УДК 544.35.03:665.7

О. Р. Каратаев, С. В. Анаников

ДИНАМИКА АДСОРБЦИИ С УЧЕТОМ ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ ПРИ ОЧИСТКЕ СТОКОВ ПЛАВАТЕЛЬНЫХ БАССЕЙНОВ

Ключевые слова: модель, адсорбция, массоперенос, преобразование Лапласа, оригинал, изображение.

В статье рассматривается модель адсорбции хлорорганических соединений на цеолитах с учетом химической реакции. Задача решается для случая, когда основное сопротивление массопереносу сосредоточено во внешней фазе. Решения получены методом преобразования Лапласа. Они могут быть распространены на аналогичные задачи при кусочно-линейной аппроксимации нелинейной изотермы адсорбции, осложнённой химической реакцией первого порядка.

Keywords: model, adsorption, masstransfer, transformation of Laplace, original, representation.

In the article is descrebed model adsorption of chlororganic compaunds on ceolits with chemical reaction of first order. It is taked into consideration masstransfer without calculation longitudinal diffusion (masstransfer). Solutions of task was obtained by method trasformation of Laplace and can be disseminate on analogy tasks at part-linear approximation unlinear isotherm of adsorption at chemical reaction of first order.

В настоящей работе аналитически решается задача динамики адсорбции с использованием линейной изотермы наиболее общего вида с учетом изменения концентраций целевого компонента за счет химической реакции.

Как уже отмечалось [1, 2] задача динамики адсорбции основывается на уравнении баланса массы целевого компонента (адсорбтива) для бесконечно малого элемента слоя, уравнениях кинетики адсорбции и изотермы адсорбции. Решение данной задачи позволит при кусочно-линейной аппроксимации нелинейной изотермы адсорбции выяснить физическую сущность изучаемого процесса и без проблем описать любую часть изотермы сложной формы. Кстати, следует заметить, что синтетические цеолиты, которые часто применяются в процессах очистки, имеют слегка выпуклую изотерму адсорбции близкую к уравнению прямой [3].

Общая система дифференциальных уравнений, описывающих динамику адсорбции, в одномерном потоке без учета продольной диффузии (с учетом только внешнего массопереноса), с отрицательным источником массы, имеет вид

$$-\frac{\partial C(x,\tau)}{\partial \tau}+\delta\frac{\partial C_a(x,\tau)}{\partial \tau}+W\frac{\partial C(x,\tau)}{\partial x}=$$
$$=-K_c C(x,\tau),\ x>0,\ \tau>0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial C_a(x,\tau)}{\partial \tau}=K\left[C(x,\tau)-C^*(C_a)\right],x>0,\tau>0. \qquad (2)$$

при краевых условиях

$$C(x,0)=0,\ x>0, \qquad (3)$$

$$C_a(x,0)=0,\ x>0, \qquad (4)$$

$$C(0,\tau),\ \tau>0. \qquad (5)$$

Отличие от [1] в данной задаче состоит в учете отрицательного источника массы за счет химической реакции первого порядка.

Уравнение изотермы адсорбции

$$C_a(x,\tau)=AC^*(C_a)-B. \qquad (6)$$

Здесь $C_a(x,\tau)$ - концентрация адсорбированного вещества в сорбенте в сечении x в момент времени τ; $C(x,\tau)$ - концентрация адсорбтива в потоке на расстоянии x в момент времени τ; W - скорость потока; K - коэффициент массообмена; K_c - константа скорости реакции; $\delta=\frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon}$ - коэффициент; ε - доля свободного сечения адсорбента (постоянная по объему порозность неподвижного слоя); C^* - концентрация целевого компонента в потоке равновесная со средним содержанием адсорбитива C_a в слое.

Первые два слагаемых в левой части уравнения (1) представляют собой скорость изменения массы целевого компонента в зазорах между частицами и внутри частиц соответственно. Третье слагаемое соответствует приращению массы целевого компонента за счет конвективного переноса с потоком. Слагаемое в правой части уравнения (1) учитывает изменение массы целевого компонента за счет протекания химической реакции.

Краевые условия (3) - (5) выражают следующее.

В начальном сечении неподвижного слоя в произвольный момент времени τ концентрация целевого компонента постоянны и равна C_0: условие (5); в начальный момент времени $\tau=0$ неподвижный слой свободен от адсорбируемого вещества: условия (3), (4).

В целях обобщения задачи принимается, что коэффициенты A,B,K могут принимать как положительные, так и отрицательные значения.

При $K>0$ имеет место сток вещества, при $K<0$ источник массы за счет химической реакции.

Задача (1) - (5) решается с использованием одностороннего преобразования Лапласа по переменной τ.

Преобразования (2) с учетом выражения (6), а также (1) с учетом (2) и (6) позволяют записать

$$\frac{\partial C(x,\tau)}{\partial \tau}+W\frac{\partial C(x,\tau)}{\partial x}=$$
$$=-\delta K\left[C(x,\tau)-\frac{C_a(x,\tau)}{A}-\frac{B}{A}\right]-K\,C(x,\tau),$$

$x > 0, \tau > 0$ (1a)

$$\frac{\partial C_a(x,\tau)}{\partial \tau} = K\left[C(x,\tau) - \frac{C_a(x,\tau)}{A} - \frac{B}{A}\right],$$

$x > 0, \tau > 0.$ (2a)

К уравнениям (1a), (2a) и граничным условиям (3) - (5) применяется прямое преобразование Лапласа [4]

$$C(x,\tau) \multimap F(x,s) = \int_0^\infty C(x,\tau) e^{-s\tau} d\tau, \quad (7)$$

$$C_a(x,\tau) \multimap \Phi(x,s) = \int_0^\infty C_a(x,\tau) e^{-s\tau} d\tau, \quad (8)$$

$$\frac{\partial C(x,\tau)}{\partial \tau} \multimap sF(x,s) - C(x,0), \quad (9)$$

$$\frac{\partial C_a(x,\tau)}{\partial \tau} \multimap s\Phi(x,s) - C_a(x,0). \quad (10)$$

Здесь знак $\multimap$ обозначает переход от оригинала к изображению и наоборот [4].

Если умножить обе части уравнений (1a), (2a) и условие (5) на $e^{-s\tau}$ и проинтегрировать каждый член уравнений по τ в пределах от 0 до ∞, то после незначительных преобразований с учетом (7) - (10), можно получить

$$sF(x,s) + W\frac{\partial F(x,s)}{\partial x} =$$

$$-(\delta K + K_c)F(x,s) + \frac{\delta K}{A}\Phi(x,s) + \frac{\delta K B}{A}\frac{1}{s}, \quad (11)$$

$$\Phi(x,s) = \frac{AK}{AS+K}F(x,s) - \frac{KB}{As+K}\frac{1}{s}, \quad (12)$$

$$F(0,s) = \frac{C_0}{s}. \quad (*)$$

Если подставить $\Phi(x,s)$ из (12) в (11), то совместно с граничным условием (*) получается задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dF(x,s)}{dx} + A_1 F(x,s) - B_1 = 0, \quad (13)$$

$$F(0,s) = \frac{C_0}{s}, \quad (14)$$

где $A_1 = \frac{s}{W} + \frac{\delta K s}{(s+\frac{K}{A})W} + \frac{K_c}{W}, B_1 = \frac{KB\delta}{AW(s+\frac{K}{A})}.$

Здесь буква s выполняет роль параметра.

Решением (13) с условием (14) будет функция

$$F(x,s) = \frac{1}{A_1}\left[B_1 + \left(\frac{A_1 C_0}{s} - B_1\right)e^{-A_1 x}\right]. \quad (15)$$

Подстановка (15) в соотношение (14) дает

$$\Phi(x,s) = \frac{KB_1}{A_1}\frac{1}{(s+\frac{K}{A})}\left(1-e^{-A_1 x}\right) +$$

$$+\frac{1}{s(s+\frac{K}{A})}\left[KC_0 e^{-A_1 x} - \frac{BK}{A}\right]. \quad (16)$$

Замена в решениях (15), (16) констант A_1, B_1 их значениями приводит к выражениям

$$F(x,s) = \frac{KB\delta}{A}\frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} +$$

$$+\frac{C_0}{s}exp\left[-\left(\frac{s}{W} + \frac{\delta K}{W}\frac{s}{s+\frac{K}{A}} + \frac{K_c}{W}\right)x\right] -$$

$$-\frac{KB\delta}{A}\frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} \times$$

$$\times exp\left[-\left(\frac{s}{W} + \frac{\delta K}{W}\frac{s}{s+\frac{K}{A}} + \frac{K_c}{W}\right)x\right]; \quad (17)$$

$$\Phi(x,s) = \frac{K^2 B\delta}{A}\frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0} \times$$

$$\times\frac{1}{s+\frac{K}{A}}\left\{1 - exp\left[-\left(\frac{s}{W} + \frac{\delta K}{W}\frac{s}{s+\frac{K}{A}} + \frac{K_c}{W}\right)x\right]\right\} +$$

$$+\frac{1}{s(s+\frac{K}{A})} \times$$

$$\times\left\{KC_0\, exp\left[-\left(\frac{s}{W} + \frac{\delta K}{W}\frac{s}{s+\frac{K}{A}} + \frac{K_c}{W}\right)x\right] - \frac{BK}{A}\right\}, \quad (18)$$

где $a_1 = \frac{K + A\delta K + AK_c}{A}, a_0 = \frac{K_c K}{A}.$

В соотношениях (17), (18) необходимо преобразовать экспоненциальную функцию для получения табличных изображений.

Эти изображения будут использованы при свертке оригиналов для получения окончательного решения. Необходимо также выполнить преобразование отдельных членов, входящих в выражения (17), (18).

$$exp\left[-\left(\frac{s}{W} + \frac{\delta K}{W}\frac{s}{s+\frac{K}{A}} + \frac{K_c}{W}\right)x\right] =$$

$$= exp\left(-\frac{x}{W}s\right)exp\left[\frac{K^2\delta x}{AW(s+\frac{K}{A})}\right] \times$$

$$\times exp\left[-(\delta K + K_c)\frac{x}{W}\right].$$

Решение в изображениях (17), (18) позволяют независимо друг от друга переходит к оригиналам. Поэтому можно осуществить последовательный переход к оригиналам сначала для функции $F(x,s)$, а затем - $\Phi(x,s)$ или наоборот.

Преобразование (17) дает

$$F(x,S)=\frac{K\,B\,\delta}{A}\frac{1}{s^2+a_1s+a_0}+$$

$$+\Biggl\{\frac{C_0}{s}e^{-\frac{x}{W}s}\left[exp\left(\frac{K^2\delta\,x}{AW}\frac{1}{s+\frac{K}{A}}\right)-1\right]+$$

$$+\frac{C_0}{s}e^{-\frac{x}{W}s}-\frac{K\,B\,\delta}{A}\frac{1}{s^2+a_1s+a_0}\times$$

$$\times e^{-\frac{x}{W}s}\left[exp\left(\frac{K^2\delta\,x}{AW}\frac{1}{s+\frac{K}{A}}\right)-1\right]-$$

$$-\frac{K\,B\,\delta}{A}\frac{1}{s^2+a_1s+a_0}e^{-\frac{x}{W}s}\Biggr\}e^{-(\delta K+K_c)\frac{x}{W}}. \qquad (17а)$$

Преобразование в (18) с раскрытием скобок и последующим умножением числителя и знаменателя у второго и третьего членов в правой части выражения на $(s+\frac{K}{A})$ и выделение множителя $\frac{1}{(s+\frac{K}{A})^2}$ можно получить

$$\Phi(x,s)=\frac{K^2\,B\,\delta}{A}\frac{1}{s^2+a_1s+a_0}\frac{1}{(s+\frac{K}{A})}-$$

$$-\Biggl\{\frac{K^2B\,\delta}{A}\,e^{-\frac{x}{W}s}\,\frac{s}{s^2+a_1s+a_0}\frac{1}{(s+\frac{K}{A})^2}\times$$

$$\times exp\left(\frac{K^2\delta\,x}{AW}\frac{1}{s+\frac{K}{A}}\right)+\frac{K^3B\,\delta}{A^2}e^{-\frac{x}{W}s}\,\frac{1}{s^2+a_1s+a_0}\times$$

$$\times\frac{1}{(s+\frac{K}{A})^2}\;exp\left(\frac{K^2\delta\,x}{AW}\frac{1}{s+\frac{K}{A}}\right)-K\,C_0\,e^{-\frac{x}{W}s}\times$$

$$\times\frac{1}{(s+\frac{K}{A})^2}exp\left(\frac{K^2\delta\,x}{AW}\frac{1}{s+\frac{K}{A}}\right)-$$

$$-\frac{K^2C_0}{A}e^{-\frac{x}{W}s}\,\frac{1}{s}\frac{1}{(s+\frac{K}{A})^2}\times$$

$$\times exp\left(\frac{K^2\delta\,x}{AW}\frac{1}{s+\frac{K}{A}}\right)\Biggr\}e^{-(\delta K+K_c)\frac{x}{W}}-$$

$$-\frac{B\,K}{A}\frac{1}{s(s+\frac{K}{A})}. \qquad (18а)$$

Для перехода к оригиналам от изображений в данной задаче базовыми являются следующие соответствия [4, 5]

$$\frac{1}{s^2+a_1s+a_0}\;\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{a_2}}e^{-\frac{a_1\tau}{2}}\,sin(\sqrt{a_2}\,\tau)\;\; при\;a_2>0,\\ \frac{1}{\sqrt{-a_2}}e^{-\frac{a_1\tau}{2}}\,sh(\sqrt{-a_2}\,\tau)\;\; при\;a_2<0;\end{cases} \qquad (19)$$

$$\frac{s}{s^2+a_1s+a_0}\;\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{\frac{a_2}{a_0}}}e^{-\frac{a_1\tau}{2}}\,sin(\sqrt{a_2}\,\tau+\\ +arctg\frac{\sqrt{a_2}}{-\frac{a_1}{2}})\;\; при\;a_2>0,\\ \frac{1}{\sqrt{-\frac{a_2}{a_0}}}e^{-\frac{a_1\tau}{2}}\,sh(\sqrt{-a_2}\,\tau+\\ +Arth\frac{\sqrt{-a_2}}{-\frac{a_1}{2}})\;\; при\;a_2<0;\end{cases} \qquad (20)$$

$$\left[exp\left(\frac{K^2\delta\,x}{AW}\frac{1}{s+\frac{K}{A}}\right)-1\right]\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ\;\frac{e^{-\frac{K}{A}\tau}}{\sqrt{\frac{AW}{K^2\delta\,x}\tau}}I_1\left(2\sqrt{\frac{K^2\delta\,x}{AW}\tau}\right), \qquad (21)$$

где $I_1\left(2\sqrt{\frac{K^2\delta\,x}{AW}\tau}\right)$ - бесселева функция первого рода мнимого аргумента первого порядка;

$$\frac{1}{(s+\frac{K}{A})^2}exp\left(\frac{K^2\delta\,x}{AW}\frac{1}{s+\frac{K}{A}}\right)\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ\;\sqrt{\frac{AW}{K^2\delta\,x}\tau}\;e^{-\frac{K}{A}\tau}I_1\left(2\sqrt{\frac{K^2\delta\,x}{AW}\tau}\right), \qquad (22)$$

$$\frac{e^{-\frac{x}{W}s}}{s}\;\bullet\!\!-\!\!\circ\begin{cases}0\;при\;0<\tau<\frac{x}{W},\\ 1\;при\;\tau>\frac{x}{W};\end{cases} \qquad (23)$$

$$\frac{1}{s+\frac{K}{A}}\;\bullet\!\!-\!\!\circ\;e^{-\frac{K}{A}\tau}; \qquad (24)$$

$$\frac{1}{s(s+\frac{K}{A})}\ \bullet\!\!-\!\!\circ\ \frac{A}{K}-\frac{A}{K}e^{-\frac{K}{A}\tau}. \qquad (25)$$

С целью получения окончательных формул (оригиналов) от изображений (17а), (18а) выполнялись операции свертывания оригиналов от произведения изображений с учетом таблицы оригиналов для отдельных членов, представленных соответствиями (19) - (25).

Операция свертывания оригиналов выполнялась по известному соотношению [4]

$$f_1(s)f_2(s)\ \bullet\!\!-\!\!\circ\ F_1(\tau)*F_2(\tau)=$$

$$=\int_0^{\tau}F_1(t)F_2(\tau-t)dt=\int_0^{\tau}F_1(\tau-t)F_2(t)dt. \qquad (26)$$

Кроме этого использовалась первая теорема смещения [4]

$$e^{-as}f(s)\ \bullet\!\!-\!\!\circ\ \begin{cases}0 \ \ при\ \ \tau<a,\\ F(\tau-a)\ \ при\ \tau>a.\end{cases} \qquad (27)$$

В результате были получены следующие выражения

$$e^{-\frac{x}{W}s}\frac{1}{s^2+a_1s+a_0}\ \bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ\ \begin{cases}0\ \ при\ \ \tau<\dfrac{x}{W},\\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{a_2}}e^{-\frac{a_1\left(\tau-\frac{x}{W}\right)}{2}}sin\left[\sqrt{a_2}\left(\tau-\dfrac{x}{W}\right)\right]\\[2mm] при\ \ \tau>\dfrac{x}{W},a_2>0,\\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{-a_2}}e^{-\frac{a_1\left(\tau-\frac{x}{W}\right)}{2}}sh\left[\sqrt{-a_2}\left(\tau-\dfrac{x}{W}\right)\right]\\[2mm] при\ \ \tau>\dfrac{x}{W},a_2<0;\end{cases} \qquad (28)$$

$$\frac{e^{-\frac{x}{W}s}}{s}\left[exp\left(\frac{K^2\delta x}{AW}\frac{1}{s+\frac{K}{A}}\right)-1\right]\ \bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ\ \begin{cases}0\ при\ \ \tau<\dfrac{x}{W},\\[2mm] \displaystyle\int_{\frac{x}{W}}^{\tau}\sqrt{\frac{K^2\delta x}{AWt}}\,e^{-\frac{K}{A}t}I_1\left(2\sqrt{\frac{K^2\delta x}{AW}t}\right)dt;\end{cases} \qquad (29)$$

$$e^{-\frac{x}{W}s}\frac{1}{s^2+a_1s+a_0}\left[exp\left(\frac{K^2\delta x}{AW}\frac{1}{s+\frac{K}{A}}\right)-1\right]\ \bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ\ \begin{cases}0\ \ при\ \ \tau<\dfrac{x}{W},\\[2mm] \displaystyle\frac{1}{\sqrt{a_2}}\int_{\frac{x}{W}}^{\tau}e^{-\frac{a_1\left(t-\frac{x}{W}\right)}{2}}sin\left[\sqrt{a_2}\left(t-\frac{x}{W}\right)\right]\times\\[2mm] \displaystyle\times\sqrt{\frac{K^2\delta x}{AW(\tau-t)}}e^{-\frac{K(\tau-t)}{A}}\times\\[2mm] \displaystyle\times I_1\left[2\sqrt{\frac{K^2\delta x}{AW}(\tau-t)}\right]dt\\[2mm] при\ \ \tau>\dfrac{x}{W},a_2>0,\\[2mm] \displaystyle\frac{1}{\sqrt{-a_2}}\int_{\frac{x}{W}}^{\tau}e^{-\frac{a_1\left(t-\frac{x}{W}\right)}{2}}sh\left[\sqrt{-a_2}\left(t-\frac{x}{W}\right)\right]\times\\[2mm] \displaystyle\times\sqrt{\frac{K^2\delta x}{AW(\tau-t)}}e^{-\frac{K(\tau-t)}{A}}\times\\[2mm] \displaystyle\times I_1\left[2\sqrt{\frac{K^2\delta x}{AW}(\tau-t)}\right]dt\\[2mm] при\ \ \tau>\dfrac{x}{W},a_2<0;\end{cases} \qquad (30)$$

$$\frac{1}{s^2+a_1s+a_0}\frac{1}{s+\frac{K}{A}}\ \bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ\ \begin{cases}\displaystyle\frac{1}{\sqrt{a_2}}\int_0^{\tau}e^{-\frac{a_1t}{2}}sin\left(\sqrt{a_2}\,t\right)e^{-\frac{K}{A}(\tau-t)}dt\\[2mm] при\ \ a_2>0,\\[2mm] \displaystyle\frac{1}{\sqrt{-a_2}}\int_0^{\tau}e^{-\frac{a_1t}{2}}sh\left(\sqrt{-a_2}\,t\right)e^{-\frac{K}{A}(\tau-t)}dt\\[2mm] при\ \ a_2<0;\end{cases} \qquad (31)$$

$$e^{-\frac{x}{W}s}\frac{1}{s^2+a_1s+a_0}\frac{1}{(s+\frac{K}{A})^2}\times$$

$$\times exp\left(\frac{K^2\delta x}{AW}\frac{1}{s+\frac{K}{A}}\right)\ \bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$
\bullet\!\!-\!\!\circ\ \begin{cases}
0\ \ \text{при}\ \ \tau<\dfrac{x}{W}, \\
\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{a_2}{a_0}}}\displaystyle\int_{\frac{x}{W}}^{\tau} e^{-\frac{a_1\left(t-\frac{x}{W}\right)}{2}}\times \\
\times\sin\left[\sqrt{a_2}\left(t-\dfrac{x}{W}\right)+\mathrm{arctg}\dfrac{\sqrt{a_2}}{-\dfrac{a_1}{2}}\right]\times \\
\times\sqrt{\dfrac{AW}{K^2\delta x}(\tau-t)}\ e^{-\frac{K}{A}(\tau-t)}\times \\
\times I_1\left[2\sqrt{\dfrac{K^2\delta x}{AW}(\tau-t)}\right]dt \\
\text{при}\ \ \tau>\dfrac{x}{W}, a_2>0, \\
\dfrac{1}{\sqrt{-\dfrac{a_2}{a_0}}}\displaystyle\int_{\frac{x}{W}}^{\tau} e^{-\frac{a_1\left(t-\frac{x}{W}\right)}{2}}\times \\
\times sh\left[\sqrt{-a_2}\left(t-\dfrac{x}{W}\right)+Arth\dfrac{\sqrt{-a_2}}{-\dfrac{a_1}{2}}\right]\times \\
\times\sqrt{\dfrac{AW}{K^2\delta x}(\tau-t)}\ e^{-\frac{K}{A}(\tau-t)}\times \\
\times I_1\left[2\sqrt{\dfrac{K^2\delta x}{AW}(\tau-t)}\right]dt \\
\text{при}\ \ \tau>\dfrac{x}{W}, a_2<0;
\end{cases} \qquad (32)
$$

$$
e^{-\frac{x}{W}s}\,\frac{1}{s^2+a_1s+a_0}\,\frac{1}{\left(s+\dfrac{K}{A}\right)^2}\times
$$

$$
\times\left[\exp\left(\frac{K^2\delta x}{AW}\,\frac{1}{s+\dfrac{K}{A}}\right)-1\right]\bullet\!\!-\!\!\circ
$$

$$
\bullet\!\!-\!\!\circ\ \begin{cases}
0\ \ \text{при}\ \ \tau<\dfrac{x}{W}, \\
\dfrac{1}{\sqrt{a_2}}\displaystyle\int_{\frac{x}{W}}^{\tau} e^{-\frac{a_1\left(t-\frac{x}{W}\right)}{2}}\times \\
\times\sin\left[\sqrt{a_2}\left(t-\dfrac{x}{W}\right)\right]\times \\
\times\sqrt{\dfrac{AW}{K^2\delta x}(\tau-t)}\ e^{-\frac{K}{A}(\tau-t)}\times \\
\times I_1\left[2\sqrt{\dfrac{K^2\delta x}{AW}(\tau-t)}\right]dt \\
\text{при}\ \ \tau>\dfrac{x}{W}, a_2>0, \\
\dfrac{1}{\sqrt{-a_2}}\displaystyle\int_{\frac{x}{W}}^{\tau} e^{-\frac{a_1\left(t-\frac{x}{W}\right)}{2}}\times \\
\times sh\left[\sqrt{-a_2}\left(t-\dfrac{x}{W}\right)\right]\times \\
\times\sqrt{\dfrac{AW}{K^2\delta x}(\tau-t)}\ e^{-\frac{K}{A}(\tau-t)}\times \\
\times I_1\left[2\sqrt{\dfrac{K^2\delta x}{AW}(\tau-t)}\right]dt \\
\text{при}\ \ \tau>\dfrac{x}{W}, a_2<0;
\end{cases} \qquad (33)
$$

$$
e^{-\frac{x}{W}s}\,\frac{1}{(s+\frac{K}{A})^2}\exp\left[\frac{K^2\delta x}{AW(s+\frac{K}{A})}\right]\bullet\!\!-\!\!\circ
$$

$$
\bullet\!\!-\!\!\circ\ \begin{cases}
0\ \ \text{при}\ \ \tau<\dfrac{x}{W}, \\
\sqrt{\dfrac{AW}{K^2\delta x}\left(\tau-\dfrac{x}{W}\right)}\ e^{-\frac{K\left(\tau-\frac{x}{W}\right)}{A}}\times \\
I_1\left[2\sqrt{\dfrac{K^2\delta x}{AW}(\tau-t)}\right]\ \text{при}\ \ \tau>\dfrac{x}{W};
\end{cases} \qquad (34)
$$

$$
\frac{e^{-\frac{x}{W}s}}{s}\,\frac{1}{(s+\frac{K}{A})^2}\exp\left[\frac{K^2\delta x}{AW(s+\frac{K}{A})}\right]\bullet\!\!-\!\!\circ
$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ \begin{cases} 0 \ \text{при} \ \tau < \dfrac{x}{W}, \\ \displaystyle\int_{\frac{x}{W}}^{\tau} \sqrt{\frac{AW}{K^2\delta x} t}\; e^{-\frac{K}{A}t} \times \\ I_1\left[2\sqrt{\dfrac{K^2\delta x}{AW} t}\right] dt \ \text{при} \ \tau > \dfrac{x}{W}; \end{cases} \qquad (35)$$

Наконец, можно, в соответствии с выполненными преобразованиями, записать окончательное решение исходной задачи

При $\tau < \frac{x}{W}$, $a_2 > 0$

$$F(x,s) \bullet\!\!-\!\!\circ C(x,\tau) = \frac{KB\delta}{A\sqrt{a_2}} e^{-\frac{a_1\tau}{2}} \sin\left(\sqrt{a_2}\, t\right),$$

$$\Phi(x,s) \bullet\!\!-\!\!\circ C_a(x,\tau) = \frac{K^2 B\delta}{A\sqrt{a_2}} e^{-\frac{K\tau}{A}} \int_0^{\tau} e^{-\left(\frac{a_1}{2}-\frac{K}{A}\right)t} \times$$

$$\times \sin\left(\sqrt{a_2}\, t\right) dt - B\left(1 - e^{-\frac{K}{A}}\right).$$

При $\tau < \frac{x}{W}$, $a_2 < 0$

$$F(x,s) \bullet\!\!-\!\!\circ C(x,\tau) = \frac{KB\delta}{A\sqrt{-a_2}} e^{-\frac{a_1\tau}{2}} sh\left(\sqrt{-a_2}\,\tau\right),$$

$$\Phi(x,s) \circ\!\!-\!\!\bullet C_a(x,\tau) = \frac{K^2 B\delta}{A\sqrt{-a_2}} e^{-\frac{K\tau}{A}} \int_0^{\tau} e^{-\left(\frac{a_1}{2}-\frac{K}{A}\right)t} \times$$

$$\times sh\left(\sqrt{-a^2}\, t\right) dt - B\left(1 - e^{-\frac{K}{A}}\right).$$

При $\tau > \frac{x}{W}$, $a_2 > 0$

$$F(x,s) \bullet\!\!-\!\!\circ C(x,\tau) = \frac{KB\delta}{A\sqrt{a_2}} e^{-\frac{a_1\tau}{2}} \sin\left(\sqrt{a_2}\,\tau\right) +$$

$$+ \left\{ C_0 \left[1 + \int_{\frac{x}{W}}^{\tau} \frac{K^2\delta x}{AWt} e^{-\frac{K}{A}t} I_1\left(2\sqrt{\frac{K^2\delta x}{AW} t}\right) dt \right] - \right.$$

$$- \frac{KB\delta}{A\sqrt{a_2}} e^{-\left(\frac{K\tau}{A}-\frac{a_1 x}{2W}\right)} \int_{\frac{x}{W}}^{\tau} e^{-\left(\frac{a_1}{2}-\frac{K}{A}\right)t} \sqrt{\frac{K^2\delta x}{AW(\tau-t)}} \times$$

$$\times \sin\left[\sqrt{a_2}\left(t - \frac{x}{W}\right)\right] I_1\left[2\sqrt{\frac{K^2\delta x}{AW}(\tau-t)}\right] dt -$$

$$\left. - \frac{KB\delta}{A\sqrt{a_2}} e^{-\frac{a_1\left(\tau-\frac{x}{W}\right)}{2}} \sin\left[\sqrt{a_2}\left(\tau - \frac{x}{W}\right)\right] \right\} e^{-(\delta K + K_c)\frac{x}{W}};$$

$$\Phi(x,s) \bullet\!\!-\!\!\circ C_a(x,\tau) = \frac{K^2 B\delta}{A\sqrt{a^2}} e^{-\frac{K\tau}{A}} \int_0^{\tau} e^{-\left(\frac{a_1}{2}-\frac{K}{A}\right)t} \times$$

$$\times \sin\left(\sqrt{a_2}\, t\right) dt - \left\{ \frac{K^2 B\delta}{A\sqrt{\frac{a_2}{a_0}}} e^{-\left(\frac{K\tau}{a}-\frac{a_1 x}{2W}\right)} \int_{\frac{x}{W}}^{\tau} e^{-\left(\frac{a_1}{2}-\frac{K}{A}\right)t} \times \right.$$

$$\times \sin\left[\sqrt{a_2}\left(t - \frac{x}{W}\right) + arctg\frac{\sqrt{a_2}}{-\frac{a_1}{2}}\right] \sqrt{\frac{AW}{K^2\delta x}(\tau - t)} \times$$

$$\times I_1\left[2\sqrt{\frac{K^2\delta x}{AW}(\tau-t)}\right] dt + \frac{K^3 B\delta}{A^2\sqrt{a_2}} e^{-\left(\frac{K\tau}{a}-\frac{a_1 x}{2W}\right)} \times$$

$$\times \int_{\frac{x}{W}}^{\tau} e^{-\left(\frac{a_1}{2}-\frac{K}{A}\right)t} \sin\left[\sqrt{a_2}\left(t - \frac{x}{W}\right)\right] \sqrt{\frac{AW}{K^2\delta x}(\tau - t)} \times$$

$$\times I_1\left[2\sqrt{\frac{K^2\delta x}{AW}(\tau-t)}\right] dt - KC_0 \sqrt{\frac{AW}{K^2\delta x}\left(\tau - \frac{x}{W}\right)} \times$$

$$\times e^{-\frac{K}{A}\left(\tau-\frac{x}{W}\right)} I_1\left[2\sqrt{\frac{K^2\delta x}{AW}\left(\tau - \frac{x}{W}\right)}\right] - \frac{C_0 K^2}{A} \times$$

$$\left. \times \int_{\frac{x}{W}}^{\tau} \sqrt{\frac{AW}{K^2\delta x} t}\; e^{-\frac{K\tau}{A}} I_1\left(2\sqrt{\frac{K^2\delta x}{AW} t}\right) dt \right\} \times$$

$$\times e^{-(\delta K + K_c)\frac{x}{W}} - B\left(1 - e^{-\frac{K\tau}{A}}\right).$$

При $\tau > \frac{x}{W}$, $a_2 < 0$

$$F(x,s) \bullet\!\!-\!\!\circ C(x,\tau) = \frac{KB\delta}{A\sqrt{-a_2}} e^{-\frac{a_1\tau}{2}} sh\left(\sqrt{-a_2}\,\tau\right) +$$

$$+ \left\{ C_0 \left[1 + \int_{\frac{x}{W}}^{\tau} \frac{K^2\delta x}{AWt} e^{-\frac{K}{A}t} I_1\left(2\sqrt{\frac{K^2\delta x}{AW} t}\right) dt \right] - \right.$$

$$- \frac{KB\delta}{A\sqrt{-a^2}} e^{-\left(\frac{K\tau}{A}-\frac{a_1 x}{2W}\right)} \int_{\frac{x}{W}}^{\tau} e^{-\left(\frac{a_1}{2}-\frac{K}{A}\right)t} \sqrt{\frac{K^2\delta x}{AW(\tau-t)}} \times$$

$$\times sh\left[\sqrt{-a_2}\left(t-\frac{x}{W}\right)\right] I_1\left[2\sqrt{\frac{K^2\delta x}{AW}(\tau-t)}\right]dt -$$

$$\left.-\frac{KB\delta}{A\sqrt{-a_2}} e^{-\frac{a_1\left(\tau-\frac{x}{W}\right)}{2}} sh\left[\sqrt{-a_2}\left(\tau-\frac{x}{W}\right)\right]\right\} e^{-(\delta K+K_c)\frac{x}{W}};$$

$\Phi(x,s)$ •—○

$$•—○\ C_a(x,\tau)=\frac{K^2B\delta}{A\sqrt{-a^2}} e^{-\frac{K\tau}{A}} \int_0^\tau e^{-\left(\frac{a_1}{2}-\frac{K}{A}\right)t} \times$$

$$\times sh\left(\sqrt{-a_2}\, t\right)dt - \left\{\frac{K^2B\delta}{A\sqrt{-\frac{a_2}{a_0}}} e^{-\left(\frac{K\tau}{a}-\frac{a_1x}{2W}\right)} \int_{\frac{x}{W}}^{\tau} e^{-\left(\frac{a_1}{2}-\frac{K}{A}\right)t} \times\right.$$

$$\times sh\left[\sqrt{-a_2}\left(t-\frac{x}{W}\right)+Arth\frac{\sqrt{-a_2}}{-\frac{a_1}{2}}\right]\sqrt{\frac{AW}{K^2\delta x}(\tau-t)}\times$$

$$\times I_1\left[2\sqrt{\frac{K^2\delta x}{AW}(\tau-t)}\right]dt+\frac{K^3B\delta}{A^2\sqrt{-a_2}} e^{-\left(\frac{K\tau}{a}-\frac{a_1x}{2W}\right)}\times$$

$$\times\int_{\frac{x}{W}}^{\tau} e^{-\left(\frac{a_1}{2}-\frac{K}{A}\right)t} sh\left[\sqrt{-a_2}\left(t-\frac{x}{W}\right)\right]\sqrt{\frac{AW}{K^2\delta x}(\tau-t)}\times$$

$$\times I_1\left[2\sqrt{\frac{K^2\delta x}{AW}(\tau-t)}\right]dt - K C_0\sqrt{\frac{AW}{K^2\delta x}\left(\tau-\frac{x}{W}\right)}\times$$

$$\times e^{-\frac{K}{A}\left(\tau-\frac{x}{W}\right)} I_1\left[2\sqrt{\frac{K^2\delta x}{AW}\left(\tau-\frac{x}{W}\right)}\right]-\frac{C_0K^2}{A}\times$$

$$\left.\times\int_{\frac{x}{W}}^{\tau}\sqrt{\frac{AW}{K^2\delta x}t}\, e^{-\frac{K\tau}{A}} I_1\left(2\sqrt{\frac{K^2\delta x}{AW}t}\right)dt\right\}\times$$

$$\times e^{-(\delta K+K_c)\frac{x}{W}} - B\left(1-e^{-\frac{K\tau}{A}}\right).$$

При переходе в пространство оригиналов для функции $F(x,s)$ - использовались соответствия (19), (23), (28) - (30), а для функции $\Phi(x,s)$ - соответствия (31) - (35). При этом были преобразованы произведения экспоненциальных функций, имеющиеся в представленных оригиналах.

Следует отметить, что в решениях для $\tau < \frac{x}{W}$ определенные интегралы могут быть вычислены в конечном виде.

Литература

1. С.В. Анаников, Вестн. Казан. технол. ун-та, **15**, 8, 247-253 (2012).
2. С.В. Анаников, Вестн. Казан. технол. ун-та, **15**, 10, 247-250 (2012).
3. Л.М. Никитина Термодинамические параметры и коэффициенты массопереноса во влажных материалах. Энергия, Москва, 1968. 500 с.
4. Г. Дёч, Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. ГИФМЛ, Москва, 1958. 208 с.
5. В.А. Диткин, Справочник по операционному исчислению. ГИТТЛ, Москва - Ленинград, 1951. 256 с.

© **О. Р. Каратаев -** к.т.н., доцент каф. машиноведения КНИТУ, oskar_karataev@mail.ru; **С. В. Анаников** – д-р техн. наук, проф. каф. химической кибернетики КНИТУ; ananikovsv@rambler.ru.