для расчета потока уплотненного ила:

$$v_3 = S U_0 (b-1) \left(\frac{b x_1}{(b-1) x_3} \right)^b$$

- баланс по расходу потоков:
 $v_1 = v_2 + v_3$
- баланс по биомассе учитывает процесс отмирания клеток активного ила
 $v_1 x_1 - k_1 x_3 V = v_2 x_2 + v_3 x_3$
- баланс по неактивной биомассе:
 $v_3 y_3 = v_1 y_1 + k_1 x_3 V_{om} - v_2 y_2$

где S – площадь поперечного сечения отстойника, м²; U_0 – начальная скорость осаждения, $U_0 = 2,27$ м/ч; b – коэффициент модели, $b = 12,2$; V_{om} – объем отстойника, м³; v_i, x_i, y_i – объемный расход i -го потока, концентрации биомассы и продуктов автолиза соответственно; $i = 1$ – для входного потока, 2 – потока осветленной жидкости, 3 – потока уплотненного ила; k_1 – коэффициент скорости гибели активной биомассы, $k_1 = 0,01$ 1/ч; j – номер загрязнения.

В модели приняты допущения: 1) концентрация продуктов автолиза в осветленной жидкости равна ее концентрации во входном потоке $y_2 = y_1$; 2) процесс массопередачи кислорода и рост биомассы отсутствуют, $s_1^j = s_2^j = s_3^j$; 3) выходная концентрация кислорода в потоке уплотненного ила принята равной 1 мг/л.

Предполагаемый объемный расход сточных вод составляет $v = 173,75$ м³/ч. При этом концентрации загрязнителей равны $s^1 = 707,81$ мгО₂/л (для ХПК общ.), $s^2 = 5,64$ мг/л (для фенолов), $s^3 = 10,98$ мг/л (для СПАВ) и $s^4 = 192,45$ мг/л (для гликолей). Очевидно, что невозможно гарантировать точное соответствие этим значениям действительных параметров сточной воды в процессе эксплуатации БОСВ. Поэтому концентрации фенола, СПАВ и гликолей в сточных водах, расход сточных вод были выбраны в качестве неопределенных параметров системы. Также неопределенными были выбраны коэффициенты $k = 0,074$ и $m = 3,25$ удельной скорости роста биомассы по ХПК. Область неопределенности при этом задается в виде интервала изменения неопределенных параметров на некоторую величину относительно номинального значения. Диапазон изменений был выбран: ± 5 для v , ± 5 для s^2 , ± 9 для s^3 , ± 9 для s^4 , ± 5 для k , ± 5 для m .

Поисковые конструктивные величины в задаче – это $V_{азр}$, $V_{рег}$, $V_{омс}$ (объемы азротенка, регенератора и вторичного отстойника). Управляющие параметры – расход воздуха G

($G = G_{\text{аэр}} + G_{\text{рег}}$) и доля потока уплотненного ила в регенератор $k_{\text{рец}}$. Таким образом, критерий оптимальности имеет вид:

$$f = \min_{V_{\text{аэр}}, V_{\text{рег}}, V_{\text{отс}}, G, k_{\text{рец}}} c_{\text{отс}} V_{\text{отс}} + c_{\text{аэр}} V_{\text{аэр}} + c_{\text{рег}} V_{\text{рег}} + c_{\text{возд}} (G_{\text{аэр}} + G_{\text{рег}}) + c_{\text{рец}} V_6 \quad (4)$$

где $c_{\text{отс}}$, $c_{\text{аэр}}$, $c_{\text{рег}}$ – приведенные стоимости M^3 объема отстойника, аэротенка и регенератора, соответственно; $c_{\text{возд}}$ – стоимость M^3 воздуха; V_6 – расход потока уплотненного ила, передающийся в регенератор активного ила, $c_{\text{рец}}$ – стоимость перекачки 1 M^3 этого потока.

Требования технологического регламента, включающие и требования, предъявляемые к качеству очистки, определяют ограничениями:

- на содержание загрязнений в сбрасываемой в водоем очищенной воде:

$$(s_2^j - s_{\text{ПДК}}^j) \leq 0 \quad (5)$$

где s_2^j – концентрация загрязнений в очищенной воде, $s_{\text{ПДК}}^j$ – предельно допустимая концентрация по содержанию загрязнений в очищенной воде: $s_{\text{ПДК}}^1 = 90$ мг O_2 /л, $s_{\text{ПДК}}^2 = 0,009$ мг/л,

$s_{\text{ПДК}}^3 = 0,61$ мг/л, $s_{\text{ПДК}}^4 = 0,57$ мг/л

- на максимальную концентрацию активной биомассы в потоке уплотненного ила:

$$x \leq x^{\text{max}}, \quad (6)$$

$x^{\text{max}} = 12$ г/л.

- на расход воздуха:

$$G_{\text{аэр}} + G_{\text{рег}} \leq G^{\text{max}} \quad (7)$$

$$G_i^j \geq G_i^{\text{min}}, \quad i = \text{аэр, рег}. \quad (8)$$

Верхняя граница G^{max} равна максимальному расходу воздуха, который могут обеспечить все воздухоудовки, задействованные в системе БОСВ. Нижняя граница G_i^{min} связана с необходимой степенью перемешивания среды в аэрируемых аппаратах.

В задаче (4)–(8) все неопределенные параметры независимы. Предположим, что они имеют нормальное распределение. Воспользуемся преобразованием задачи вида (1)–(2) к оценочной задаче (3), потребовав выполнения ограничения (6) с вероятностью α_1 и ограничений (5), (7) и (8) с вероятностью α_2 . Результаты решения задачи при разных значениях требуемой вероятности выполнения ограничений приведены в таблице 1. Легко заметить логичную связь между требуемой вероятностью выполне-

ния ограничений и значением критерия: чем больше вероятность, тем больше значение критерия. При этом вероятность выполнения ограничения надо понимать следующим образом: чем больше вероятность, тем больше размер той области, на которой требуется выполнение ограничения.

Таблица 1 - Решение номинальной задачи и одноступенчатой задачи при разных вероятностях выполнения ограничений

Вид задачи	f	$V_{\text{аэр}}$	$V_{\text{рег}}$	$V_{\text{отс}}$	G
Номинал	2055,4	2225,6	1112,8	1037,2	2158,7
$\alpha_1 = 0,75$ $\alpha_2 = 0,75$	2111,5	2388,6	1194,3	900,8	2317,5
$\alpha_1 = 0,75$ $\alpha_2 = 0,99$	2130,4	2425,4	1212,7	891,3	2353,2
$\alpha_1 = 0,95$ $\alpha_2 = 0,99$	2149,9	2458,1	1229	892,4	2384,9
$\alpha_1 = 1$ $\alpha_2 = 1$	2152	2458,1	1229	899,3	2384,9

В таблице 1 также приведено решение номинальной задачи, решение которой проводилось в средней точке по неопределенным параметрам. Однако, как видно из таблицы 2, найденное решение номинальной задачи не гарантирует выполнение ограничений при росте объема сточных вод и концентрации фенолов.

Таблица 2 - Материальный баланс потоков в оптимальной точке номинальной задачи

№	v	s^1	s^2	s^3	s^4	x	y
Номинальная нагрузка							
1	174	707,0	5,64	11,0	192	0	0,0
2	597	71,95	0,0078	0,56	0,39	8274	7,57
3	183	71,95	0,0078	0,56	0,39	15	7,57
4	414	71,95	0,0078	0,56	0,39	11881	61,25
5	0,02	72,29	0,0079	0,56	0,40	11924	60,23
6	423	72,29	0,0079	0,56	0,40	11924	60,23
7	423	68,59	0,0011	0,18	0,36	11927	0,022
Увеличенная нагрузка							
1	182	707,0	5,92	11,0	209	0	0,0
2	634	75,69	0,0094	0,65	0,43	8015	7,56
3	192	75,69	0,0094	0,65	0,43	15	7,56
4	441	75,69	0,0094	0,65	0,43	11453	56,06
5	0,02	76,05	0,0095	0,66	0,44	11486	55,13
6	451	76,05	0,0095	0,66	0,44	11486	55,13
7	451	72,24	0,0013	0,19	0,39	11489	0,024

Литература

- Зиятдинов Н.Н., Рыжов Д.А., Лаптева Т.В., Курбатов В.А. Поиск энергосберегающих режимов работы установки разделения изоамилен-изопреновой фракции производства изопрена. *Вестник КТУ*, 6, 249-258 (2009).

2. Островский Г.М., Зиятдинов Н.Н., Лаптева Т.В., Первухин Д.Д. Одностадийные задачи оптимизации химико-технологических процессов с мягкими ограничениями. *Доклады Академии наук*, **425**, 1, 63-66 (2009).
3. Островский Г.М., Зиятдинов Н.Н., Лаптева Т.В., Первухин Д.Д. Оптимизация химико-технологических процессов с вероятностными ограничениями. *ТОХТ*, **44**, 5, 507-515 (2009).
4. Лаптева Т.В., Зиятдинов Н.Н., Первухин Д.Д. Подходы к аппроксимации критерия в одноэтапной задаче оптимального проектирования с учетом неопределенности. *Вестник КТУ*, 12, 216-219 (2012).
5. Шарифуллин В.Н., Зиятдинов Н.Н., Конончук Р.М. Моделирование системы аэробной биоочистки сточных вод. – *Биотехнология*, 5, 55-60 (1999).
6. Островский Г.М., Зиятдинов Н.Н., Лаптева Т.В., Первухин И.Д. Оценка гибкости химико-технологических систем. *ТОХТ*, **41**, 249-261 (2007).
7. Кафаров В.В. *Основы массопередачи: Учебное пособие для вузов*. М., Высшая школа, 1972. 496 с.
8. Calderbank P.H. Mass transfer in Fermentation Equipment in Blakebrough. – *Biochemical and Biological Eng. Sci.*, London, Academic Press, 1, 101-108 (1967).
9. Вавилин В.А., Васильев В.Б. *Математическое моделирование процессов биологической очистки сточных вод активным илом*. М., Наука, 1978. 119 с.

© **Т. В. Лаптева** - к.т.н., доц. каф. системотехники КНИТУ, tanlapteva@yandex.ru; **Н. Н. Зиятдинов** - д.т.н., проф., зав. каф. системотехники КНИТУ, nnziat@yandex.ru; **Д. Д. Первухин** – асп. той же кафедры, avylon@kstu.ru.