ГИДРОДИНАМИКА, ТЕПЛО- И МАССООБМЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ, ЭНЕРГЕТИКА

УДК 66.048.37

С. В. Анаников

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В ЖИДКОСТИ, ПЕРЕМЕЩАЕМОЙ В РАДИАЛЬНО-РАСХОДЯЩЕМСЯ КАНАЛЕ

Ключевые слова: нестационарное температурное поле, удельный тепловой поток, радиально-расходящийся канал, собственные значения, собственные функции, бесселевы функции.

Решается начально-краевая задача с граничными условиями третьего рода о теплообмене в потоке нагретой жидкости, перемещаемой в бесконечно-протяженном радиально-расходящемся канале. Записывается уравнение энергии в движущейся среде в цилиндрических координатах. Учитываются симметрия канала относительно оси z, перенос тепла теплопроводностью и конвекцией в направлении радиальной координаты r, и теплопроводностью – в направлении оси z. Решение проводится методом разделения переменных. В результате получены соотношения для расчета неустановившегося температурного поля в жидкости, которые выражаются с помощью бесселевых функций второго рода действительного и мнимого аргументов дробного порядка и экспоненциальных функций.

Keywords: unstable temperature field, specific stream of heat, radial-divergence canal, characteristic number, characteristic functions, bessel's functions.

The third of kind initial-boundary task is solved for heat change of hot liquid stream transferring into infinitely large length radial-divergence canal. Is written equation of energy for moving of liquid in cilindric coordinates. Is taken into consideration symmetric of canal along axis z, transfer of heat by conduction and convection along axis r, along coordinate z - by conduction. Solution is obtained by method of divided variable quantities. In result are obtained correlations for account unstable temperature field into liquid. The correlations are described by bessel's functions of second kind real and imaginary arguments of fractional order and exponential functions.

В статье ставится и решается задача о неустановившемся температурном поле в жидкости, перемещаемой в радиально-расходящемся бесконечно-протяженном канале. Она расширяет тематику ранее решенных задач [1-8].

Используемая расчетная схема приведена в рассмотренных работах [5,6]. Начальные и граничные условия представлены на рис. 1.

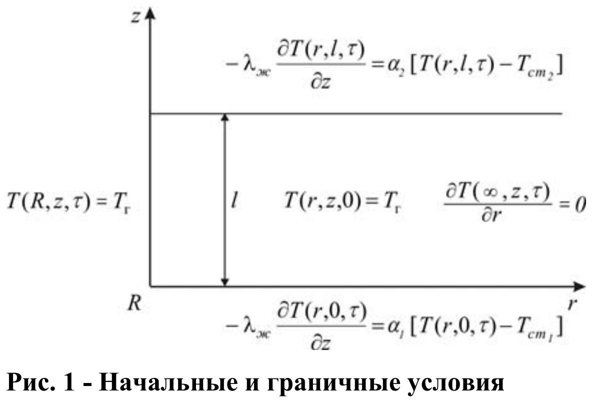

Рис. 1 - Начальные и граничные условия

Постановка задачи

Даны две плоскопараллельные круглые пластины неограниченного радиуса r. Между пластинами в радиальном направлении в момент начала отсчета времени $\tau = 0$ через штуцер радиуса R от центра к периферии начинает перемещаться нагретая жидкость с переменной средней скоростью V_r. Жидкость на входе $(r = R)$ в любой момент времени имеет постоянную температуру $T_Г$.

Предполагается, что в начальный момент времени жидкостью с температурой $T_Г$ заполнено все пространство между пластинами, то есть имеет место мгновенное заполнение объема между пластинами нагретой жидкостью в момент начала отсчета времени. Температура нижней и верхней пластин, обращенных к жидкости, постоянна и равна T_{cm1} и T_{cm2} соответственно. Причем $T_{cm1} < T_Г$, $T_{cm2} < T_Г$, $T_{cm1} \neq T_{cm2}$.

Между жидкостью и пластинами происходит теплообмен по закону Ньютона с различными коэффициентами теплоотдачи α_1 и α_2.

Расстояние между пластинами равно l.

Секундный объемный расход греющей жидкости равен Q. Требуется найти температурное поле в жидкости $T(r,z,\tau)$.

Начально-краевая задача (рис. 1)

Уравнение энергии для рассматриваемого случая, а также начальные и граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial T(r,z,\tau)}{\partial \tau} + V_r \frac{\partial T(r,z,\tau)}{\partial r} = a^2 \left[\frac{\partial^2 T(r,z,\tau)}{\partial z^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 T(r,z,\tau)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r,z,\tau)}{\partial r} \right],$$

$R \le r < \infty,\ 0 \le z \le l,\ \ 0 \le \tau < \infty,$

$T(r,z,0) = T_Г,\ \ R \le z < \infty,\ \ 0 \le z \le l,$

$T(R,z,\tau) = T_Г,\ \ 0 \le z \le l,\ \ 0 \le \tau < \infty,$

$$\lambda_{ж} \frac{\partial T(r,0,\tau)}{\partial z} = \alpha_1 \left[T(r,0,\tau) - T_{cm1} \right],$$

$R \le r < \infty,\ \ 0 \le \tau < \infty,$

$$-\lambda_{ж} \frac{\partial T(r,l,\tau)}{\partial z} = \alpha_2 \left[T(r,l,\tau) - T_{cm2} \right],$$

$R \le r < \infty,\ \ 0 \le \tau < \infty,$

$$\frac{\partial T(\infty,z,\tau)}{\partial r} = 0,\ \ 0 \le z \le l,\ \ 0 \le \tau < \infty,$$

где $V_r = Q/2\pi r l = b^2/r$ - средняя радиальная скорость в канале, полученная из уравнения неразрывности потока.

Преобразование представленной выше задачи с учетом выражения для V_r позволяет получить

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial T(r,z,\tau)}{\partial \tau} + \frac{c^2}{r} \frac{\partial T(r,z,\tau)}{\partial r} = \frac{\partial^2 T(r,z,\tau)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T(r,z,\tau)}{\partial r^2}, \tag{1}$$

$R \le r < \infty,\ \ 0 \le z \le l,\ \ 0 \le \tau < \infty,$

$$T(r,z,0) = T_Г,\ \ R \le r < \infty,\ \ 0 \le z \le l, \tag{2}$$

$$T(R,z,\tau) = T_Г,\ \ 0 \le z \le l,\ \ 0 \le \tau < \infty, \tag{3}$$

$$\frac{\partial T(r,0,\tau)}{\partial z} - H_1 \left[T(r,0,\tau) - T_{cm1} \right] = 0, \tag{4}$$

$R \le r < \infty,\ \ 0 \le \tau < \infty,$

$$\frac{\partial T(r,l,\tau)}{\partial z} + H_2 \left[T(r,l,\tau) - T_{cm2} \right] = 0, \tag{5}$$

$R \le r < \infty,\ \ 0 \le \tau < \infty,$

$$\frac{\partial T(\infty,z,\tau)}{\partial r} = 0,\ \ 0 \le z \le l,\ \ 0 \le \tau < \infty, \tag{6}$$

где $H_1 = \alpha_1/\lambda_{ж}$, $H_2 = \alpha_2/\lambda_{ж}$,

$c^2 = \left(b^2 - a^2\right)/a^2$.

Редуцирование (1)-(6) с помощью выражения

$$T(r,z,\tau) = T_1(r,z,\tau) + T_2(r,z). \tag{7}$$

дает две задачи

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial T_1(r,z,\tau)}{\partial \tau} + \frac{c^2}{r} \frac{\partial T_1(r,z,\tau)}{\partial r} = \frac{\partial^2 T_1(r,z,\tau)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T_1(r,z,\tau)}{\partial r^2}, \tag{8}$$

$$T_1(r,z,0) = T_Г - T_2(r,z),\quad R \le r < \infty,\ \ 0 \le z \le l, \tag{9}$$

$$T_1(R,z,\tau) = 0,\qquad 0 \le z \le l,\ 0 \le \tau < \infty, \tag{10}$$

$$\frac{\partial T_1(r,0,\tau)}{\partial z} - H_1 T_1(r,0,\tau) = 0, \tag{11}$$

$R \le r < \infty,\ 0 \le \tau < \infty,$

$$\frac{\partial T_1(r,l,\tau)}{\partial z} + H_2 T_1(r,l,\tau) = 0, \tag{12}$$

$R \le r < \infty,\ 0 \le \tau < \infty,$

$$\frac{\partial T_1(\infty,z,\tau)}{\partial r} = 0,\qquad 0 \le z \le l,\ 0 \le \tau < \infty. \tag{13}$$

$$\frac{c^2}{r} \frac{\partial T_2(r,z)}{\partial r} = \frac{\partial^2 T_2(r,z)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 T_2(r,z)}{\partial r^2}, \tag{14}$$

$R \le r < \infty,\ 0 \le z \le l,$

$$T_2(R,z) = T_Г,\ \ 0 \le z \le l, \tag{15}$$

$$\frac{\partial T_2(r,0)}{\partial z} - H_1 \left[T_2(r,0) - T_{cm1} \right] = 0,\ R \le r < \infty, \tag{16}$$

$$\frac{\partial T_2(r,l)}{\partial z} + H_2 \left[T_2(r,l) - T_{cm2} \right] = 0,\ R \le r < \infty, \tag{17}$$

$$\frac{\partial T_2(\infty,z)}{\partial r} = 0,\qquad 0 \le z \le l. \tag{18}$$

Решение начинается с задачи (14)-(18). Вводится новая температурная функция

$$T_2(r,z) = U(r,z) + b_1 + b_2 z. \tag{19}$$

Это позволяет после подстановки (19) в (14)-(18) получить те выражения неизвестных постоянных b_1 и b_2 через параметры задачи, которые дают возможность прийти к однородной краевой задаче относительно функции $U(r,z)$.

Преобразования приводят к системе двух алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов b_1 и b_2

$$-H_1 b_1 + b_2 = -H_1 T_{cm1},$$

$$H_2 b_1 + (1 + H_2 l) b_2 = H_2 T_{cm2}.$$

Решение данной системы по методу Крамера дает

$$b_1 = \frac{H_1 T_{cm1}(1 + H_2 l) + H_2 T_{cm2}}{H_1 + H_1 H_2 l + H_2},$$

$$b_2 = \frac{H_1 H_2 (T_{cm2} - T_{cm1})}{H_1 + H_1 H_2 l + H_2}.$$

В результате задача (14)-(18) преобразуется к виду

$$\frac{c^2}{r} \frac{\partial U(r,z)}{\partial r} = \frac{\partial^2 U(r,z)}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U(r,z)}{\partial r^2}, \tag{14a}$$

$R \le r < \infty,\ \ 0 \le z \le l,$

$$U(R,r) = T_Г - b_1 - b_2 z,\ 0 \le z \le l, \tag{15a}$$

$$\frac{\partial U(r,0)}{\partial z} - H_1 U(r,0) = 0,\ R \le r < \infty, \tag{16a}$$

$$\frac{\partial U(r,l)}{\partial z} + H_2 U(r,l) = 0,\ R \le r < \infty, \tag{17a}$$

$$\frac{\partial U(\infty,z)}{\partial r} = 0,\qquad 0 \le z \le l. \tag{18a}$$

Задача (14a)-(18a) решается методом разделения переменных.

Если положить

$$U(r,z) = F(r) Z(z), \tag{20}$$

то будет

$$-\frac{F''(r)}{F(r)}+\frac{c^2}{r}\frac{F'(r)}{F(r)}=-\varepsilon^2(\varepsilon>0),\ \frac{Z''(z)}{Z(z)}=-\varepsilon^2.$$

Или

$$F''(r)-\frac{c^2}{r}F'(r)-\varepsilon^2F(r)=0 \tag{21}$$

$$F(R)=1, \tag{22}$$

$$\frac{d\,F(\infty)}{d\,r}=0. \tag{23}$$

$$Z'(z)+\varepsilon^2Z(z)=0, \tag{24}$$

$$\frac{d\,Z(0)}{d\,z}-H_1Z(0), \tag{25}$$

$$\frac{dZ(l)}{dZ}+H_2Z(l)=0 \tag{26}$$

Решением (24)-(26) будет [9]

$$Z_n(z)=C_n\left[\cos\left(\mu_n\frac{z}{l}\right)+\frac{H_1l}{\mu_n}\sin\left(\mu_n\frac{z}{l}\right)\right]. \tag{27}$$

Здесь $\mu_n=\varepsilon_nl$ - корни характеристического уравнения

$$\operatorname{tg}\mu_n=\frac{(H_1+H_2)\mu_nl}{\mu_n^2-H_1H_2l^2},\ n=1,2,3,\dots. \tag{28}$$

Решением (21) с учетом ε_n задачи (24)-(26) является выражение [9]

$$F(r)=r^{\nu}\left[C_1I_{\nu}(\varepsilon_n\,r)+C_2K_{\nu}(\varepsilon_n\,r)\right], \tag{29}$$

где $\nu=\left(1+c^2\right)/2=b^2/2a^2$.

Удовлетворение условиям (22), (23) приводит к соотношению

$$F(r)=\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu}\frac{K_{\nu}(\varepsilon_n\,r)}{K_{\nu}(\varepsilon_nR)}=\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu}\frac{K_{\nu}(\mu_n\,r)}{K_{\nu}\mu_n}. \tag{30}$$

На основании (20) получено частное решение

$$U(r,z)=C_n\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu}\frac{K_{\nu}\left(\mu_n\frac{r}{l}\right)}{K_{\nu}\left(\mu_n\frac{R}{l}\right)}\times$$

$$\times\left[\cos\left(\mu_n\frac{z}{l}\right)+\frac{H_1l}{\mu_n}\sin\left(\mu_n\frac{z}{l}\right)\right]. \tag{31}$$

Общее решение задачи (14a), (16a)-(18a) имеет вид

$$U(r,z)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu}\frac{K_{\nu}\left(\mu_n\frac{r}{l}\right)}{K_{\nu}\left(\mu_n\frac{R}{l}\right)}\times$$

$$\times\left[\cos\left(\mu_n\frac{z}{l}\right)+\frac{H_1l}{\mu_n}\sin\left(\mu_n\frac{z}{l}\right)\right]. \tag{32}$$

Коэффициенты C_n в (32) определяются из условия (15a)

$$U(R,z)=T_{\Gamma}-b_1-b_2z=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\left[\cos\left(\mu_n\frac{z}{l}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{H_1l}{\mu_n}\sin\left(\mu_n\frac{z}{l}\right)\right]. \tag{33}$$

В [10] доказано, что система функций, стоящая под знаком суммы в (33), будет ортогональной на интервале $(0,l)$.

Поэтому коэффициенты в разложении (33) могут быть найдены следующим образом

$$C_n=\frac{\int_0^l(T_{\Gamma}-b_1-b_2z)\left[\cos\left(\mu_n\frac{z}{l}\right)+\frac{H_1l}{\mu_n}\sin\left(\mu_n\frac{z}{l}\right)\right]dz}{\int_0^l\left[\cos\left(\mu_n\frac{z}{l}\right)+\frac{H_1l}{\mu_n}\sin\left(\mu_n\frac{z}{l}\right)\right]^2dz}. \tag{34}$$

Вычисление коэффициентов C_n после преобразования подинтегральных выражений числителя и знаменателя в (34) требует знания значений следующих интегралов [11]:

$$\int_0^l\sin\left(\mu_n\frac{z}{l}\right)dz=\frac{l}{\mu_n}(1-\cos\mu_n);$$

$$\int_0^l\cos\left(\mu_n\frac{z}{l}\right)dz=\frac{l\sin\mu_n}{\mu_n};$$

$$\int_0^l z\sin\left(\mu_n\frac{z}{l}\right)dz=\frac{l^2}{\mu_n^2}(\sin\mu_n-\mu_n\cos\mu_n);$$

$$\int_0^l z\cos\left(\mu_n\frac{z}{l}\right)dz=\frac{l^2}{\mu_n^2}(\cos\mu_n+\mu_n\sin\mu_n-1);$$

$$\int_0^l\cos^2\left(\mu_n\frac{z}{l}\right)dz=\frac{l}{2\mu_n}(\mu_n+\sin\mu_n\cos\mu_n);$$

$$\int_0^l\cos\left(\mu_n\frac{z}{l}\right)\sin\left(\frac{\mu_nz}{l}\right)dz=\frac{l}{2\mu_n}\sin^2\mu_n;$$

$$\int_0^l\sin^2\left(\mu_n\frac{z}{l}\right)dz=\frac{l}{\mu_n}\frac{\mu_n-\sin\mu_n\cos\mu_n}{2}.$$

Тогда

$$\int_0^l(T_{\Gamma}-b_1-b_2z)\left[\cos\left(\mu_n\frac{z}{l}\right)+\frac{H_1l}{\mu_n}\sin\left(\mu_n\frac{z}{l}\right)\right]dz=$$

$$=(T_{\Gamma}-b_1)\frac{l}{\mu_n}\left(\sin\mu_n+\frac{H_1l}{\mu_n}-\frac{H_1l}{\mu_n}\cos\mu_n\right)-b_2\frac{l^2}{\mu_n^2}\times$$

$$\times\left[(\cos\mu_n+\mu_n\sin\mu_n-1)+\frac{H_1l}{\mu_n}\times\right.$$

$$\left.\times(\sin\mu_n-\mu_n\cos\mu_n)\right];$$

$$\int_0^l\left[\cos\left(\mu_n\frac{z}{l}\right)+\frac{H_1l}{\mu_n}\sin\left(\mu_n\frac{z}{l}\right)\right]^2dz=\frac{l}{2\mu_n}\times$$

$$\times(\mu_n+\sin\mu_n\cos\mu_n)+\frac{H_1l^2}{\mu_n^2}\sin^2\mu_n+$$

$$+\frac{H_1^2l^3}{2\mu_n^3}(\mu_n-\sin\mu_n\cos\mu_n).$$

В результате получено

$$C_n = \frac{\left(T_Г - b_1\right)\frac{1}{\mu_n}\left(\sin\mu + \frac{H_1 l}{\mu_n} - \frac{H_1 l}{\mu_n}\cos\mu_n\right) -}{\frac{1}{2\mu_n}\left(\mu_n + \sin\mu_n\cos\mu_n\right) + \frac{H_1 l}{\mu_n^2}\sin^2\mu_n +}$$

$$\frac{-b_2\frac{l}{\mu_n^2}\left[\left(\cos\mu_n + \mu_n\sin\mu_n - 1\right) +\right.}{+\frac{H_1^2 l^2}{2\mu_n^3}\left(\mu_n - \sin\mu_n\cos\mu_n\right) \quad \left. + \frac{H_1 l}{\mu_n}\left(\sin\mu_n - \mu_n\cos\mu_n\right)\right]}. \tag{35}$$

И, наконец, согласно (19), можно записать

$$T_2(r,z) = \left(\frac{r}{R}\right)^{\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{C_n\frac{K_\nu\left(\mu_n\frac{r}{l}\right)}{K_\nu\left(\mu_n\frac{R}{l}\right)}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\cos\left(\mu_n\frac{z}{l}\right) + \frac{H_1 l}{\mu_n}\sin\left(\mu_n\frac{z}{l}\right)\right]\right\} + b_1 + b_2 z. \tag{36}$$

Задача (8)-(13) также решается разделением переменных:

Если положить

$$T_1(r,z,\tau) = \phi(r)Z(z)T(\tau), \tag{37}$$

то разделение переменных дает

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'(\tau)}{T(\tau)} = \frac{\phi''(r)}{\phi(r)} - \frac{c^2}{r}\frac{\phi'(r)}{\phi(r)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -\delta^2(\delta > 0);$$

Далее

$$\frac{\phi''(r)}{\phi(r)} - \frac{c^2}{r}\frac{\phi'(r)}{\phi(r)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} - \delta^2 = -\beta^2(\beta > 0).$$

В результате получаются три задачи

$$r^2\phi''(r) - c^2 r\phi'(r) + \beta^2 r^2\phi(r) = 0, \tag{38}$$

$$\phi(R) = 0, \tag{39}$$

$$\frac{d\phi(\infty)}{dr} = 0. \tag{40}$$

$$T'(\tau) + a^2\delta^2 T(\tau) = 0, \tag{41}$$

$$T(\tau) = 1 \tag{42}$$

$$Z''(z) + \gamma^2 Z(z) = 0, \tag{43}$$

$$\frac{dZ(0)}{dz} - H_1 Z(0) = 0, \tag{44}$$

$$\frac{dZ(l)}{dz} + H_2 Z(l) = 0, \tag{45}$$

где $\gamma^2 = \delta^2 - \beta^2$.

Решение (38) дает [9]

$$\phi(r) = r^{\nu}\left[c_1 J_\nu(\beta r) + c_2 Y_\nu(\beta r)\right], \tag{46}$$

где $\nu = \left(1 + c^2\right)\Big/ 2 = \frac{b^2}{2a^2}$.

Удовлетворение условиям (40), (39) позволяет последовательно получить

$c_1 \equiv 0$, так как при $r \to \infty$ $J_\nu(\beta r) \to \infty$,

$J_\nu{}'(\beta r) \to \infty$;

$c_2 \neq 0$, иначе будет иметь место тривиальное решение, поэтому $\phi(r) = c_2 r^{\nu} Y_\nu(\beta r)$.

Откуда по условию (39) при $R \neq 0$, получается

$$Y_\nu(\mu_m) = 0, \tag{47}$$

где μ_m - положительные корни уравнения (47), $m = 1,2,3,...$; $\mu_m = \beta_m R$.

Итак, частным решением (38)-(40) будет функция

$$\phi(r) = c^2 r^{\nu} Y_\nu\left(\mu_m\frac{r}{R}\right) \tag{48}$$

с характеристическим уравнением (47).

Решение краевой задачи (43)-(45)приводит к выражению

$$Z_k(z) = C_k\left[\cos\left(\mu_k\frac{z}{l}\right) + \frac{H_1 l}{\mu_k}\sin\left(\mu_k\frac{z}{l}\right)\right], \tag{49}$$

где $\mu_k = \gamma_k l$ - корни трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg}\mu_k = \frac{\left(H_1 + H_2\right)\mu_k l}{\mu_k^2 - H_1 H_2 l^2},\ k = 1,2,3,...\ . \tag{50}$$

Задача Коши (41), (42) удовлетворяется при

$$T(\tau) = \exp\left(-a^2\delta_{k,m}^2\tau\right), \tag{51}$$

где $\delta_{k,m}^2 = \gamma_k^2 + \beta_m^2$.

Здесь обозначение δ^2 заменено на $\delta_{k,m}^2$, так как вышеприведенные задачи (38)-(45) взаимосвязаны.

Следует отметить, что характеристическое уравнение (50) идентично характеристическому уравнению (28) при замене значка k на n. Указанное обстоятельство будет учтено в дальнейшем при построении решения задачи (1)-(6). Таким образом на основании (37), (48), (49). (51) записывается общее решение задачи (8), (10)-(13)

$$T_1(r,z,\tau) = \left(\frac{r}{R}\right)^{\nu}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}C_{k,m}Y_\nu\left(\mu_m\frac{r}{R}\right)\times$$

$$\times\left[\cos\left(\mu_k\frac{z}{l}\right) + \frac{H_1 l}{\mu_k}\sin\left(\mu_k\frac{z}{l}\right)\right]\exp\left(-a^2\delta_{k,m}^2\tau\right),$$

где $C_{k,m} = C_2 C_k R^{\nu}$; здесь в целях унификации с (36) введен сомножитель $\left(\frac{1}{R}\right)^{\nu}$.

В выражении (52) остается только удовлетворить условию (9).

$$T(r,z,0) = T_Г - \left(\frac{r}{R}\right)^{\nu}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{C_n\frac{K_\nu\left(\mu_n\frac{r}{l}\right)}{K_\nu\left(\mu_n\frac{R}{l}\right)}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\cos\left(\mu_n\frac{z}{l}\right) + \frac{H_1 l}{\mu_n}\sin\left(\mu_n\frac{z}{l}\right)\right]\right\} - b_1 - b_2 z =$$

$$=\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}C_{k,m}Y_{\nu}\left(\mu_m\frac{r}{R}\right)\times$$

$$\times\left[\cos\left(\mu_k\frac{z}{l}\right)+\frac{H_1 l}{\mu_k}\sin\left(\mu_k\frac{z}{l}\right)\right]. \qquad (53)$$

Преобразование последнего соотношения дает

$$\frac{T_Г-b_1}{r^{\nu}}-\frac{b_2 z}{r^{\nu}}-\frac{1}{R^{\nu}}\sum_{n=1}^{\infty}C_n\frac{K_{\nu}\left(\mu_n\frac{r}{l}\right)}{K_{\nu}\left(\mu_n\frac{R}{l}\right)}\times$$

$$\times\left[\cos\left(\mu_n\frac{z}{l}\right)+\frac{H_1 l}{\mu_n}\sin\left(\mu_n\frac{z}{l}\right)\right]=$$

$$=\left(\frac{1}{R}\right)^{\nu}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}C_{k,m}Y_{\nu}\left(\mu_m\frac{r}{R}\right)\times$$

$$\times\left[\cos\left(\mu_k\frac{z}{l}\right)+\frac{H_1 l}{\mu_k}\sin\left(\mu_k\frac{z}{l}\right)\right]. \qquad (54)$$

Для определения постоянных $C_{k,m}$ следует умножить левую и правую части (54) на $rY_{\nu}\left(\mu_p\frac{r}{R}\right)\left[\cos\left(\mu_q\frac{z}{l}\right)+\frac{H_1 l}{\mu_q}\sin\left(\mu_q\frac{z}{l}\right)\right]$ и проинтегрировать полученное выражение соответственно в пределах от R до ∞ по r и от 0 до l по z.

Тогда на основании известного свойства ортогональности в интервале z от 0 до l для рассматриваемых функций [10] будет

$$\int_0^l\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos\left(\mu_n\frac{z}{l}\right)+\frac{H_1 l}{\mu_n}\sin\left(\mu_n\frac{z}{l}\right)\right]\times$$

$$\times\left[\cos\left(\mu_p\frac{z}{l}\right)+\frac{H_1 l}{\mu_p}\sin\left(\mu_p\frac{z}{l}\right)\right]dz=$$

$$=\int_0^l\left[\cos\left(\mu_n\frac{z}{l}\right)+\frac{H_1 l}{\mu_n}\sin\left(\mu_n\frac{z}{l}\right)\right]^2dz>0,$$

$$\int_0^l\sum_{k=1}^{\infty}\left[\cos\left(\mu_k\frac{z}{l}\right)+\frac{H_1 l}{\mu_k}\sin\left(\mu_k\frac{z}{l}\right)\right]\times$$

$$\times\left[\cos\left(\mu_p\frac{z}{l}\right)+\frac{H_1 l}{\mu_p}\sin\left(\mu_p\frac{z}{l}\right)\right]dz=$$

$$=\int_0^l\left[\cos\left(\mu_k\frac{z}{l}\right)+\frac{H_1 l}{\mu_k}\sin\left(\mu_k\frac{z}{l}\right)\right]^2dz>0,$$

так как интеграл суммы равен сумме интегралов, а все интегралы в указанных суммах равны нулю при $\mu_n\neq\mu_p$ и $\mu_k\neq\mu_p$ и лишь один интеграл в каждой сумме будет больше нуля при $\mu_n=\mu_p$ и $\mu_k=\mu_p$. Ортогональность имеет место также в случае с функциями Бесселя, то есть

$$\int_R^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}rY_{\nu}\left(\mu_m\frac{r}{R}\right)Y_{\nu}\left(\mu_p\frac{r}{R}\right)dr=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\int_R^{\infty}rY_{\nu}\left(\mu_m\frac{r}{R}\right)Y_{\nu}\left(\mu_p\frac{r}{R}\right)dr=$$

$$=\int_R^{\infty}rY_{\nu}\left(\mu_m\frac{r}{R}\right)^2dr \quad \left(\mu_m=\mu_p\right).$$

Следует отметить, что указанное свойство ортогональности бесселевой функции второго рода с весом r на интервале (r,∞) было показано автором данной статьи и в литературе отсутствует.

Это доказательство очень громоздко и здесь не приводится. С учетом изложенного можно записать очевидное выражение.

$$\left(T_Г-b_1\right)\int_R^{\infty}\frac{Y_{\nu}\left(\mu_m\frac{r}{R}\right)}{r^{\nu-1}}\left\{\int_0^l\left[\cos\left(\mu_k\frac{z}{l}\right)+\frac{H_1 l}{\mu_k}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\sin\left(\mu_k\frac{z}{l}\right)\right]dz\right\}dr-b_2\int_R^{\infty}\frac{Y_{\nu}\left(\mu_m\frac{r}{R}\right)}{r^{\nu-1}}\times$$

$$\times\left\{\int_0^l z\left[\cos\left(\mu_k\frac{z}{l}\right)+\frac{H_1 l}{\mu_k}\sin\left(\mu_k\frac{z}{l}\right)\right]dz\right\}dr-$$

$$-\frac{C_n}{R^{\nu}K_{\nu}\left(\mu_n\frac{R}{l}\right)}\int_R^{\infty}rK_{\nu}\left(\mu_n\frac{r}{l}\right)Y_{\nu}\left(\mu_m\frac{r}{R}\right)\times$$

$$\times\left\{\int_0^l\left[\cos\left(\mu_n\frac{z}{l}\right)+\frac{H_1 l}{\mu_n}\sin\left(\mu_n\frac{z}{l}\right)\right]^2dz\right\}dr=$$

$$=C_{k,m}\frac{1}{R^{\nu}}\int_R^{\infty}rY_{\nu}^2\left(\mu_m\frac{r}{R}\right)\left\{\int_0^l\left[\cos\left(\mu_k\frac{z}{l}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{H_1 l}{\mu_k}\sin\left(\mu_k\frac{z}{l}\right)\right]^2dz\right\}dr. \qquad (55)$$

Рассмотренная процедура фактически представляет разложение произвольной функции в ряд Фурье-Бесселя в интервале изменения r от R до ∞ и z от 0 до l. В качестве произвольной функции здесь выступает левая часть выражения (54).

Для определения коэффициентов $C_{k,m}$ следует вычислить семь определенных интегралов, три из которых по переменной r - несобственные, два интеграла по переменной z - однотипные, то есть требуют одного вычисления с заменой индекса n на k. Причем интегралы по z при вычислении распадаются на семь более простых интегралов.

Ниже приводятся значения интегралов по переменной z, полученные на основании вычисления преобразованных интегралов [11]

$$\int_0^l\left[\cos\left(\mu_k\frac{z}{l}\right)+\frac{H_1 l}{\mu_k}\sin\left(\mu_k\frac{z}{l}\right)\right]dz=$$

$$= \frac{l}{\mu_k}\sin\mu_k + \frac{H_1 l^2}{\mu_k^2}\left(1-\cos\mu_k\right);$$

$$\int_0^l z\left[\cos\left(\mu_k \frac{z}{l}\right)+\frac{H_1 l}{\mu_k}\sin\left(\mu_k \frac{z}{l}\right)\right]dz =$$

$$= \frac{l^2}{\mu_k^2}\left(\cos\mu_k + \mu_k\sin\mu_{k-1}\right)+\frac{H_1 l^3}{\mu_k^3}\times$$

$$\times\left(\sin\mu_k - \mu_k\cos\mu_k\right);$$

$$\int_0^l \left[\cos\left(\mu_k \frac{z}{l}\right)+\frac{H_1 l}{\mu_k}\sin\left(\mu_k \frac{z}{l}\right)\right]^2 dz =$$

$$= \frac{l}{2\mu_k}\left(\mu_k + \sin\mu_k\cos\mu_k\right)+\frac{H_1 l^2}{\mu_k^2}\sin^2\mu_k +$$

$$+\frac{H_1^2 l^3}{2\mu_k^3}\left(\mu_k - \sin\mu_k\cos\mu_k\right).$$

Вычисление несобственных интегралов по координате r.

Первый интеграл (он же и второй) в выражении (55) вычисляется с использованием [12] после подстановки нижнего предела R и предельного перехода при $r \to \infty$. Он равен

$$\int_R^\infty \frac{Y_\nu\left(\mu_m \frac{r}{R}\right)}{r^{\nu-1}}dr = \frac{R^{-\nu+2}}{\mu_m}Y_{\nu-1}(\mu_m).$$

Третий интеграл левой части и интеграл правой части выражения (55) вычислялись с использованием дифференциальных уравнений Бесселя. Отличие состояло в том, что при вычислении интеграла в правой части (55) бралось произведение бесселевых функций различных действительных аргументов и при раскрытии неопределенности вида $\frac{0}{0}$ использовалось правило Лопиталя.

Опуская громоздкие рутинные преобразования можно сразу записать

$$\int_R^\infty rK_\nu\left(\mu_n \frac{r}{l}\right)Y_\nu\left(\mu_m \frac{r}{R}\right)dr =$$

$$= -\frac{R^2 l^2 \mu_m Y_{\nu+1}(\mu_m) K_\nu\left(\mu_n \frac{R}{l}\right)}{l^2\mu_m^2 + R^2\mu_n^2};$$

$$\int_R^\infty rY_\nu^2\left(\mu_m \frac{r}{R}\right)dr = -\frac{R^2}{2}Y_{\nu+1}^2(\mu_m).$$

Следует отметить, что соотношения для последних двух интегралов выведены с учетом характеристического уравнения (47).

Подстановка вычисленных интегралов в выражение (55) с учетом соотношения (35) для коэффициентов C_n, а также идентичности характеристических уравнений (28), (50) $(\mu_k \equiv \mu_n)$, после рутинных алгебраических преобразований, позволила получить

$$C_{k,m} = \frac{4b_2 l\left[\mu_k\left(\cos\mu_k + \mu_k\sin\mu_k - 1\right) + H_1 l\left(\sin\mu_k - \mu_k\cos\mu_k\right)\right] - 4\left(T_Г - b_1\right)\left[\mu_k^2\sin\mu_k + \mu_k H_1 l\left(1-\cos\mu_k\right)\right]}{\mu_k^2\left(\mu_k + \sin\mu_k\cos\mu_k\right) + 2\mu_k H_1 l\sin^2\mu_k + H_1^2 l^2\left(\mu_k - \sin\mu_k\cos\mu_k\right)} \cdot \frac{\mu_m^2 l^2\left[Y_{\nu-1}(\mu_m)+Y_{\nu+1}(\mu_m)\right] + \mu_k^2 R^2 Y_{\nu-1}(\mu_m)}{\mu_m Y_{\nu+1}^2(\mu_m)\left(\mu_m^2 l^2 + \mu_k^2 R^2\right)}. \quad (56)$$

На основании (7), (35), (36), (47), (50), (52), (56) можно записать окончательное решение задачи (1)-(6)

$$T(r,z,\tau) = \frac{H_1 T_{cm1}\left(1+H_2 l\right)+H_2 T_{cm2}}{H_1 + H_1 H_2 l + H_2} + \frac{H_1 H_2\left(T_{cm2}-T_{cm1}\right)}{H_1 + H_1 H_2 l + H_2}z + \left(\frac{r}{R}\right)^\nu \sum_{k=1}^\infty C_k \frac{K_\nu\left(\mu_k \frac{r}{l}\right)}{K_\nu\left(\mu_k \frac{R}{l}\right)}\times$$

$$\times\left(\cos\mu_k \frac{z}{l} + \frac{H_1 l}{\mu_k}\sin\mu_k \frac{z}{l}\right) + \left(\frac{r}{R}\right)^\nu \sum_{k=1}^\infty\sum_{m=1}^\infty C_{k,m}\times$$

$$\times Y_\nu\left(\mu_m \frac{r}{R}\right)\left(\cos\mu_k \frac{z}{l} + \frac{H_1 l}{\mu_k}\sin\mu_k \frac{z}{l}\right)\times$$

$$\times\exp\left[-a^2\left(\frac{\mu_k^2}{l^2}+\frac{\mu_m^2}{R^2}\right)\tau\right]. \quad (57)$$

Здесь необходимо отметить, что поскольку $\mu_k \equiv \mu_n$, то выражение (35) следует переписать в виде

$$C_k = \frac{\left(T_Г - b_1\right)\frac{1}{\mu_k}\left[\sin\mu_k + \frac{H_1 l}{\mu_k}\left(1-\cos\mu_k\right)\right] - b_2\frac{l}{\mu_k^2}\left[\left(\cos\mu_k + \mu_k\sin\mu_k - 1\right) + \frac{H_1 l}{\mu_k}\left(\sin\mu_k - \mu_k\cos\mu_k\right)\right]}{\frac{1}{2\mu_k}\left(\mu_k + \sin\mu_k\cos\mu_k\right) + \frac{H_1 l}{\mu_k^2}\sin^2\mu_k + \frac{H_1^2 l^2}{2\mu_k^3}\left(\mu_k - \sin\mu_k\cos\mu_k\right)}. \quad (58)$$

Полученное решение обобщает согласно [13] целый ряд как уже решенных, так и нерешенных задач.

Если, например, в общем решении (57) устремить $\tau \to \infty$, то получается стационарное решение этой же задачи (граничные условия третьего рода) в виде (58)

$$T(r,z,z) = \frac{H_1 T_{cm1}\left(1+H_2 l\right)+H_2 T_{cm2}}{H_1 + H_1 H_2 l + H_2} +$$

$$+\frac{H_1 H_2 (T_{cm2}-T_{cm1})}{H_1+H_1H_2 l+H_2} z+\left(\frac{r}{R}\right)^{\nu}\sum_{k=1}^{\infty} C_k \frac{K_\nu\left(\mu_k \frac{r}{l}\right)}{K_\nu\left(\mu_k \frac{R}{l}\right)}\times$$

$$\times\left(\cos\mu_k \frac{z}{l}+\frac{H_1 l}{\mu_k}\sin\mu_k\frac{z}{l}\right). \qquad (58)$$

При устремлении $H_1=\frac{\alpha_1}{\lambda_{ж}}\to\infty(\alpha_1\to\infty)$, $H_2=\frac{\alpha_2}{\lambda_{ж}}\to\infty(\alpha_2\to\infty)$ или $\lambda_{ж}\to 0$, получается решение этой же нестационарной задачи при граничных условиях первого рода [8], хотя и выраженное в несколько иной форме.

Здесь следует заметить, что решение [8] является более точным, чем упрощенное решение [6] этой же задачи [8], полученное ранее без учета теплопроводности в направлении координаты r

В случае $H_1\to\infty,\ H_2\to\infty,\ \tau\to\infty$ получается решение стационарной задачи при граничных условиях первого рода [7], правда, выраженное в несколько иной форме.

В решении, вытекающем из результатов настоящей статьи, нет экспоненциальных функций по координате z, которые присутствуют в [7].

При $H_1\to\infty$ можно получить более точное решение нестационарной задачи при смешанных граничных условиях работы [1], в которой пренебрегалось теплопроводностью в направлении координаты r.

Когда $H_1\to\infty$, $\tau\to\infty$, то идентифицируется решенная ранее стационарная задача при смешанных граничных условиях [14].

Из решения (57) при различных значениях параметров H_1, H_2 вытекают решения целого ряда нестационарных задач при различных граничных условиях:

1. $H_1=\frac{\alpha_1}{\lambda_{ж}}\to 0\quad(\alpha_1\to 0$ либо $\lambda_{ж}\to\infty)$,

$H_2=\frac{\alpha_2}{\lambda_{ж}}\neq 0,\quad T(r,z,0)=T_\Gamma,\quad T(R,z,\tau)=T_\Gamma,$

$\frac{\partial T(r,0,\tau)}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial T(r,l,\tau)}{\partial z}+H_2[T(r,l,\tau)-T_{cm2}]=0,$

$\frac{\partial T(\infty,z,\tau)}{\partial r}=0.$

2. $H_2\to 0, H_1\neq 0,\ T(r,z,0)=T_\Gamma,\ T(R,z,\tau)=T_\Gamma,$

$\frac{\partial T(r,0,\tau)}{\partial z}-H_1[T(r,0,\tau)-T_{cm1}]=0,$

$\frac{\partial T(r,l,\tau)}{\partial z}=0,\ \frac{\partial T(\infty,z,\tau)}{\partial r}=0.$

3. $H_1\to 0, H_2\to\infty,\ T(r,z,0)=T_\Gamma,\ T(R,z,\tau)=T_\Gamma,$

$\frac{\partial T(r,0,\tau)}{\partial z}=0,\ T(r,l,\tau)=T_{cm2,}\ \frac{\partial T(\infty,z,\tau)}{\partial r}=0.$

4. $H_2\to 0, H_1\to\infty,\ T(r,z,0)=T_\Gamma,\ T(R,z,\tau)=T_\Gamma,$

$T(r,0,\tau)=T_{cm1},\ \frac{\partial T(r,l,\tau)}{\partial z}=0,\ \frac{\partial T(\infty,z,\tau)}{\partial r}=0.$

Из этого же решения (57) вытекают при $\tau\to\infty$ решения тех же 4-х, но стационарных задач при исключении условия $T(r,z,0)=T_\Gamma$.

Если положить $T_{cm1}=T_{cm2}$, то получаются новые выражения для только что разобранных выше частных решений и для самого обобщенного решения (57).

Возможны еще варианты нестационарных и стационарных $(\tau\to\infty)$ условий теплообмена, которые охватывают практически все возможные начально-краевые и краевые граничные условия первого и третьего рода. Однако обобщенное решение (57), к сожалению, может дать лишь частный случай граничных условий второго рода.

Обозначения

r, z - радиальная и осевая координаты цилиндрической системы координат, м;

$T(r,z,\tau), T_1(r,z,\tau)$-текущие температуры жидкости при неустановившемся теплообмене, К ;

$T_2(r,z)$- текущая температура жидкости при установившемся теплообмене, К ;

T_Γ - постоянная температура горячей жидкости на входе в канал $(r=R)$, К ;

T_{cm1}, T_{cm2}- постоянные температуры верхней нижней стенок канала, обращенных к жидкости, соответственно, К;

R - внутренний радиус штуцера на входе в канал, м;

Q - объемный расход жидкости, м^3/с;

a^2 - коэффициент температуропроводности, м^2/с;

l - ширина канала, м;

b^2 -константа, м^2/с;

V_r- средняя радиальная скорость движения жидкости, м/с;

$\lambda_ж$ - теплопроводность жидкости, Вт/(м К);

τ - время, с;

$\varepsilon, \delta, \gamma$ - константы разделения;

α_1, α_2 - коэффициенты теплоотдачи от жидкости соответственно к стенке 1 и к стенке 2, Вт/(м² К);

$\pi=3{,}14159...$;

$J_\nu(\beta r)$ - бесселева функция первого рода действительного аргумента порядка ν, безразмерная;

$Y_\nu(\beta r), Y_\nu(\mu_m), Y_\nu\left(\mu_m\frac{r}{R}\right)$- бесселевы функции второго рода действительного аргумента порядка ν, безразмерные;

$Y_{\nu-1}(\mu_m), Y_{\nu+1}(\mu_m)$ - бесселевы функции второго рода действительного аргумента порядков $\nu-1$ и $\nu+1$, соответственно, безразмерные;

$I_\nu(\varepsilon_n r)$- бесселева функция первого рода мнимого аргумента порядка ν, безразмерная;

$K_\nu(\varepsilon_n r), K_\nu\left(\mu_n\frac{r}{l}\right), K_\nu\left(\mu_n\frac{R}{l}\right), K_\nu\left(\mu_k\frac{r}{l}\right),$

$K_\nu\left(\mu_k \frac{R}{l}\right)$, - бесселевы функции второго рода мнимого аргумента порядка ν, безразмерные.

Литература

1. С.В. Анаников, М.Ю. Сорокин, В.П. Бурдиков, Э.В. Чиркунов, Теоретические основы химической технологии (ТОХТ), **38**,6, 655-660 (2004).
2. С.В. Анаников, Вестник Казанского технологического университета, **15**, 6, 42-46 (2012).
3. С.В. Анаников, Вестник Казанского технологического университета, **15**, 6, 147-150 (2012).
4. С.В. Анаников, Вестник Казанского технологического университета, **15**, 11, 143-145 (2012).
5. С.В. Анаников, Вестник Казанского технологического университета, **15**, 14, 90-93 (2012).
6. С.В. Анаников, М.Ю. Сорокин, Вестник Казанского технологического университета, **15**, 18, 58-63 (2012).
7. С.В. Анаников, Вестник Казанского технологического университета, **15**, 20, 56-61 (2012).
8. С.В. Анаников, Вестник Казанского технологического университета, **16**, 3, 58-62 (2013).
9. Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Наука, Москва, 1976, 576 с.
10. И.Г. Араманович, В.И. Левин, Уравнения математической физики. Наука, Москва, 1964. 288 с.
11. Г.Б. Двайт, Таблицы интегралов и другие математические формулы. Наука, Москва, 1964. 228 с.
12. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. ГИФМЛ, Москва, 1963. 1100 с.
13. А.В. Лыков, Теория теплопроводности. Высшая школа, Москва, 1967. 599 с.
14. Гидромеханика отопительно-вентиляционных и газоочистных устройств: Межвузовский сборник, Казань: КГАСА, 1999. 110 с.

© С. В. Анаников - д-р техн. наук, проф. каф. химической кибернетики КНИТУ, ananikovsv@rambler.ru.