

И. Е. Плещинская, К. Н. Стехина, Д. Н. Тумаков

О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ КОМПОЗИТА, ЗАЖАТОГО МЕЖДУ ЖЕСТКОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ И УПРУГИМ ПОЛУПРОСТРАНСТВОМ

Ключевые слова: собственные колебания, метод переопределенной граничной задачи.

Рассмотрена полукрытая упругая волноводная структура, образованная слоем, который с одной стороны жестко закреплен, а с другой – сцеплен с полупространством. Получено характеристическое уравнение для волноводных мод такой структуры. Исследованы решения характеристического уравнения. Получены условия существования волноводных мод для конкретных упругих сред. Приведены графики зависимостей волновых чисел от частоты.

Keywords: eigen oscillations, over-determined boundary value problem method.

The semi-opened elastic waveguide structure formed by a layer which is rigidly fixed on the one hand and is linked to a half-space on another hand is considered. The characteristic equation for the waveguide modes of such structure is constructed. Solutions of the characteristic equation are investigated. Existence conditions of the waveguide modes for concrete elastic media are obtained. Graphics of dependences of wave numbers on frequency are provided.

Введение

Слоистые покрытия, образованные композитными материалами, используются в различных областях промышленности, в том числе при производстве авиационной и космической техники [1, 2]. Применяемые в таких покрытиях слоистые композитные структуры получили широкое распространение, прежде всего, из-за своих механических свойств [3, 4, 5]. Определенный интерес представляет процесс распространения упругих колебаний в подобных структурах. Например, в [6] исследованы свойства слоистого композита с периодическими включениями, в [7] рассмотрены колебания многослойного композита со свободной поверхностью, а в работах [8, 9] поведение многослойной упругой геологической среды при распространении упругих возмущений.

В ряде конструкций поверхность, контактирующая со слоистыми покрытиями, имеет существенно более высокую жесткость, что позволяет эту поверхность считать абсолютно жесткой. При большом количестве периодически чередующихся тонких слоев удобно использовать метод усреднения [10, 11]. Таким образом, в ряде случаев вместо открытой многослойной структуры можно исследовать однослойный полукрытый волновод с фиксированной границей.

В данной работе изучены свойства собственных волн волноводной структуры, которую образуют жестко закрепленная упругая полоса и упругая полуплоскость, находящиеся в полном контакте. Для анализа данной структуры использован метод переопределенной граничной задачи [12]. Этот метод использовался ранее при исследовании собственных колебаний в упругих волноводах [13, 14], а также композитных слоях [6] и [7].

Получено характеристическое уравнение относительно волновых чисел упругого слоя. Указан диапазон, в котором находятся волновые числа. Приведены графики зависимостей волновых чисел от частоты для некоторых упругих материалов.

Постановка задачи

Будем искать при $y > 0$ и $y \neq 0$ (см. рис. 1) ненулевые решения однородной системы уравнений плоской динамической теории упругости

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} - \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = 0,$$

$$\sigma_x = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad (2)$$

$$\sigma_y = \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \tau = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} + \mu \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

с вещественными кусочно постоянными коэффициентами Ламе λ , μ и плотностью ρ .

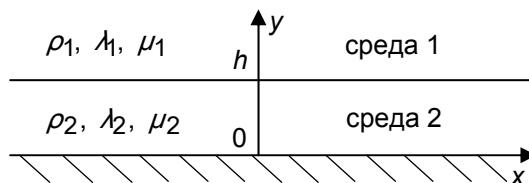


Рис. 1 – Полукрытый упругий волновод

Пусть на границе раздела сред должны быть выполнены условия сопряжения (полный контакт)

$$\begin{aligned} u_x(x, h+0) &= u_x(x, h-0), \\ u_y(x, h+0) &= u_y(x, h-0), \\ \sigma_y(x, h+0) &= \sigma_y(x, h-0), \\ \tau(x, h+0) &= \tau(x, h-0). \end{aligned} \quad (3)$$

Среды 1 и 2 будем полагать полагать однородными и изотропными, с постоянными упругими параметрами ρ_j, λ_j, μ_j .

Положим, что нижняя сторона упругого слоя $y = 0$ установлена на жесткое основание, тогда

$$u_x(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = 0. \quad (4)$$

Примем условие на бесконечности: при $y \rightarrow +\infty$ все компоненты решения системы уравнений (1), (2) должны быть ограничены. Будем считать также, что искомые функции имеют непрерывные производные в полосе и в полуплоскости и непрерывно продолжимы на границы этих областей.

Предположим, что решения системы уравнений (1), (2) гармонически зависят от времени. Выберем эту зависимость в виде $e^{-i\omega t}$, что позволит упростить уравнения (2) и перейти к комплексным амплитудам искомых функций, зависящим только от пространственных координат.

Характеристическое уравнение

Зададим зависимость искомых функций от координаты x в виде $e^{-i\alpha x}$, где комплексное число α – спектральный параметр (продольная постоянная распространения упругой волны). Таким образом, $u_x(x, y) = e^{-i\alpha x} u_x(y)$, $u_y(x, y) = e^{-i\alpha x} u_y(y)$ и так далее. При принятых предположениях из уравнений (1) и (2) следует система обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Полученную систему уравнений исследуем на собственные значения: будем искать значения параметра α , при которых система уравнений имеет ненулевые решения, удовлетворяющие условиям сопряжения (3), граничным условиям (4) и условиям на бесконечности. Решения краевой задачи, соответствующие таким значениям α , определяют собственные волны (моды) полукрытого упругого волновода.

Отсюда следует характеристическое уравнение для определения постоянных распространения [15]

$$\begin{aligned} & i\rho_1\rho_2\omega^4 \left[\left(\frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}} + \frac{\gamma_{21}}{\gamma_{22}} \right) \rho_1 \sin \kappa_{12} + \gamma_{22} \eta - \right. \\ & \left. - \left(\frac{\gamma_{11}}{\gamma_{12}} - \frac{\gamma_{21}}{\gamma_{22}} \right) \rho_2 \sin \kappa_{22} - \gamma_{12} \eta \right] + 4\alpha^2 r + \\ & + f \rho_2 \cos \kappa_{22} - \gamma_{12} \eta - \\ & - f \rho_2 \cos \kappa_{12} + \gamma_{22} \eta = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} r = & 4\alpha^2 \rho_1 (\mu_1 - \mu_2)^2 + 2\omega^2 (\mu_1 - \mu_2) (\rho_1 \rho_2 - 2\alpha^2 \rho_1) + \\ & + \omega^4 \rho_1 (\rho_1 - \rho_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\xi) = & \frac{Z}{\gamma_{12}\gamma_{22}} [4(\mu_1 - \mu_2)^2 (\mu_1 - \mu_2) \xi \rho_1 + \\ & + \omega^2 (\rho_1 \rho_2 - \xi \rho_1) + \omega^4 (\rho_1 \rho_2^2 - 2\alpha^2 \rho_1 \rho_2 + \xi \rho_1^2)], \\ \rho_1 = & \alpha^2 + \gamma_{11}\gamma_{21}, \quad \rho_2 = \alpha^2 + \gamma_{12}\gamma_{22}, \\ \eta = & \alpha^2 - \gamma_{12}\gamma_{22}, \end{aligned}$$

$$\gamma_{1i} = \sqrt{k_{1i}^2 - \alpha^2}, \quad k_{1i}^2 = \frac{\rho_i \omega^2}{(\lambda_i + 2\mu_i)}$$

$$\gamma_{2i} = \sqrt{k_{2i}^2 - \alpha^2}, \quad k_{2i}^2 = \frac{\rho_i \omega^2}{\mu_i}.$$

Ветви корней у функций γ_{ji} выбираем так, чтобы вещественная часть была положительной, а в случае, если вещественная часть равна нулю, то выбираем положительные мнимые корни.

Как установлено [15], уравнение (5) может иметь только конечное число корней, принадлежащих интервалу вещественной оси $(\kappa_{22}, -\kappa_{21})$. Множество таких значений α образует дискретный спектр в задаче на собственные значения.

Численные результаты

Исследуем зависимость вещественных продольных постоянных α от частоты ω . Для разных веществ соотношение упругих параметров слоя и подложки изменяется. Волноводные моды могут существовать только в случае, если подложка является акустически более жестким веществом, чем слой. Если это условие не выполнено, то моды уходят в подложку как излучательные, образуя сплошной непрерывный спектр.

Количество собственных волн определяет ширина интервала $(\kappa_{21}, \kappa_{22})$ или, другими словами, разница поперечных скоростей подложки v_{S1} и слоя v_{S2} . На рис. 2 и 3 приведены амплитудно-частотные характеристики собственных чисел α . Рис. 2 соответствует волноводной структуре, в которой слой каучука лежит на плексигласе. Для данного случая $\kappa_{21} < \kappa_{12} < \kappa_{22}$, где $\kappa_{21} = 7,79 \cdot 10^{-6} \omega$, $\kappa_{12} = 5,05 \cdot 10^{-5} \omega$, $\kappa_{22} = 1,85 \cdot 10^{-4}$.

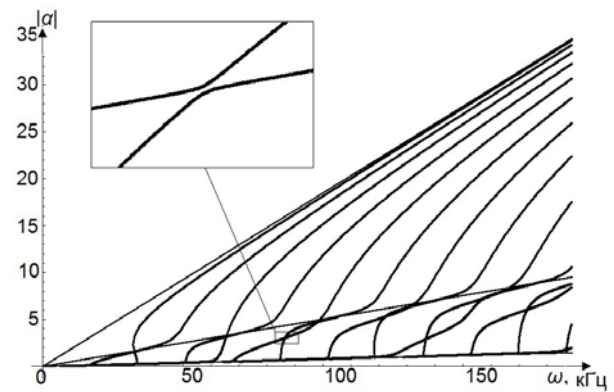


Рис. 2 – Зависимость собственных чисел α от частоты ω

Параметры среды: каучуковый слой $\rho_2 = 0,93$ г/см³, $v_{P2} = 198$ м/с, $v_{S2} = 54$ м/с) на плексигласе ($\rho_1 = 1,18$ г/см³, $v_{P1} = 2672$ м/с, $v_{S1} = 1284$ м/с).

Рис. 3 соответствует слою дифлона на плексигласе. Здесь интервал $(\kappa_{21}, \kappa_{22})$ очень узкий $\kappa_{22} = 7,79 \cdot 10^{-6} \omega$, $\kappa_{21} = 7,39 \cdot 10^{-6} \omega$, и количество мод существенно ниже, чем в предыдущем случае.

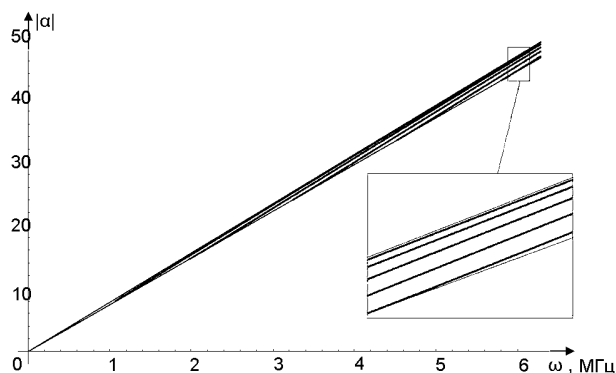


Рис. 3 – Зависимость собственных чисел от частоты ω

Параметры среды: слой дифлона ($\rho_2 = 1,2 \text{ г/см}^3$, $\nu_{P2} = 2680 \text{ м/с}$, $\nu_{S2} = 1354 \text{ м/с}$) на плексигласе ($\rho_1 = 1,18 \text{ г/см}^3$, $\nu_{P1} = 2672 \text{ м/с}$, $\nu_{S1} = 1284 \text{ м/с}$).

Поведение кривых, соответствующих каждой отдельной моде, в интервале (k_{21}, k_{12}) достаточно сложное, но пересечений не происходит. Кривые подходят вплотную друг другу, а затем расходятся (см. рис. 2). Значения собственных чисел примерно пропорциональны частоте ω , и в пределе при больших ω кривые волноводных мод стремятся к прямой k_{22} .

Работа выполнена при поддержке РФФИ и АН РТ, грант 12-01-97012-р-поволжье-а.

Литература

- [1] Б.Е. Победра, *Механика композиционных материалов*. Изд-во Моск. ун-та, Москва, 1984. 336 с.

- [2] Р. Кристенсен, *Введение в механику композитов*. Мир, Москва, 1982. 334 с.
 [3] Н.А. Алфутов, П.А. Зиновьев, Б.Г. Попов, *Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов*. Машиностроение, Москва, 1984. 446 с.
 [4] В.В. Васильев, *Механика конструкций из композиционных материалов*. Машиностроение, Москва, 1988. 272 с.
 [5] В.И. Королев, *Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс*. Машиностроение, Москва, 1965. 272 с.
 [6] И.Е. Плещинская, Н.Б. Плещинский, *Вестник Казан. технол. ун-та*, №11, 147-153 (2010).
 [7] И.Е. Плещинская, Н.Б. Плещинский, Д.Н. Тумаков, *Вестник Казан. технол. ун-та*, №18, 111-115 (2011).
 [8] В.Л. Кипоть, Д.Н. Тумаков, *Георесурсы*, **1**, 33-35 (2009).
 [9] В.Л. Кипоть, Д.Н. Тумаков, Е.В. Еронина, *Георесурсы*, **6**, 2-6 (2011).
 [10] Г.И. Петрашень, *Основы математической теории распространения упругих волн. Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн*. Вып. XVIII. Наука, Ленинград, 1978. 248 с.
 [11] Н.С. Бахвалов, Г.П. Панасенко, *Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов*. Наука, Москва, 1984. 352 с.
 [12] И.Е. Плещинская, Н.Б. Плещинский, *Ученые записки Казан. гос. ун-та*, **147**, 3, 4-32 (2005).
 [13] Д.Н. Тумаков, *Собственные колебания двух сопряженных полос*. Препринт ПМФ-06-04. Казанск. матем. об-во, Казань, 2006. 26 с.
 [14] Д.Н. Тумаков, *Распределение энергии в плоском упругом волноводе*. Препринт ПМФ-06-02. Казанск. матем. об-во, Казань, 2006. 30 с.
 [15] К.Н. Вдовина, Н.Б. Плещинский, Д.Н. Тумаков, *Известия высших учебных заведений. Математика*, №9, 69-75 (2008).

© И. Е. Плещинская - канд. физ.-мат. наук, доц. каф. информатики и прикладной математики КНИТУ, plant_flower@mail.ru;
 К. Н. Стехина - канд. физ.-мат. наук, доц. каф. прикладной математики К(П)ФУ, Kristina.Stekhina@kpfu.ru; Д. Н. Тумаков - канд. физ.-мат. наук, доц. той же кафедры, tdn2003@list.ru.