

Ф. С. Хайруллин, Х. А. Абрагим, О. И. Алхалили

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С ДВИЖУЩИМИСЯ МАССАМИ

Ключевые слова: стержневая система, движущаяся масса, вариационный принцип, свободные и вынужденные колебания, аппроксимирующая функция.

Приводится вариационный метод решения задач о собственных и вынужденных колебаниях пространственных стержневых систем, имеющих медленно двигающиеся сосредоточенные массы. Особенность метода заключается в том, что используются специальные аппроксимирующие функции, которые не требуют разбиения стержня на большое количество элементов. Приведены численные результаты.

Keywords: rods system, moved mass, a variational principle, free and forced fluctuations, approximating functions.

We present a variational method for solving problems on their own and forced fluctuations of rods systems with slowly moved concentrated masses. Feature of the method lies in the fact that we use special approximating functions that do not require a partition to a large number of rod cells. The numerical results are shown.

В качестве расчетной модели рассматриваются стержни с пространственными кусочно-гладкими осями (рис.1). Предполагается, что материал стержня изотропный, действует закон Гука, перемещения малы. Принимаются следующие гипотезы: поперечные сечения стержня плоские до деформации остаются плоскими и после деформации; напряжениями, действующими в плоскости поперечных сечений стержня, пренебрегаем.

На основании принятых гипотез можно получить следующие формулы, определяющие перемещения и углы поворота точек поперечного сечения стержня:

$$\begin{aligned} u_1^*(s, y, z, t) &= u_1(s, t) + z \varphi_2(s, t) - y \varphi_3(s, t), \\ u_2^*(s, y, z, t) &= u_2(s, t) - z \varphi_1(s, t), \\ u_3^*(s, y, z, t) &= u_3(s, t) + y \varphi_1(s, t), \\ \varphi_1^*(s, y, z, t) &= \varphi_1(s, t), \\ \varphi_2^*(s, y, z, t) &= \varphi_2(s, t), \\ \varphi_3^*(s, y, z, t) &= \varphi_3(s, t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $U^* = \{u_1^*, u_2^*, u_3^*, \varphi_1^*, \varphi_2^*, \varphi_3^*\}^T$ - вектор компонентов перемещения u_1^*, u_2^*, u_3^* и углов поворота $\varphi_1^*, \varphi_2^*, \varphi_3^*$ произвольной точки стержня в системе координат s, y, z ;

$U = \{u_1, u_2, u_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}^T$ - вектор компонентов перемещения и углов поворота оси стержня; s - длина дуги оси стержня; y, z - главные центральные оси инерции поперечного сечения стержня.

Деформации стержня определяются через деформации оси стержня по формулам

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \varepsilon + z \cdot \kappa_2 - y \cdot \kappa_3, \\ \varepsilon_{12} &= \gamma_3 - z \kappa_1, \quad \varepsilon_{13} = \gamma_2 + y \kappa_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Деформации оси стержня находятся из соотношений Клебша:

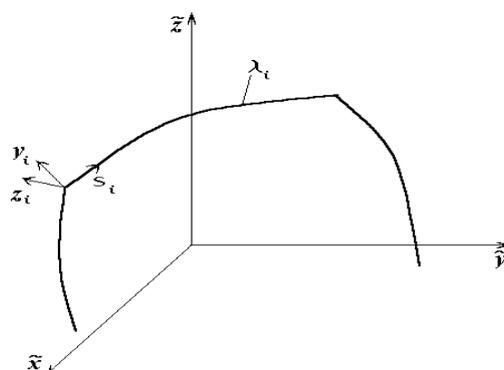


Рис. 1

$$\begin{aligned} \varepsilon &= u_{1,s} - k_3 u_2 + k_2 u_3, \\ \gamma_2 &= -u_{3,s} + k_2 u_1 - k_1 u_2 - \varphi_2, \\ \gamma_3 &= u_{2,s} - k_1 u_3 + k_3 u_1 - \varphi_3, \\ \kappa_1 &= \varphi_{1,s} - k_3 \varphi_2 + k_2 \varphi_3, \\ \kappa_2 &= \varphi_{2,s} - k_1 \varphi_3 + k_3 \varphi_1, \\ \kappa_3 &= \varphi_{3,s} - k_2 \varphi_1 + k_1 \varphi_2, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\varepsilon, \gamma_2, \gamma_3$ - продольная деформация и углы сдвига; $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ - изменения кручения и кривизны (деформации кручения и изгиба) оси стержня; k_1, k_2, k_3 - кручение и кривизны оси стержня,

На основании обобщенного закона Гука и введенных гипотез можно показать справедливость следующих физических соотношений, связывающих напряжения и деформации:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= E \varepsilon_{11}, \\ \sigma_{12} &= G \varepsilon_{12}, \\ \sigma_{13} &= G \varepsilon_{13}, \end{aligned} \quad (4)$$

где E, G - модули упругости и сдвига стержня.

Для решения задачи используется вариационный принцип Остроградского-Гамильтона [1], на основании которого истинное движение системы за отрезок времени $[t_0, t_1]$ удовлетворяет вариационному уравнению:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta \Pi + \delta K - \delta' W) dt = 0. \quad (5)$$

Здесь Π, K - потенциальная и кинетическая энергии стержневой системы; $\delta'W$ - вариация работы внешних сил.

Потенциальная и кинетическая энергии стержня определяются по формулам:

$$\begin{aligned}\Pi &= \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_{11}\varepsilon_{11} + \sigma_{12}\varepsilon_{12} + \sigma_{13}\varepsilon_{13}) dV, \\ K &= \frac{1}{2} \iiint_V \rho (\dot{u}_1^{*2} + \dot{u}_2^{*2} + \dot{u}_3^{*2}) dV, \quad (6)\end{aligned}$$

где $\dot{u}_i^* = \frac{\partial u_i^*}{\partial t}$; ρ, V - плотность материала и объем стержня.

Подставляя формулы (2)-(4) в соотношения (6) и интегрируя по площади поперечного сечения стержня, потенциальную и кинетическую энергии представим в виде:

$$\begin{aligned}\Pi &= \frac{1}{2} \int_L \left[EA (u_{1,s} - k_3 u_2 + k_2 u_3)^2 + \right. \\ &+ EJ_y (\varphi_{2,s} - k_1 \varphi_3 + k_3 \varphi_1)^2 + \\ &+ EJ_z (\varphi_{3,s} - k_2 \varphi_1 + k_1 \varphi_2)^2 + \\ &+ \alpha_p GJ_k (\varphi_{1,s} - k_3 \varphi_2 + k_2 \varphi_3)^2 + \\ &+ \alpha_y GA (u_{3,s} - k_2 u_1 + k_1 u_2 + \varphi_2)^2 + \\ &+ \alpha_z GA (u_{2,s} - k_1 u_3 + k_3 u_1 - \varphi_3)^2 \left. \right] ds, \quad (7)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{2} \int_L \left[\rho A (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2) + \rho J_y (\dot{\varphi}_2)^2 + \right. \\ &+ \rho J_z (\dot{\varphi}_3)^2 + \rho J_k (\dot{\varphi}_1)^2 \left. \right] ds + \\ &+ \frac{1}{2} \int_L m (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2) \delta^*(s - s_0 - v_0 t) ds + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M m_k (\dot{u}_{1k}^2 + \dot{u}_{2k}^2 + \dot{u}_{3k}^2), \quad (8)\end{aligned}$$

где A, L - площадь и длина стержня; J_y, J_z, J_k - главные центральные моменты инерции поперечного сечения стержня и момент инерции при кручении; $\alpha_y, \alpha_z, \alpha_p$ - постоянные коэффициенты, учитывающие неравномерность распределения касательных напряжений в поперечном сечении стержня и зависящие от формы поперечного сечения стержня.

В этих формулах в кинетическую энергию добавлены слагаемые, учитывающие действие сосредоточенных масс m_k , приложенных в точках оси стержня, перемещения которых $u_{1k}^*, u_{2k}^*, u_{3k}^*$. Второй интеграл в кинетической энергии K учитывает воздействие сосредоточенной массы m , которая начинает двигаться в начальный момент

времени из точки с координатой s_0 со скоростью v_0 . Здесь $\delta^*(s)$ - дельта-функция Дирака.

Если в уравнении (5) вычислить вариацию от кинетической энергии K , определяемой по формуле (8), а затем использовать в интеграле по времени метод интегрирования по частям, то после соответствующих преобразований для вариации δK можно получить следующее выражение:

$$\begin{aligned}\delta K &= - \int_L \left[\rho A (\ddot{u}_1 \delta u_1 + \ddot{u}_2 \delta u_2 + \ddot{u}_3 \delta u_3) + \right. \\ &+ \rho J_y \ddot{\varphi}_2 \delta \varphi_2 + \rho J_z \ddot{\varphi}_3 \delta \varphi_3 + \rho J_k \ddot{\varphi}_1 \delta \varphi_1 \left. \right] ds - \\ &- \frac{1}{2} \int_L m (\ddot{u}_1 \delta u_1 + \ddot{u}_2 \delta u_2 + \ddot{u}_3 \delta u_3) \delta^*(s - s_0 - v_0 t) ds - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M m_k (\ddot{u}_{1k} \delta u_{1k} + \ddot{u}_{2k} \delta u_{2k} + \ddot{u}_{3k} \delta u_{3k}). \quad (9)\end{aligned}$$

При выводе этой формулы учитывалось, что масса m движется с достаточно малой скоростью по сравнению со скоростями движения элементов стержня, вызванных колебанием, и в связи с этим во втором интеграле отброшено слагаемое, содержащее производную по времени от дельта-функции Дирака

Для решения задачи стержневая система разбивается на элементы λ_i (рис.1), оси которых являются гладкими кривыми.

Введем глобальную систему координат $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ для всей конструкции и локальные системы координат s_i, y_i, z_i для каждого стержня λ_i , где координатная линия s_i направлена вдоль оси стержня, линии y_i, z_i совпадают с главными центральными осями инерции поперечного сечения стержня.

Для каждого стержня λ_i за искомые неизвестные принимается вектор перемещений $\bar{U}_i = \{\bar{u}_1^i, \bar{u}_2^i, \bar{u}_3^i, \bar{\varphi}_1^i, \bar{\varphi}_2^i, \bar{\varphi}_3^i\}^T$, заданный в глобальной системе координат $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$. Этот вектор представляется в виде:

$$\bar{U}_i(s, t) = \sum_{m=1}^M B_m^i(t) f_m(\beta_i), \quad (10)$$

где $B_m^i(t) = \{B_{m1}^i, B_{m2}^i, B_{m3}^i, B_{m4}^i, B_{m5}^i, B_{m6}^i\}^T$ - вектор неизвестных функций от времени t ;

$\beta_i = \frac{s_i - s_{i1}}{s_{i2} - s_{i1}}$, $0 \leq \beta_i \leq 1$; s_{i1}, s_{i2} - координаты начала и конца оси стержня λ_i .

Функции формы $f_m(\beta_i)$ имеют вид [2-4]:

$$\begin{aligned}f_1(\beta_1) &= 1 - \beta_1, f_2(\beta_1) = \beta_1, \\ f_m(\beta_1) &= f_1(\beta_1) [f_2(\beta_1)]^{m-2} \quad (m = \overline{3, M}).\end{aligned}$$

Изменяя количество слагаемых в выражении (10), можно получать аппроксимирующие функции различного порядка.

Если определить значения искомой функции в узловых точках, то имеем

$\tilde{U}_i(s_{i1}, t) = B_1^i(t)$, $\tilde{U}_i(s_{i2}, t) = B_2^i(t)$. Следовательно, коэффициенты $B_1^i(t), B_2^i(t)$ определяют значения вектора перемещений соответственно в начальной и конечной точках оси стержня λ_i в момент времени t . Это обстоятельство позволяет легко осуществлять стыковку стержней и удовлетворять геометрическим граничным условиям. Так, если положить $B_1^i = B_2^j$, то будет выполнено условие стыковки начала i -го стержня с концом j -го стержня. Чтобы удовлетворить, например, граничному условию жесткого защемления на конце i -го стержня, т.е. условию $\tilde{U}_i(s_{i1}, t) = 0$, следует положить $B_1^i(t) = 0$.

Компоненты перемещения в локальной системе координат связаны с компонентами перемещения в глобальной системе координат соотношениями:

$$U_i = [C_i] \tilde{U}_i, \quad (11)$$

где

$$[C_i] = \begin{bmatrix} [C_{io}] & 0 \\ 0 & [C_{io}] \end{bmatrix}, \quad [C_{io}] = \begin{bmatrix} C_{11}^{io} & C_{12}^{io} & C_{13}^{io} \\ C_{21}^{io} & C_{22}^{io} & C_{23}^{io} \\ C_{31}^{io} & C_{32}^{io} & C_{33}^{io} \end{bmatrix},$$

$[C_{io}]$ - матрица направляющих косинусов локальной системы координат в глобальной системе координат.

Подставляя для каждого стержня λ_i аппроксимирующие функции (10) в формулу (11), а затем в уравнение (7) и (9), удовлетворяя кинематическим граничным условиям и условиям стыковки стержней, после соответствующих преобразований получается система дифференциальных уравнений в обычных производных относительно неизвестных функций $B_m^i(t)$, $m = \overline{1, M}$, $i = \overline{1, I}$:

$$[D]\{B\} - [M]\{B''\} = \{F\}, \quad (12)$$

где $[M], [D]$ - матрицы масс и жесткости стержневой системы; $\{B\}$ - вектор неизвестных функций, $\{F\}$ - вектор правой части, зависящий от внешних нагрузок.

В случае свободных колебаний действие внешних нагрузок не учитывается, вектор неизвестных функций представляется в виде $\{B\} = \{B^c\} e^{i\omega t}$ и система уравнений (12) принимает вид:

$$[D]\{B^c\} + \omega^2 [M]\{B^c\} = 0,$$

где $\{B^c\}$ - вектор неизвестных постоянных, ω - собственные значения.

Это уравнение в качестве параметра содержит время t , которое определяет положение движущейся массы m . Задавая конкретные

значения времени t , получаем собственные значения ω и собственные формы для разных положений движущейся массы. Для решения этой задачи используется метод Рэля-Ритца [5].

Для решения задач в случае вынужденных колебаний используется метод Ньюмарка [6].

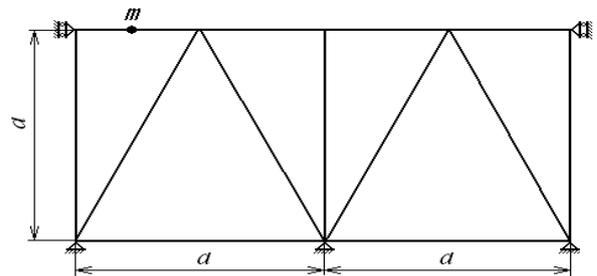


Рис. 2

В качестве примера приведены результаты расчеты плоской рамной стержневой конструкции, представленной на рис.2. Предполагается, что все стержни одинаковые круглого поперечного сечения диаметра d . Масса m движется горизонтально вправо по верхним стержням, начиная с левого верхнего шарнира. Приняты следующие числовые параметры: $E = 200 \text{ ГПа}$, $G = 80 \text{ ГПа}$, $d = 8 \text{ см}$, $a = 2 \text{ м}$, $m = 10 \text{ кг}$.

В таблице 1 приведены минимальные собственные частоты в зависимости от положения массы m на конструкции. Результаты приведены для первых двух пролетов.

Таблица 1

s (см)	0	25	50	75	100	125	150	175	200
ω (Гц)	25,3	12,0	9,55	13,5	41,5	13,9	10,2	13,4	35,9

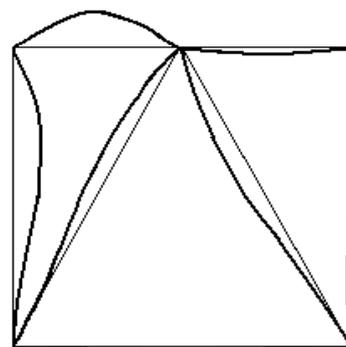


Рис. 3

Для минимальной частоты $\omega = 9,55 \text{ Гц}$, когда масса m находится в середине первого пролета, на рис.3 приведена форма колебания для левой половины рамы.

В таблице 2 приведены значения максимального напряжения, возникающего в точке приложения массы m , в момент нахождения массы в этой точке.

Таблица 2

s (см)	0	25	50	75	100	125	150	175	200
σ_{\max} (МПа)	0,03	1,99	3,18	1,59	0,05	1,64	2,63	1,68	0,08

Литература

1. *Абовский Н. П.* Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек / Н.П.Абовский, Н.П.Андреев, А.П.Деруга – М.: Наука, 1978. – 288 с.
2. *Серазутдинов М. Н.* Метод расчета криволинейных стержней / М.Н.Серазутдинов, Ф.С.Хайруллин // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1991. - №5. – С. 104 – 108.

3. *Хайруллин Ф.С.* Расчет напряженно-деформированного состояния сотового поликарбоната. / Ф.С.Хайруллин, М.Н.Серазутдинов, С.Г.Сидорин // Вестник Казанского технологического университета. № 9. Казань. 2010 г. С.433-437.
4. *Хайруллин Ф.С.* Определение напряженно-деформированного состояния материала сотовой структуры. / Ф.С.Хайруллин, С.Г.Сидорин // Вестник Казанского технологического университета. Т. 15, № 18. Казань. 2012г. С. 23 - 26.
5. Справочник по динамике сооружений. Под ред. Б.Г. Коренева, И.М. Рабиновича. – М., Стройиздат, 1972. – 511с.
6. *Бате К.* Численные методы анализа и метод конечных элементов / Бате К., Вилсон Е. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.5

© **Ф. С. Хайруллин** - д-р физ.-мат. наук, проф. каф. теоретической механики и сопротивления материалов КНИТУ, tmsm@kstu.ru; **Х. А. Абрагим** - канд. техн. наук, доцент, Технологический университет – Ирак-Багдад; **О. И. Алхалили** - канд. техн. наук, доцент, Технологический университет – Ирак-Багдад.