

УДК 66.048.37

С. В. Анаников

ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ПРИ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО КОЛЬЦЕВОГО СЕЧЕНИЯ

Ключевые слова: температурное поле, локальный тепловой поток, эллиптический кольцевой цилиндр, краевая задача, собственные значения, собственные функции, обычное и модифицированное уравнения Матье.

Рассматривается температурное поле при течении жидкости в полубесконечном цилиндрическом канале с сечением в форме эллиптического кольца при граничных условиях первого рода. Задача решается методом разделения переменных. В результате, она приводится к трем краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Две краевые задачи ставятся для обычного и модифицированного уравнений Матье. Получены решения для температурного поля в жидкости и удельных тепловых потоков на стенки канала.

Keywords: temperature field, local stream of heat, elliptical cilindric canal in form of ring, boundary task, own values, own functions, ordinary and modified equations of Mathieu.

The temperature field moving liquid into half-infinite canal which has cross section in form elliptical ring at mixed boundary conditions is studied. The task is resolved by method of dividing variables. As result it is reduced at three boundary tasks for ordinary differential equations of second order. Two differential equations of three are usual and modified equations of Mathieu. Solutions obtain for temperature field into liquid and specific heat stream on the walls of canal.

В статье ставится и решается задача о теплоотдаче движущейся жидкости в полубесконечном цилиндрическом канале, имеющем сечение в форме эллиптического кольца, при граничных условиях первого рода. Данная задача продолжает серию работ, опубликованных в [1-10].

Математическая постановка задачи

Даны два осесимметричных полубесконечных эллиптических цилиндра, образующих канал в форме эллиптического кольца. Между ними в осевом направлении (вдоль оси z) перемещается греющая жидкость с постоянной средней скоростью v . Компоненты скорости вдоль других осей декартовой системы координат предполагаются равными нулю.

В начальное сечение канала подается горячая жидкость, температура которой в общем случае является функцией координат. В частном случае эта температура может принимать постоянное значение.

Температура внутренней и наружной стенок эллиптического канала, обращенных к жидкости, равна соответственно T_{cm1} и T_{cm2} ($T_{cm1} \neq T_{cm2}$). В частных случаях может быть $T_{cm1} = T_{cm2}$, $T_{cm1} > T_{cm2}$, $T_{cm1} < T_{cm2}$. Расход греющей жидкости – Q .

Требуется найти температурное поле в жидкости и локальный удельный тепловой поток на стенки канала.

Дифференциальное уравнение энергии, преобразованное из декартовой системы координат к координатам эллиптического цилиндра, согласно [2,10], позволяет записать поставленную краевую задачу

$$v \frac{\partial T(\xi, \eta, z)}{\partial z} = a^2 \left\{ \frac{2c^{-2}}{ch2\xi - \cos 2\eta} \left[\frac{\partial^2 T(\xi, \eta, z)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T(\xi, \eta, z)}{\partial \eta^2} \right] + \frac{\partial^2 T(\xi, \eta, z)}{\partial z^2} \right\}, \quad (1)$$

$$\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z < \infty,$$

$$T(\xi_1, \eta, z) = T_{cm1}, \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z < \infty, \quad (2)$$

$$T(\xi_2, \eta, z) = T_{cm2}, \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z < \infty, \quad (3)$$

$$T(\xi, \eta, z) = T(\xi, \eta + \pi, z), \quad \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \quad (4)$$

$$0 \leq \eta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z < \infty.$$

$$T(\xi, \eta, 0) = F(\xi, \eta), \quad \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi, \quad (5)$$

$$\frac{\partial T(\xi, \eta, \infty)}{\partial z} = 0, \quad \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi. \quad (6)$$

Здесь предполагается общий случай симметричного распределения температуры вдоль координат ξ и η на входе в канал ($z = 0$).

Для решения задачи (1)-(6) ее следует редуцировать при помощи замены

$$T(\xi, \eta, z) = T_1(\xi, \eta, z) + T_2(\xi). \quad (7)$$

на две задачи

$$\frac{v}{a^2} \frac{\partial T_1(\xi, \eta, z)}{\partial z} = \frac{2c^{-2}}{ch2\xi - \cos 2\eta} \left[\frac{\partial^2 T_1(\xi, \eta, z)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T_1(\xi, \eta, z)}{\partial \eta^2} \right] + \frac{\partial^2 T_1(\xi, \eta, z)}{\partial z^2}, \quad (8)$$

$$\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z < \infty,$$

$$T_1(\xi_1, \eta, z) = 0, \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z < \infty, \quad (9)$$

$$T_1(\xi_2, \eta, z) = 0, \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z < \infty, \quad (10)$$

$$T_1(\xi, \eta, z) = T_1(\xi, \eta + \pi, z), \quad (11)$$

$$0 \leq \eta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z < \infty.$$

$$T_1(\xi, \eta, 0) = F(\xi, \eta) - T_2(\xi), \quad (12)$$

$$\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi,$$

$$\frac{\partial T_1(\xi, \eta, \infty)}{\partial z} = 0, \quad \xi_1 \leq \xi \leq \xi_2, \quad 0 \leq \eta \leq 2\pi. \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 T_2(\xi)}{d\xi^2} = 0, \quad (14)$$

$$T_2(\xi_1) = T_{cm1}, \quad (15)$$

$$T_2(\xi_2) = T_{cm2}. \quad (16)$$

В (14) частная производная по ξ заменена, по очевидным соображениям, на полную производную.

Решением (14)-(16) будет функция

$$T_2(\xi) = \frac{T_{cm1}\xi_2 - T_{cm2}\xi_1}{\xi_2 - \xi_1} + \frac{T_{cm2} - T_{cm1}}{\xi_2 - \xi_1} \xi. \quad (17)$$

Задача(8)-(13) решается методом разделения переменных.

Если положить

$$T_1(\xi, \eta, z) = f(\xi, \eta)Z(z), \quad (18)$$

то можно получить

$$\frac{\nu}{a^2} \frac{Z'(z)}{Z(z)} - \frac{Z''(z)}{Z(z)} = \frac{2c^{-2}}{ch2\xi - \cos 2\eta} \left[\frac{\partial^2 f(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \right] \frac{1}{f(\xi, \eta)} = -\nu^2 (\nu > 0).$$

Откуда

$$Z''(z) - \frac{\nu}{a^2} Z'(z) - \nu^2 Z(z) = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 f(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 f(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + 2k(ch2\xi - \cos 2\eta) \times f(\xi, \eta) = 0,$$

где $k = \nu^2 c^2 / 4$, ν - константа разделения.

Последующее разделение переменных

$$f(\xi, \eta) = \psi(\xi)\phi(\eta), \quad (19a)$$

даёт

$$\frac{1}{\psi} \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} + 2kch2\xi = -\frac{1}{\phi} \frac{d^2 \phi}{d\eta^2} + 2k \cos 2\eta = h (h > 0).$$

Это приводит к обычному и модифицированному уравнениям Матье

$$\frac{d^2 \phi}{d\eta^2} + (h - 2k \cos 2\eta)\phi = 0,$$

$$\frac{d^2 \psi}{d\xi^2} - (h - 2kch2\xi)\psi = 0,$$

где h - постоянная разделения.

В итоге получаются три граничные задачи

$$Z''(z) - \frac{\nu}{a^2} Z'(z) - \nu^2 Z(z) = 0, \quad (20)$$

$$\frac{dZ(\infty)}{dz} = 0; \quad (21)$$

$$\phi''(\eta) + (h - 2k \cos 2\eta)\phi(\eta) = 0, \quad (22)$$

$$\phi(\eta) = \phi(\eta + \pi); \quad (23)$$

$$\psi''(\xi) - (h - 2kch2\xi)\psi(\eta) = 0, \quad (24)$$

$$\psi(\xi_1) = 0, \quad (25)$$

$$\psi(\xi_2) = 0. \quad (26)$$

Решением (20), (21) будет выражение

$$Z(z) = \exp \left[-\frac{\sqrt{\nu^2 + 4a^4\nu^2} - \nu}{2a^2} z \right]. \quad (27)$$

Здесь произвольная постоянная как малозначимая опущена.

Решается задача (22), (23).

Функция $\phi(\eta)$ должна быть однозначной и периодической относительно координаты η . Поскольку рассматривается случай, когда распределение температуры симметрично относительно обеих осей эллипса, то функция $\phi(\eta)$ должна быть четной и иметь период π относительно η .

Решение (22), (23), с учетом вышеизложенного, приводит к выбору обычной функции Матье первого рода

$$\phi(\eta) = ce_{2n}(\eta, k). \quad (28)$$

Решением уравнения (24) будут модифицированные функции Матье первого и второго рода

$$\psi(\xi) = C_{2n}Ce_{2n}(\xi, k) + F_{2n}Fe_{2n}(\xi, k), \quad (29)$$

Использование граничных условий (25), (26) позволяет получить систему уравнений для определения коэффициентов C_{2n} , F_{2n}

$$C_{2n}Ce_{2n}(\xi_1, k) + F_{2n}Fe_{2n}(\xi_1, k) = 0, \quad (30)$$

$$C_{2n}Ce_{2n}(\xi_2, k) + F_{2n}Fe_{2n}(\xi_2, k) = 0.$$

Характеристическое уравнение для нахождения собственных значений k из соотношений (30) может быть получено из условия

$$\begin{vmatrix} Ce_{2n}(\xi_1, k) & Fe_{2n}(\xi_1, k) \\ Ce_{2n}(\xi_2, k) & Fe_{2n}(\xi_2, k) \end{vmatrix} = 0. \quad (31)$$

Данное условие позволяет получить нетривиальное решение системы (30), относительно искомых коэффициентов.

Таким образом, решением уравнения (19) должна быть, согласно (19a), (28), (29) функция

$$f(\xi, \eta) = [C_{2n}Ce_{2n}(\xi, k) + F_{2n}Fe_{2n}(\xi, k)] \times ce_{2n}(\eta, k). \quad (32)$$

Тогда на основании (18), (27), (32) будет

$$T_1(\xi, \eta, z) = f(\xi, \eta)Z(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [C_{2n}Ce_{2n}(\xi, k) + F_{2n}Fe_{2n}(\xi, k)] ce_{2n}(\eta, k) \times \exp \left[-\frac{\sqrt{\nu^2 + 4a^4\nu^2} - \nu}{2a^2} z \right].$$

Или с учетом (31) и данного выражения будет

$$T_1(\xi, \eta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [C_{2n} C e_{2n}(\xi, k_{2n,m}) + F_{2n} F e_{2n}(\xi, k_{2n,m})] c e_{2n}(\eta, k_{2n,m}) \times \exp \left[-\frac{\sqrt{v^2 + 4a^4 v^2} - v}{2a^2} z \right]. \quad (33)$$

Здесь $k_{2n,m}$ - корни характеристического уравнения, полученного на основе (31)

$$C e_{2n}(\xi_1, k_{2n,m}) F e_{2n}(\xi_2, k_{2n,m}) - F e_{2n}(\xi_1, k_{2n,m}) \times C e_{2n}(\xi_2, k_{2n,m}) = 0. \quad (34)$$

Если выразить F_{2n} из первого уравнения системы (30) и подставить в соотношение (33), то будет

$$T_1(\xi, \eta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{2n,m} [F e_{2n}(\xi_1, k_{2n,m}) \times C e_{2n}(\xi, k_{2n,m}) - C e_{2n}(\xi_1, k_{2n,m}) \times F e_{2n}(\xi, k_{2n,m})] c e_{2n}(\eta, k_{2n,m}) \times \exp \left[-\frac{\sqrt{v^2 + 4a^4 v_{2n,m}^2} - v}{2a^2} z \right], \quad (35)$$

где $A_{2n,m} = C_{2n} / F e_{2n}(\xi_1, k_{2n,m})$, $v_{2n,m}^2 = 4k_{2n,m}^2 / c^2$.

Вводятся обозначения

$$V_{2n,m}(\xi, k_{2n,m}) = F e_{2n}(\xi_1, k_{2n,m}) C e_{2n}(\xi, k_{2n,m}) - C e_{2n}(\xi_1, k_{2n,m}) F e_{2n}(\xi, k_{2n,m}). \quad (36)$$

Тогда (35) принимает вид

$$T_1(\xi, \eta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{2n,m} V_{2n,m}(\xi, k_{2n,m}) \times c e_{2n}(\eta, k_{2n,m}) \exp \left[-\frac{\sqrt{v^2 + 4a^4 v_{2n,m}^2} - v}{2a^2} z \right]. \quad (37)$$

Применение условия (12) к (37) приводит к выражению

$$F(\xi, \eta) - T_2(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{2n,m} V_{2n,m}(\xi, k_{2n,m}) \times c e_{2n}(\eta, k_{2n,m}). \quad (38)$$

Другими словами, необходимо разложить функцию $F(\xi, \eta) - T_2(\xi)$ согласно (36), (38) по произведениям обычных и модифицированных (присоединенных) функций Маттье.

Можно показать, что функции Маттье ортогональны в промежутке изменения ξ от ξ_1 до ξ_2 (то есть для эллиптического кольца) [10].

Следует заметить, что, поскольку функции $\psi(\xi) = C e_{2n}(\xi, k_{2n,m})$ и $\psi(\xi) = F e_{2n}(\xi, k_{2n,m})$ удовлетворяют одному и тому же уравнению (24), то и функция $V_{2n}(\xi, k_{2n,m})$ удовлетворяет этому же уравнению.

Выражение (38) с учетом (17) в развернутом виде приводит к соотношению

$$F(\xi, \eta) - \frac{T_{cm1} \xi_2 - T_{cm2} \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} - \frac{T_{cm2} - T_{cm1}}{\xi_2 - \xi_1} \xi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{2n,m} V_{2n,m}(\xi, k_{2n,m}) c e_{2n}(\eta, k_{2n,m}). \quad (39)$$

Для определения коэффициентов $A_{2n,m}$ в (39) обе части данного соотношения умножаются на $V_{2p,r}(\xi, k_{2p,r}) c e_{2p}(\eta, k_{2p,r}) (ch 2\xi - \cos 2\eta)$ и интегри-

руются по η от 0 до 2π и по ξ от ξ_1 до ξ_2 . Тогда все члены ряда, содержащиеся в правой части, обращаются в ноль, кроме члена, для которого $p = n, r = m$.

В итоге получаются следующие коэффициенты

$$A_{2n,m} = \frac{\int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_0^{2\pi} \left[F(\xi, \eta) - \frac{T_{cm1} \xi_2 - T_{cm2} \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} - \frac{T_{cm2} - T_{cm1}}{\xi_2 - \xi_1} \xi \right] V_{2n,m}(\xi, k_{2n,m}) c e_{2n}(\eta, k_{2n,m}) \times (ch 2\xi - \cos 2\eta) d\xi d\eta}{\int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_0^{2\pi} V_{2n,m}^2(\xi, k_{2n,m}) \times (ch 2\xi - \cos 2\eta) d\xi d\eta}. \quad (40)$$

С использованием (40) выражение (37) принимает вид

$$T_1(\xi, \eta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_0^{2\pi} \left[F(\xi, \eta) - \frac{T_{cm1} \xi_2 - T_{cm2} \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} - \frac{T_{cm2} - T_{cm1}}{\xi_2 - \xi_1} \xi \right] V_{2n,m}(\xi, k_{2n,m}) \times c e_{2n}(\eta, k_{2n,m}) \times (ch 2\xi - \cos 2\eta) d\xi d\eta}{\int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_0^{2\pi} V_{2n,m}^2(\xi, k_{2n,m}) \times (ch 2\xi - \cos 2\eta) d\xi d\eta} \times c e_{2n}(\eta, k_{2n,m}) \times \exp \left[-\frac{\sqrt{v^2 + 4a^4 v_{2n,m}^2} - v}{2a^2} z \right]. \quad (41)$$

На основании (7), (17) и (41) получается окончательное искоемое решение задачи

$$T(\xi, \eta, z) = \frac{T_{cm1} \xi_2 - T_{cm2} \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} + \frac{T_{cm2} - T_{cm1}}{\xi_2 - \xi_1} \xi + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_0^{2\pi} \left[F(\xi, \eta) - \frac{T_{cm1} \xi_2 - T_{cm2} \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} - \frac{T_{cm2} - T_{cm1}}{\xi_2 - \xi_1} \xi \right] V_{2n,m}(\xi, k_{2n,m}) \times c e_{2n}(\eta, k_{2n,m}) \times (ch 2\xi - \cos 2\eta) d\xi d\eta}{\int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_0^{2\pi} V_{2n,m}^2(\xi, k_{2n,m}) \times (ch 2\xi - \cos 2\eta) d\xi d\eta} \times c e_{2n}(\eta, k_{2n,m}) \times \exp \left[-\frac{\sqrt{v^2 + 4a^4 v_{2n,m}^2} - v}{2a^2} z \right].$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{T_{cm2} - T_{cm1}}{\xi_2 - \xi_1} \xi \left] V_{2n,m}(\xi, k_{2n,m}) ce_{2n}(\eta, k_{2n,m}) \times \right. \\
& \quad \times ce_{2n}^2(\eta, k_{2n,m}) (ch2\xi - \cos 2\eta) d\xi d\eta \\
& \times (ch2\xi - \cos 2\eta) d\xi d\eta \left. V_{2n,m}(\xi, k_{2n,m}) \times \right. \\
& \quad \times ce_{2n}(\eta, k_{2n,m}) \times \\
& \quad \times \exp \left[- \frac{\sqrt{v^2 + 4a^4 v_{2n,m}^2} - v}{2a^2} z \right]. \quad (42)
\end{aligned}$$

Таким образом для получения числового результата необходимо совместно рассмотреть решение (42), используя выражение (36) для $V_{2n,m}(\xi, k_{2n,m})$, и характеристическое уравнение (34).

Выражения для удельных тепловых потоков на стенки канала запишутся следующим образом.

На внутреннюю стенку канала

$$\begin{aligned}
q|_{\xi=\xi_1} &= \frac{\lambda_{жс}}{c \sqrt{ch^2 \xi_1 - \cos^2 \eta}} \frac{\partial T(\xi, \eta, z)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_1} \\
\text{или} \\
q|_{\xi=\xi_1} &= \frac{\lambda_{жс}}{c \sqrt{ch^2 \xi_1 - \cos^2 \eta}} \left\{ \frac{T_{cm2} - T_{cm1}}{\xi_2 - \xi_1} + \right. \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_0^{2\pi} \left[F(\xi, \eta) - \frac{T_{cm1}\xi_2 - T_{cm2}\xi_1}{\xi_2 - \xi_1} - \right. \\
& \quad \left. \left. \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_0^{2\pi} V_{2n,m}^2(\xi, k_{2n,m}) \times \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{T_{cm2} - T_{cm1}}{\xi_2 - \xi_1} \xi \right] V_{2n,m}(\xi, k_{2n,m}) ce_{2n}(\eta, k_{2n,m}) \times \right. \\
& \quad \left. \times ce_{2n}^2(\eta, k_{2n,m}) (ch2\xi - \cos 2\eta) d\xi d\eta \right. \\
& \quad \left. \times (ch2\xi - \cos 2\eta) d\xi d\eta \times \right. \\
& \quad \left. \times V'_{2n,m}(\xi, k_{2n,m}) \Big|_{\xi=\xi_1} ce_{2n}(\eta, k_{2n,m}) \times \right. \\
& \quad \left. \times \exp \left[- \frac{\sqrt{v^2 + 4a^4 v_{2n,m}^2} - v}{2a^2} z \right] \right\}. \quad (43)
\end{aligned}$$

На внешнюю стенку канала

$$\begin{aligned}
q|_{\xi=\xi_2} &= - \frac{\lambda_{жс}}{c \sqrt{ch^2 \xi_2 - \cos^2 \eta}} \frac{\partial T(\xi, \eta, z)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=\xi_2} \\
\text{или} \\
q|_{\xi=\xi_2} &= - \frac{\lambda_{жс}}{c \sqrt{ch^2 \xi_2 - \cos^2 \eta}} \left\{ \frac{T_{cm2} - T_{cm1}}{\xi_2 - \xi_1} + \right. \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_0^{2\pi} \left[F(\xi, \eta) - \frac{T_{cm1}\xi_2 - T_{cm2}\xi_1}{\xi_2 - \xi_1} - \right. \\
& \quad \left. \left. \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_0^{2\pi} V_{2n,m}^2(\xi, k_{2n,m}) \times \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{T_{cm2} - T_{cm1}}{\xi_2 - \xi_1} \xi \left] V_{2n,m}(\xi, k_{2n,m}) ce_{2n}(\eta, k_{2n,m}) \times \right. \\
& \quad \times ce_{2n}^2(\eta, k_{2n,m}) (ch2\xi - \cos 2\eta) d\xi d\eta \\
& \times (ch2\xi - \cos 2\eta) d\xi d\eta \left. \times \right. \\
& \quad \times V'_{2n,m}(\xi, k_{2n,m}) \Big|_{\xi=\xi_2} ce_{2n}(\eta, k_{2n,m}) \times \\
& \quad \times \exp \left[- \frac{\sqrt{v^2 + 4a^4 v_{2n,m}^2} - v}{2a^2} z \right] \Big\}. \quad (44)
\end{aligned}$$

Здесь следует попутно отметить, что [11]

$$c \sqrt{ch^2 \xi - \cos^2 \eta} \equiv c \sqrt{\frac{ch2\xi - \cos 2\eta}{2}}.$$

Если условие (5) упростить и принять, что $T(\xi, \eta, 0) = T_\Gamma$ или $F(\xi, \eta) = T_\Gamma$, где T_Γ - температура горячей жидкости в начальном сечении эллиптического цилиндра, то решения упрощаются

$$\begin{aligned}
T(\xi, \eta, z) &= \frac{T_{cm1}\xi_2 - T_{cm2}\xi_1}{\xi_2 - \xi_1} + \frac{T_{cm2} - T_{cm1}}{\xi_2 - \xi_1} \xi + \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\int_{\xi_1}^{\xi_2} \left[T_\Gamma - \frac{T_{cm1}\xi_2 - T_{cm2}\xi_1}{\xi_2 - \xi_1} - \right. \\
& \quad \left. \int_{\xi_1}^{\xi_2} V_{2n,m}^2(\xi, k_{2n,m}) \times \right. \\
& \quad \left. - \frac{T_{cm2} - T_{cm1}}{\xi_2 - \xi_1} \xi \right] V_{2n,m}(\xi, k_{2n,m}) \times \\
& \quad \times (ch2\xi - \theta_{2n}) d\xi}{\int_{\xi_1}^{\xi_2} V_{2n,m}^2(\xi, k_{2n,m}) \times} \\
& \times \left[2A_0^{(2n)} ch2\xi - A_2^{(2n)} \right] d\xi \times \\
& \times V_{2n,m}(\xi, k_{2n,m}) ce_{2n}(\eta, k_{2n,m}) \times \\
& \times \exp \left[- \frac{\sqrt{v^2 + 4a^4 v_{2n,m}^2} - v}{2a^2} z \right]. \quad (42a)
\end{aligned}$$

Удельный тепловой поток на внутреннюю стенку канала

$$\begin{aligned}
q|_{\xi=\xi_1} &= \frac{\lambda_{жс}}{c \sqrt{ch^2 \xi_1 - \cos^2 \eta}} \left\{ \frac{T_{cm2} - T_{cm1}}{\xi_2 - \xi_1} + \right. \\
& + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\int_{\xi_1}^{\xi_2} \left[T_\Gamma - \frac{T_{cm1}\xi_2 - T_{cm2}\xi_1}{\xi_2 - \xi_1} - \right. \\
& \quad \left. \int_{\xi_1}^{\xi_2} V_{2n,m}^2(\xi, k_{2n,m}) \times \right. \\
& \quad \left. - \frac{T_{cm2} - T_{cm1}}{\xi_2 - \xi_1} \xi \right] V_{2n,m}(\xi, k_{2n,m}) \times \\
& \quad \times (ch2\xi - \theta_{2n}) d\xi}{\int_{\xi_1}^{\xi_2} V_{2n,m}^2(\xi, k_{2n,m}) \times} \\
& \times \left[2A_0^{(2n)} ch2\xi - A_2^{(2n)} \right] d\xi \times
\end{aligned}$$

$$\times V'_{2n,m}(\xi, k_{2n,m}) \Big|_{\xi=\xi_1}^{ce_{2n}(\eta, k_{2n,m})} \times \exp \left[-\frac{\sqrt{v^2 + 4a^4 v_{2n,m}^2} - v}{2a^2} z \right] \Bigg\}. \quad (43a)$$

Удельный тепловой поток на внешнюю стенку канала

$$q \Big|_{\xi=\xi_2} = -\frac{\lambda_{жс}}{c \sqrt{ch^2 \xi_2^2 - \cos^2 \eta}} \left\{ \frac{T_{cm2} - T_{cm1}}{\xi_2 - \xi_1} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\int_{\xi_1}^{\xi_2} \left[T_{\Gamma} - \frac{T_{cm1} \xi_2 - T_{cm2} \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} - \int_{\xi_1}^{\xi_2} V'_{2n,m}(\xi, k_{2n,m}) \times \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{T_{cm2} - T_{cm1}}{\xi_2 - \xi_1} \xi \right] V_{2n,m}(\xi, k_{2n,m}) \times \right. \\ \left. \times (ch2\xi - \theta_{2n}) d\xi \right. \\ \left. \times \left[2A_0^{(2n)} ch2\xi - A_2^{(2n)} \right] d\xi \right\} \times \\ \times V'_{2n,m}(\xi, k_{2n,m}) \Big|_{\xi=\xi_2}^{ce_{2n}(\eta, k_{2n,m})} \times \exp \left[-\frac{\sqrt{v^2 + 4a^4 v_{2n,m}^2} - v}{2a^2} z \right] \Bigg\}. \quad (44a)$$

В соотношениях (42a)-(44a) было также учтено, что [11]

$$\int_0^{2\pi} ce_{2n}^2(\eta, k_{2n,m}) d\eta = \pi, \\ \int_0^{2\pi} ce_{2n}(\eta, k_{2n,m}) \cos 2\eta d\eta = \pi A_2^{(2n)}, \\ \int_0^{2\pi} ce_{2n}(\eta, k_{2n,m}) d\eta = 2\pi A_0^{(2n)}, \\ \int_0^{2\pi} ce_{2n}^2(\eta, k_{2n,m}) \cos 2\eta d\eta = \pi \theta_{2n}. \\ \theta_{2n} = A_0^{(2n)} A_2^{(2n)} + \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2n)} A_{2r+2}^{(2n)}.$$

Последний вариант записи решений при $F(\xi, \eta) = T_{\Gamma}$ в виде (42a)-(44a) более удобен для вычислений, так как коэффициенты разложений $A_0^{(2n)}$, $A_2^{(2n)}$ и другие протабулированы [12].

Обозначения

$T(\xi, \eta, z)$ - текущая температура жидкости в эллиптических координатах, К;
 v - средняя постоянная скорость движения жидкости в кольцевом эллиптическом канале, м/с;

T_{Γ} - температура горячей жидкости на входе в канал при $z = 0$, К;

T_{cm1}, T_{cm2} - температуры внутренней и наружной стенок канала соответственно при $\xi = \xi_1$, и $\xi = \xi_2$, К;

a^2 - коэффициент температуропроводности жидкости, м²/с;

c - фокусное расстояние эллипса, м;

ξ, η - эллиптические координаты (безр., рад.);

ξ_1, ξ_2 - внутренняя и внешняя границы канала, безр.;

$k_{2n,m}$ - корни характеристического уравнения (34);

$Ce_{2n}(\xi, k)$, $Ce_{2n}(\xi, k_{2n,m})$, $Ce_{2n}(\xi_1, k)$, $Ce_{2n}(\xi_1, k_{2n,m})$, $Ce_{2n}(\xi_2, k)$, $Ce_{2n}(\xi_2, k_{2n,m})$ - модифицированные

функции Матье первого рода при h , k и $k_{2n,m}$ действительных и отличных от нуля;

$Fey_{2n}(\xi, k)$, $Fey_{2n}(\xi, k_{2n,m})$, $Fey_{2n}(\xi_1, k)$, $Fey_{2n}(\xi_1, k_{2n,m})$, $Fey_{2n}(\xi_2, k)$, $Fey_{2n}(\xi_2, k_{2n,m})$ -

модифицированные функции Матье второго рода при h , k и $k_{2n,m}$ действительных и отличных от нуля;

$ce_{2n}(\eta, k)$, $ce_{2n}(\eta, k_{2n,m})$ - обычные функции Матье первого рода при h , k и $k_{2n,m}$ действительных и отличных от нуля;

A_{2n} , C_{2n} , F_{2n} - определяемые константы;

Q - объемный расход жидкости, (м³/с, м³/ч);

$\lambda_{ж}$ - теплопроводность жидкости, Вт/(м К);

q - удельный тепловой поток, Вт/м².

Литература

1. С.В. Анаников, М.Ю. Сорокин, В.П. Бурдилов, Э.В. Чиркунов, Теоретические основы химической технологии (ТОХТ), **38**, 6, 655-660 (2004).
2. С.В. Анаников, Вестник Казанского технологического университета, **15**, 6, 42-46 (2012).
3. С.В. Анаников, Вестник Казанского технологического университета, **15**, 6, 147-150 (2012).
4. С.В. Анаников, Вестник Казанского технологического университета, **15**, 11, 143-145 (2012).
5. С.В. Анаников, Вестник Казанского технологического университета, **15**, 14, 90-93 (2012).
6. С.В. Анаников, М.Ю. Сорокин, Вестник Казанского технологического университета, **15**, 18, 58-63 (2012).
7. С.В. Анаников, Вестник Казанского технологического университета, **15**, 20, 56-61 (2012).
8. С.В. Анаников, Вестник Казанского технологического университета, **16**, 2, 52-55 (2013).
9. С.В. Анаников, Вестник Казанского технологического университета, **16**, 3, 58-62 (2013).
10. С.В. Анаников, М.Ю. Сорокин, Вестник Казанского технологического университета, **16**, 6, 58-63 (2013).
11. Мак-Лахлан Н.В., Теория и приложения функций Маттье. Иностранная литература. Москва. 1953. 476с.
12. Стретт М.Д.О. Функции Ляме, Маттье и родственные им в физике и технике. ГНТИ Украины, Харьков-Киев. 1935. 238с.