

В. А. Иванов, В. Н. Паймушин, Т. В. Полякова

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ С ТРЕХСЛОЙНОЙ ДЕФОРМИРУЕМОЙ ПАНЕЛЬЮ

Ключевые слова: стационарная акустическая волна, звуковое давление, деформируемая трехслойная панель, взаимодействие, звукоотражение, звукоизлучение, параметр звукоизоляции.

На основе гипотезы о плоском отражении сформулирована задача о взаимодействии стационарных звуковых волн с деформируемой пологой трехслойной панелью с целью определения давления отраженной и излученной звуковых волн в точках граничной поверхности панели со стороны падающей волны и излученной звуковой волны в точках другой граничной поверхности. Найдено точное аналитическое решение задачи по определению параметра звукоизоляции для прямоугольной панели с шарнирно опертыми кромками. Численные результаты получены для квадратной плоской пластины.

Keywords: stationary acoustic wave, sound pressure, deformable sandwich panel, stationary acoustic wave-structure interaction, sound reflection, radiation of sound waves, noise absorption parameters.

In present paper, the interaction of stationary acoustic waves with deformable shallow sandwich panels was formulated on the basis of planar reflection hypothesis to predict pressures caused by reflected and radiated sound waves. Pressures arisen from reflected and radiated sound waves were examined at points on the boundary faces of sandwich panel at the side of incoming waves while pressure arisen from radiated waves were examined on reverse face of the panel. Exact analytical solutions for the prediction of sound insulation parameter presented for simply supported rectangular panels. Numerical solutions were presented for planar square plates.

В авиастроении за последние десятилетия проблемы снижения шума привели к появлению нового научного направления – авиационной акустики, связанного с акустикой летательных аппаратов и включающей в себя аэроакустику и структурную акустику [1, 2]. Последняя составляет направление, находящееся на стыке акустики и динамики упругих систем, в котором изучаются механизмы распространения звука по конструкциям аппаратов, излучения звука этими конструкциями и др. [2]. Литература, посвященная изучению этих вопросов, достаточно обширна [3-6]. Тем не менее, полученные в этой области результаты следует считать достаточно «скромными» в виду охвата лишь узкого класса простейших элементов тонкостенных конструкций.

К изложенному выше следует также добавить, что во второй половине прошлого века в механике сформировалось научное направление, связанное с исследованием стационарного и нестационарного взаимодействия акустических волн с преградами в виде твердых деформируемых тел и тонкостенных элементов конструкций. Это направление привлекает [7] и продолжает привлекать внимание исследователей актуальностью, сложностью и многообразием явлений, присущих процессу взаимодействия тел различной физической природы. К настоящему времени относящиеся к этому направлению вопросы аэрогидроупругости тонкостенных конструкций в виде оболочек были освещены в ряде монографий и обзоров [7-17]. Однако в них абсолютно не рассматривались вопросы формирования звуковых волн и теоретического исследования задач о звукоизоляции и звукопоглощении теми или иными деформируемыми преградами. Они и в настоящее время остаются без должного внимания со стороны исследователей, хотя практически во всех изданиях справочного или другого характера, посвященных созданию различного рода многослойных конструкций, указывается, что они обладают хорошими звукоизоляционными и звукопоглощающими

свойствами [18-23]. На практике эти свойства до настоящего времени, по-видимому, исследовались главным образом только чисто экспериментальными методами, а их теоретические исследования основывались лишь на упрощенных постановках соответствующих задач [24].

1. Постановка задачи о взаимодействии звуковой волны с пологой трехслойной панелью

Рассмотрим пологую трехслойную панель, имеющую в плане прямоугольную форму с размерами a , b , симметричное по толщине строение с толщинами внешних слоев t и толщиной заполнителя $2h$. В силу пологости панели метрику срединной поверхности заполнителя σ и срединных поверхностей внешних слоев $\sigma_{(k)}$ отождествляем с метрикой на координатной плоскости σ_0 , отнесенной к декартовой системе координат $ХОУ$. Будем считать, что линии пересечения плоскостей $x = const$ и $y = const$ с поверхностью σ представляют собой линии ее главных кривизн $k_{11} = 1/R_1$, $k_{22} = 1/R_2$, а вектор единичной нормали к координатной плоскости σ_0 приближенно отождествляем с вектором единичной нормали m к срединной поверхности заполнителя σ .

Для описания механики деформирования несущих слоев примем классическую модель Кирхгоффа – Лява, приняв для векторов их перемещений представления

$$V^{(k)} = u^{(k)} e_1 + v^{(k)} e_2 + w^{(k)} m - z^{(k)} (\omega_1^{(k)} e_1 + \omega_2^{(k)} e_2), \quad (1.1)$$

где $u^{(k)}$, $v^{(k)}$, $w^{(k)}$ – компоненты векторов перемещений точек поверхностей $\sigma_{(k)}$, а

$$\omega_1^{(k)} = \frac{w^{(k)}}{x}, \omega_2^{(k)} = \frac{w^{(k)}}{y}, k = 1, 2 \quad (1.2)$$

– компоненты векторов поворотов.

При малых перемещениях представлениям (1.1) соответствуют компоненты деформации в несущих слоях

$$\varepsilon_{ij}^{z(k)} = \varepsilon_{ij}^{(k)} - z_{(k)} \chi_{ij}^{(k)}, \quad (1.3)$$

где

$$\varepsilon_{11}^{(k)} = u_{,x}^{(k)} + k_{11} w^{(k)}, \varepsilon_{22}^{(k)} = v_{,y}^{(k)} + k_{22} w^{(k)},$$

$$2\varepsilon_{12}^{(k)} = u_{,y}^{(k)} + v_{,x}^{(k)}; \quad (1.4)$$

$$\chi_{11}^{(k)} = w_{,xx}^{(k)}, \chi_{22}^{(k)} = w_{,yy}^{(k)}, \chi_{12}^{(k)} = w_{,xy}^{(k)}. \quad (1.5)$$

При малой изменчивости поперечных касательных напряжений σ_{13} , σ_{23} в направлениях осей X и Y перемещения в заполнителе допускают представления следующего вида

$$U = \frac{u^{(1)} + u^{(2)}}{2} + \frac{t+h}{4} (\omega_1^{(2)} - \omega_1^{(1)}) +$$

$$+ \frac{z}{2h} \left[\frac{u^{(2)} - u^{(1)}}{2} + \frac{zt}{2} (\omega_1^{(1)} - \omega_2^{(2)}) \right],$$

$$V = \frac{v^{(1)} + v^{(2)}}{2} + \frac{t+h}{4} (\omega_1^{(1)} - \omega_1^{(2)}) +$$

$$+ \frac{z}{2h} \left[\frac{v^{(2)} - v^{(1)}}{2} + \frac{zt}{2} (\omega_2^{(2)} - \omega_2^{(1)}) \right],$$

$$W = \frac{w^{(1)} + w^{(2)}}{2} + \frac{z}{2h} (w^{(2)} - w^{(1)}) \quad (1.6)$$

и им соответствуют поперечные сдвиговые деформации и поперечного обжатия, определяемые соотношениями p

$$2\varepsilon_{13} = \frac{1}{2h} \left[u^{(2)} - u^{(1)} + \frac{2h+t}{2} (\omega_1^{(1)} - \omega_2^{(2)}) \right],$$

$$2\varepsilon_{23} = \frac{1}{2h} \left[v^{(2)} - v^{(1)} + \frac{2h+t}{2} (\omega_1^{(1)} - \omega_2^{(2)}) \right], \quad (1.7)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{w^{(2)} - w^{(1)}}{2h}.$$

Предположим, что внешние слои выполнены из изотропного материала с модулем упругости E и коэффициентом Пуассона ν , а заполнитель в принятой системе координат является ортотропным и характеризуется модулями поперечных сдвигов G_{13} , G_{23} и модулем поперечного обжатия E_3 . Тогда для определения во внешних слоях напряжений $\sigma_{11}^{(k)}$, $\sigma_{12}^{(k)}$, $\sigma_{22}^{(k)}$ и напряжений σ_{13} , σ_{23} , σ_{33} , фор-

мирующихся в заполнителе, будут иметь место соотношения упругости следующего вида

$$\sigma_{11}^{(k)} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11}^{z(k)} + \nu \varepsilon_{22}^{z(k)}), \quad (1.8)$$

$$\sigma_{12}^{(k)} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{12}^{z(k)}; k = 1, 2, \quad (1.9)$$

$$\sigma_{13} = 2G_{13}\varepsilon_{13}, \sigma_{23} = 2G_{23}\varepsilon_{23},$$

$$\sigma_{33} = E_3\varepsilon_{33}. \quad (1.10)$$

Вместо этих напряжений введем в рассмотрение приведенные к соответствующим срединным поверхностям усилия и моменты во внешних слоях

$$T_{(k)}^{11} = B[u_{,x}^{(k)} + k_{11}w^{(k)} + \nu(v_{,y}^{(k)} + k_{22}w^{(k)})],$$

$$T_{(k)}^{12} = B \frac{1-\nu}{2} (u_{,y}^{(k)} + v_{,x}^{(k)}),$$

$$T_{(k)}^{22} = B[v_{,y}^{(k)} + k_{22}w^{(k)} + \nu(u_{,x}^{(k)} + k_{11}w^{(k)})],$$

$$M_{(k)}^{11} = -D(w_{,xx}^{(k)} + \nu w_{,yy}^{(k)}),$$

$$M_{(k)}^{12} = -D(1-\nu)w_{,xy}^{(k)}, \quad (1.11)$$

$$M_{(k)}^{22} = -D(w_{,yy}^{(k)} + \nu w_{,xx}^{(k)}),$$

$$B = Et/(1-\nu^2), B = Et^2/12.$$

и усилия в заполнителе

$$N^1 = G_{13} \left[u^{(2)} - u^{(1)} + \frac{2h+t}{2} (w_{,x}^{(1)} + w_{,x}^{(2)}) \right],$$

$$N^2 = G_{23} \left[v^{(2)} - v^{(1)} + \frac{2h+t}{2} (w_{,y}^{(1)} + w_{,y}^{(2)}) \right], \quad (1.12)$$

$$N^{33} = E_3/(w^{(2)} - w^{(1)}).$$

Если на внешние слои панели действуют распределенные давления $p_{(k)}$, положительное направление которых совпадает с направлениями осей $z_{(k)}$, то относительно введенных в рассмотрение усилий и моментов, исходя из результатов работы [22], можно составить уравнения движения следующего вида

$$(C_3 = E_3/2h),$$

$$\frac{T_{(k)}^{11}}{x} + \frac{T_{(k)}^{12}}{y} + \frac{{}_{(k)}N^1}{2h} - Q_{(k)}^1 = 0,$$

$$\frac{T_{(k)}^{22}}{y} + \frac{T_{(k)}^{12}}{x} + \frac{{}_{(k)}N^2}{2h} - Q_{(k)}^2 = 0,$$

$$\frac{S_{(k)}^1}{x} + \frac{S_{(k)}^2}{y} - T_{(k)}^{11}k_{11} - T_{(k)}^{22}k_{22} +$$

$$+\delta_{(k)}C_3(w^{(2)}-w^{(1)})=P_{(k)}-Q_{(k)}^3=0, \quad (1.13)$$

$$S_{(k)}^1 = \frac{M_{(k)}^{11}}{x} + \frac{M_{(k)}^{12}}{y} + \frac{2h+t}{4h}N^1, \\ S_{(k)}^2 = \frac{M_{(k)}^{22}}{y} + \frac{M_{(k)}^{12}}{x} + \frac{2h+t}{4h}N^2, \quad (1.14)$$

$$Q_{(k)}^1 = 2\left(\rho_{(k)}\frac{t}{2} + \frac{\rho h}{3}\right)\frac{u^{(k)}}{\tau^2}, \\ Q_{(k)}^2 = 2\left(\rho_{(k)}\frac{t}{2} + \frac{\rho h}{3}\right)\frac{v^{(k)}}{\tau^2}, \quad (1.15)$$

$$Q_{(k)}^3 = 2\left(\rho_{(k)}\frac{t}{2} + \frac{\rho h}{3}\right)\frac{w^{(k)}}{\tau^2}. \quad (1.16)$$

Предположим, что панель в точках поверхностей $z_{(1)} = -t/2$ и $z_{(2)} = t/2$ находится во взаимодействии с акустическими средами, характеризующимися плотностями $\rho_{(1)}$, $\rho_{(2)}$ и скоростями звука $c_{(1)}$, $c_{(2)}$. Будем считать, что в первой среде сформирована гармоническая звуковая волна, падающая на поверхность $z_{(1)} = -t/2$ по направлению нормали m . Если срединная поверхность панели является весьма пологой, то, считая падающую волну почти плоской, давление p^* и скорость v_z^* в первой среде будем определять решением волнового уравнения относительно потенциала скоростей $\hat{O}^*$ в приближении

$$\frac{\partial^2 \hat{O}^*}{\partial z^2} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \hat{O}^*}{\partial \tau^2} = 0. \quad (1.17)$$

Для волны с частотой ω , распространяющейся в положительном направлении оси z , решение уравнения (1.17) имеет вид

$$\hat{O}^* = \tilde{O}^* a^{oi(\omega\tau - k_1 z)}, \quad k_1 = \omega/c_1, \quad (1.18)$$

где i мнимая единица, амплитудное значение функции $\tilde{O}^*$. Через эту функцию давление и скорость падающей волны в точке $z=0$ будут определяться выражениями

$$p^* = -\rho_1 \frac{\partial \hat{O}^*}{\partial \tau} \Big|_{z=0} = -i\rho_1 \omega \tilde{O}^* e^{i\omega\tau} = \tilde{p}^* e^{i\omega\tau}, \quad (1.19)$$

$$v_z^* = \frac{\partial \hat{O}^*}{\partial z} \Big|_{z=0} = -ik_1 \omega \tilde{O}^* e^{i\omega\tau} = \tilde{v}_z^* e^{i\omega\tau}, \quad (1.20)$$

где

$$\tilde{p}^* = -i\rho_1 \omega \tilde{O}^*, \quad \tilde{v}_z^* = -ik_1 \omega \tilde{O}^*, \quad (1.21)$$

Под действием падающей волны происхо-

дит динамическое деформирование панели, в результате которой в первой среде формируется отраженная и излученная волны с потенциалом $\hat{O}_1$, а во второй среде формируется излученная волна с потенциалом $\hat{O}_2$. Уравнения для их определения составим в том же приближении, что и уравнение (1.17). Поэтому решениями таких уравнений будут являться функции

$$\tilde{p}^* = -i\rho_1 \omega \tilde{O}^*, \quad v_z^* = -ik_1 \omega \tilde{O}^*, \\ \hat{O}_1 = \tilde{O}_1 e^{i(\omega\tau + k_1 z)}, \quad \hat{O}_2 = \tilde{O}_2 e^{i(\omega\tau + k_2 z)}, \quad (1.22) \\ k_2 = \omega/c_2.$$

Следовательно, суммарное звуковое давление p_1 , действующее на первый несущий слой трехслойной панели, будет равно

$$p_{(1)} = p^* - \rho_1 \frac{\partial \hat{O}_1}{\partial \tau} \Big|_{z=0} = \tilde{p}_{(1)} e^{i\omega\tau} = \\ = -i\rho_1 \omega (\tilde{O}^* + \tilde{O}_1) e^{i\omega\tau}, \quad (1.23)$$

а суммарная скорость среды при $z=0$ будет равна

$$v_z^* + v_z^1 = (\tilde{v}_z^* + \tilde{v}_z^1) e^{i\omega\tau} = -ik_1 (\tilde{O}^* - \tilde{O}_1) e^{i\omega\tau}. \quad (1.24)$$

Так как в уравнении (1.13) действующее на второй несущий слой внешнее давление p_2 считается положительным при его действии в направлении оси z , то при сохранении его знака в соответствующем уравнении в соответствии с (1.22) p_2 следует вычислять по формулам

$$p_{(2)} = \rho_2 \frac{\partial \hat{O}_2}{\partial \tau} \Big|_{z=0} = i\rho_2 \omega \tilde{O}_2 e^{i\omega\tau} = \tilde{p}_{(2)} e^{i\omega\tau}, \quad (1.25)$$

а скорость излученной звуковой волны во второй акустической среде будет равна

$$v_z^2 = \tilde{v}_z^2 e^{i\omega\tau} = -ik_2 \omega \tilde{O}_2 e^{i\omega\tau}. \quad (1.26)$$

При динамическом деформировании трехслойной панели, скорости движения несущих слоев в направлении m в рамках принятой степени точности формулируемой задачи необходимо подчинить условиям

$$\frac{\partial w^{(1)}}{\partial \tau} = v_z^* + v_z^1, \dots, \frac{\partial w^{(2)}}{\partial \tau} = v_z^2. \quad (1.27)$$

$$\text{Представив функции } w^{(1)} \text{ и } w^{(2)} \text{ в виде} \\ w^{(1)} = \tilde{w}^{(1)} e^{i\omega\tau}, \quad w^{(2)} = \tilde{w}^{(2)} e^{i\omega\tau}, \quad (1.28)$$

при использовании соотношений (1.24), (1.26), (1.28) условия (1.27) преобразуем к виду

$$\tilde{O}_1 = \tilde{O}^* + c_1 w^{(1)}, \quad \tilde{O}_2 = \tilde{O}^* - c_2 \tilde{w}^{(2)}. \quad (1.29)$$

Внеся их в зависимости

$$\tilde{p}_{(1)} = -i\rho_1\omega(\tilde{\tilde{O}}^* + \tilde{\tilde{O}}_1), \tilde{p}_{(2)} = i\rho_2\omega\tilde{\tilde{O}}_2, \quad (1.30)$$

получим соотношения

$$\tilde{p}_{(1)} = -i\rho_1\omega(2\tilde{\tilde{O}}^* + c_1\tilde{w}^{(1)}), \tilde{p}_{(2)} = i\rho_2\omega c_2\tilde{w}_2,$$

которые при учете (1.19) и (1.21) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \tilde{p}_{(1)} &= 2\tilde{p}^* - i\rho_1\omega c_1\tilde{w}^{(1)}, \\ \tilde{p}_{(2)} &= -i\rho_2\omega c_2\tilde{w}^{(2)}, \end{aligned} \quad (1.31)$$

При использовании соотношений (1.11), (1.12), (1.14)-(1.16) и представлений функций $u^{(k)}$, $v^{(k)}$ в виде

$$u^{(k)} = \tilde{u}^{(k)} e^{i\omega t}, v^{(k)} = \tilde{v}^{(k)} e^{i\omega t}. \quad (1.32)$$

В соответствии с кинематическими соотношениями (1.2), (1.5)-(1.8), физическими соотношениями (1.11), (1.12) уравнения движения (1.13)-(1.16) запишутся в виде

$$\begin{aligned} L_{11}^c(\tilde{u}^{(k)}) + L_{11}(\tilde{v}^{(k)}) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tilde{w}^{(k)}}{R_1} + \frac{v\tilde{w}^{(k)}}{R_2} \right) + \\ + \frac{\delta_{(k)}}{2h} G_{13} \left(u^a + \frac{t+2h}{2} w_{,x}^c \right) = 0, \\ L_{12}(\tilde{u}^{(k)}) + L_{11}^c(\tilde{v}^{(k)}) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v\tilde{w}^{(k)}}{R_1} + \frac{\tilde{w}^{(k)}}{R_2} \right) + \\ + \frac{\delta_{(k)}}{2h} G_{23} \left(v^a + \frac{t+2h}{2} w_{,y}^c \right) = 0, \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned} - \left[D\nabla^2 \nabla^2 + B \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{2v}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} \right) - \Omega_w^2 \right] \times \\ \times \tilde{w}^{(1)} + \frac{t+2h}{4h} G_{13} [-u^a + (t+2h)w_{,x}^c] - \\ - B \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{v}{R_2} \right) \tilde{u}_{,x}^{(1)} + \left(\frac{v}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \tilde{v}_{,y}^{(1)} \right] + \\ + C_3 (w^{(2)} - w^{(1)}) + 2\tilde{p}^* - i\Omega_1 \tilde{w}^{(1)} = 0. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Здесь введены в рассмотрение операторы

$$L_{11}^c = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-v}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \Omega_w^2,$$

$$L_{12}^c = \frac{1+v}{2} \frac{\partial^2}{\partial^2 xoy},$$

$$L_{22}^c = \frac{1-v}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \Omega_w^2,$$

и обозначения

$$\Omega_w^2 = \omega^2 (\rho t + 2\rho_3 h / 3), \Omega_1 = \omega \rho_1 c_1,$$

$$\Omega_2 = \omega \rho_2 c_2.$$

При введении новых искомых неизвестных

$$u^a = \tilde{u}^{(1)} - \tilde{u}^{(2)}, v^a = \tilde{v}^{(1)} - \tilde{v}^{(2)},$$

$$w^q = \tilde{w}^{(1)} - \tilde{w}^{(2)}, u^c = \tilde{u}^{(1)} - \tilde{u}^{(2)},$$

$$v^c = \tilde{v}^{(1)} - \tilde{v}^{(2)}, w^c = \tilde{w}^{(1)} - \tilde{w}^{(2)},$$

дифференциальные уравнения (1.33) представимы в виде

$$\begin{aligned} L^c(u^c) &= \left[\left(\frac{v}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) l_{12,y} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{v}{R_2} \right) l_{22,x}^c \right] w^c, \\ L^c(v^c) &= \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{v}{R_2} \right) l_{12,x} - \left(\frac{v}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) l_{11,y}^a \right] w^c, \\ L^a(u^a) &= -\frac{2h+t}{2h} (G_{13} l_{22,x}^a - G_{23} l_{12,y}) w^c - \\ &- B \left[\left(\frac{1}{R_1} + \frac{v}{R_2} \right) l_{22,x}^a - \left(\frac{v}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) l_{12,y} \right] w^a, \\ L^a(v^a) &= -\frac{2h+t}{2h} (G_{23} l_{11,y}^a - G_{13} l_{12,x}) w^c - \\ &- B \left[\left(\frac{v}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) l_{11,y}^a - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{v}{R_2} \right) l_{12,x} \right] w^a. \end{aligned} \quad (1.35)$$

при использовании которых, уравнения (1.34) сводятся к системе двух разрешающих уравнений

$$\begin{aligned} \left[D\nabla^2 \nabla^2 - \frac{2h+t}{4h} \left(G_{13} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + G_{23} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{2h+t}{2h} \right)^2 \frac{L^q}{L^a} + B \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{2v}{R_1 R_2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{R_2^2} - \frac{L^{cR}}{L^c} \right) - \Omega_w^2 + i\Omega_c \right] w^c - \\ - \left[B \frac{2h+t}{2h} \frac{L^{qR}}{L^a} - i\Omega_a \right] w^a = 2\tilde{p}^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[D\nabla^2 \nabla^2 + 2C_3 + B \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{2v}{R_1 R_2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{R_2^2} - \frac{L^{aR}}{L^a} \right) - \Omega_w^2 + i\Omega_c \right] w^a - \end{aligned}$$

$$-\left[B\frac{2h+t}{2h}L\frac{qR}{L^a}-i\Omega_a\right]w^c=2\tilde{P}^*$$

где

$$\begin{aligned} l_{11}^a &= l_{11}^c - G_{13}/h, \quad l_{22}^a = l_{22}^c - G_{23}/h, \\ L^c &= l_{11}^c l_{22}^c - (l_{12})^2, \quad L^a = l_{11}^a l_{22}^a - (l_{12})^2, \\ L^q &= G_{13}^2 l_{22,xx}^a - 2G_{13}G_{23}l_{12,xy} + G_{23}^2 l_{11,yy}^a, \\ L^{qR} &= G_{13}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{v}{R_2}\right)l_{22,xx}^a - \left[G_{13}\left(\frac{v}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \right. \\ &+ G_{23}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{v}{R_2}\right)\left. \right]l_{12,xy} + G_{23}\left(\frac{v}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)l_{11,yy}^a, \\ L^{cR} &= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{v}{R_2}\right)^2 l_{22,xx}^c - 2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{v}{R_2}\right) \times \\ &\times \left(\frac{v}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)l_{12,xy} + \left(\frac{v}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^2 l_{11,yy}^c, \\ L^{aR} &= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{v}{R_2}\right)^2 l_{22,xx}^a - 2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{v}{R_2}\right) \times \\ &\times \left(\frac{v}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)l_{12,xy} + \left(\frac{v}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^2 l_{11,yy}^a, \\ \Omega_c &= \omega(\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2)/2, \\ \Omega_a &= \omega(\rho_1 c_1 - \rho_2 c_2)/2. \end{aligned}$$

2. Построение решения задачи для панели с шарнирно опертыми кромками

Пусть на торцах панели имеют место условия шарнирного опирания

$$\begin{aligned} w^a &= w_{,xx}^a = 0, \quad w^c = w_{,yy}^c = 0 \quad \text{при } x=0, a; \\ w^c &= w_{,yy}^c = 0 \quad \text{при } y=0, b. \end{aligned}$$

Эти условия будут выполнены, если выражения для прогибов принять в виде

$$\begin{aligned} w^a &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} W_{kn}^a \sin \lambda_k x \sin \lambda_n y, \\ w^c &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} W_{kn}^c \sin \lambda_k x \sin \lambda_n y, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$\lambda_k = (2k+1)\pi/a, \quad \lambda_n = (2n+1)\pi/b.$$

После подстановки соотношений (2.1) в

дифференциальные уравнения (1.36) и их интегрирования по методу Бубнова приходим к системе алгебраических уравнений относительно амплитуд W_{kn}^a и W_{kn}^c

$$\begin{aligned} &\left[D\lambda_{kn}^4 + \frac{(2h+t)^2}{4h} (D_{13}\lambda_k^2 + G_{23}\lambda_n^2) - \right. \\ &- \left(\frac{2h+t}{2h} \right)^2 \frac{L_{kn}^q}{L_{kn}^a} + B \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{2v}{R_1 R_2} \right) + \\ &+ \frac{1}{R_2^2} - \frac{L_{kn}^{cR}}{L_{kn}^c} \left. \right] - \Omega_w^2 + i\Omega_c \left. \right] W_{kn}^c - \\ &- \left[\frac{B(2h+t)}{2h} \frac{L_{kn}^{qR}}{L_{kn}^a} - i\Omega_a \right] W_{kn}^a = 2P_{kn}, \quad (2.2) \\ &- \left[\frac{B(2h+t)}{2h} \frac{L_{kn}^{qR}}{L_{kn}^a} - i\Omega_a \right] W_{kn}^c + \\ &+ \left[D\lambda_{kn}^4 + 2C_3 + B \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{2v}{R_1 R_2} + \frac{1}{R_2^2} - \right. \right. \\ &- \left. \left. \frac{L_{kn}^{aR}}{L_{kn}^a} \right) - \Omega_w^2 + i\Omega_c \right] W_{kn}^a = 2P_{kn}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \lambda_{kn}^4 &= (\lambda_k^2 + \lambda_n^2)^2, \\ L_{kn}^q &= G_{13}^2 l_{kn}^{a22} \lambda_k^2 - 2G_{13}G_{23}l_{kn}^{12} \lambda_k \lambda_n + G_{23}^2 l_{kn}^{a11} \lambda_n^2, \\ L_{kn}^{qR} &= G_{13}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{v}{R_2}\right)l_{kn}^{a22} \lambda_k^2 - \left[G_{13}\left(\frac{v}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \right. \\ &+ G_{23}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{v}{R_2}\right)\left. \right]l_{kn}^{12} \lambda_k \lambda_n + G_{23}\left(\frac{v}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)l_{kn}^{a11} \lambda_n^2, \\ L_{kn}^{cR} &= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{v}{R_2}\right)^2 l_{kn}^{c22} \lambda_k^2 - 2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{v}{R_2}\right) \times \\ &\times \left(\frac{v}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)l_{kn}^{12} \lambda_k \lambda_n + \left(\frac{v}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^2 l_{kn}^{c11} \lambda_n^2, \\ L_{kn}^{aR} &= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{v}{R_2}\right)^2 l_{kn}^{a22} \lambda_k^2 - 2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{v}{R_2}\right) \times \\ &\times \left(\frac{v}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)l_{kn}^{a12} \lambda_k \lambda_n + \left(\frac{v}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)^2 l_{kn}^{a11} \lambda_n^2, \\ P_{kn} &= 16\tilde{p}^* / [(2k+1)(2n+1)], \end{aligned}$$

в которых

$$l_{kn}^{c11} = B \left(\lambda_k^2 + \frac{1-\nu}{2} \lambda_n^2 \right) - \Omega_W^2, \quad l_{kn}^{a11} = l_{kn}^{c11} + G_{13}/h,$$

$$l_{kn}^{c22} = B \left(\frac{1-\nu}{2} \lambda_k^2 + \lambda_n^2 \right) - \Omega_W^2, \quad l_{kn}^{a22} = l_{kn}^{c11} + G_{13}/h.$$

Решение уравнений (2.2) относительно амплитуд прогибов имеет вид

$$\tilde{W}_{kn}^1 = 2P_{kn} (\lambda_{kn}^{11} + \lambda_{kn}^{12} + \lambda_{kn}^{22}) / A_{kn},$$

$$\tilde{W}_{kn}^2 = 2P_{kn} (\lambda_{kn}^{11} - \lambda_{kn}^{22}) / A_{kn}, \quad (2.3)$$

где

$$A_{kn} = 2 \left[\lambda_{kn}^{11} \lambda_{kn}^{22} - (\lambda_{kn}^{12})^2 \right],$$

$$\lambda_{kn}^{11} = D\lambda_{kn}^4 + \frac{(2h+t)^2}{4h} (G_{13}\lambda_k^2 + G_{23}\lambda_n^2) -$$

$$- \left(\frac{2h+t}{2h} \right)^2 \frac{L_{kn}^q}{L_{kn}^a} + B \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{2\nu}{R_1 R_2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{R_2^2} - \frac{L_{kn}^{cR}}{L_{kn}^c} \right) - \Omega_W^2 + i\Omega_c,$$

$$\lambda_{kn}^{12} = \frac{B(2h+t)}{2h} \frac{L_{kn}^{qR}}{L_{kn}^a} - i\Omega_a,$$

$$\lambda_{kn}^{22} = D\lambda_{kn}^4 + 2C_3 + B \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{2\nu}{R_1 R_2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{R_2^2} - \frac{L_{kn}^{aR}}{L_{kn}^a} \right) - \Omega_W^2 + i\Omega_c.$$

При использовании (2.3) для определения давления $\tilde{p}_{(1)}$ со стороны набегающего потока и давления потока $\tilde{p}_{(2)}$, излучаемого панелью, можно получить выражения

$$\tilde{p}_{(1)} = 2\tilde{p}^* \left[1 - i\Omega_1 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16(\lambda_{kn}^{11} + 2\lambda_{kn}^{12} + \lambda_{kn}^{22})}{(2k+1)} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\sin \lambda_k x \sin \lambda_n y}{(2n+1)A_{kn}} \right],$$

$$\tilde{p}_{(2)} = 2\tilde{p}^* \Omega_2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{16(\lambda_{kn}^{11} - \lambda_{kn}^{22})}{(2k+1)} \times,$$

$$\Omega_1 = \omega \rho_1 c_1. \quad (2.4)$$

Основной задачей проводимых исследований является определение максимального коэффициента снижения панелью уровня звукового давления при $z = 0$

$$\eta = |\tilde{p}_{(2)}| / |\tilde{p}_{(1)}|, \quad (2.5)$$

и соответствующему ему показателю звукоизоляции

$$R_p = -20 \lg \eta, \quad (2.6)$$

измеряемого в децибелах.

Для анализа введенных здесь характеристик η и R_p введем в рассмотрение осредненные значения давлений

$$P_{(k)} = \frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b \tilde{p}_{(k)} dx dy, \quad k = 1, 2, \quad (2.7)$$

которые при учете (2.4) принимают вид

$$\eta = \left| \frac{i\Omega_2 R_{W2}}{1 + i\Omega_1 R_{W1}} \right|, \quad (2.8)$$

где

$$R_{W1} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(\lambda_{kn}^{11} + \lambda_{kn}^{12} + \lambda_{kn}^{22})}{(2k+1)(2n+1)A_{kn}},$$

$$R_{W2} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(\lambda_{kn}^{11} - \lambda_{kn}^{22})}{(2k+1)(2n+1)A_{kn}}.$$

Вычисления значений η и R_p проведены для трехслойной квадратной пластины

$$(a = b, R_1 = \infty, R_2 = \infty),$$

взаимодействующей со звуковой волной при различных значениях частоты n в Гц и параметрах $\rho_1 = \rho_2 = 0,125 \bar{e} \bar{a} \bar{n}^2 / i^4$, $c_1 = c_2 = 340 i / \bar{n}$. Толщины несущих слоев пластины приняты равными $t_{(1)} = t_{(2)} = 10^{-3} i$, а заполнителя – $2h = 15 \cdot 10^{-3} i$. Результаты вычислений представлены на рис. 1-4, где величины η_i и R_{pi} ($i=1 \div 4$) соответствуют размерам пластин $a_i = b_i = 1, 10, 100, 1000 i$. Предполагается, что несущие слои выполнены или из стали с характеристиками: $E = 2,1 \cdot 10^{10} \bar{e} \bar{a} / i^2$, $\nu = 0,3$ м и плотностью $\rho_{(1)} = \rho_{(2)} = 770 \bar{e} \bar{a} \bar{n}^2 / i^4$ (рис. 1, 2), или из плекса (рис. 3, 4) с характеристиками

$$E = 3,2 \cdot 10^9 \bar{e} \bar{a} / i^2, \quad \nu = 0,3,$$

$$\rho_{(1)} = \rho_{(2)} = 650 \bar{e} \bar{a} n^2 / i^4,$$

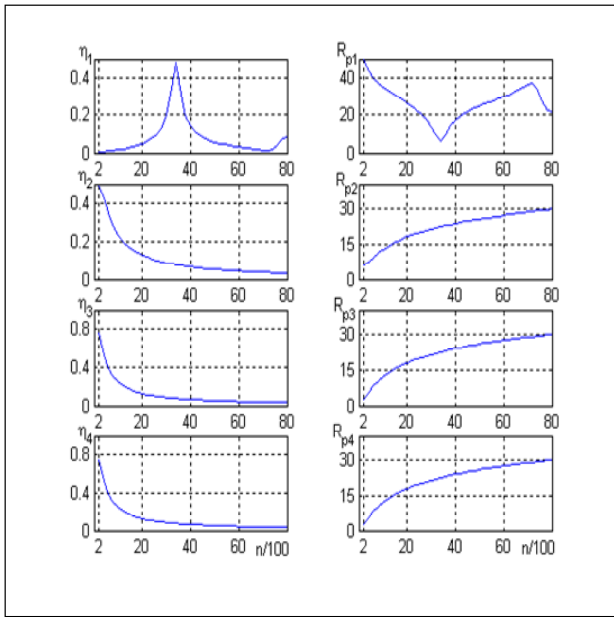


Рис. 1 - Зависимости параметров η_i и R_{pi} от частоты n (Гц) для трехслойной пластины со стальными несущими слоями и заполнителем, имеющим параметры $E_3 = 10^6 \bar{e} \tilde{a} / i^2$, $G_{13} = G_{23} = 3,84 \cdot 10^5 \bar{e} \tilde{a} / i^2$, $\rho_3 = 0,4 \bar{e} \tilde{a} \tilde{n}^2 / i^4$

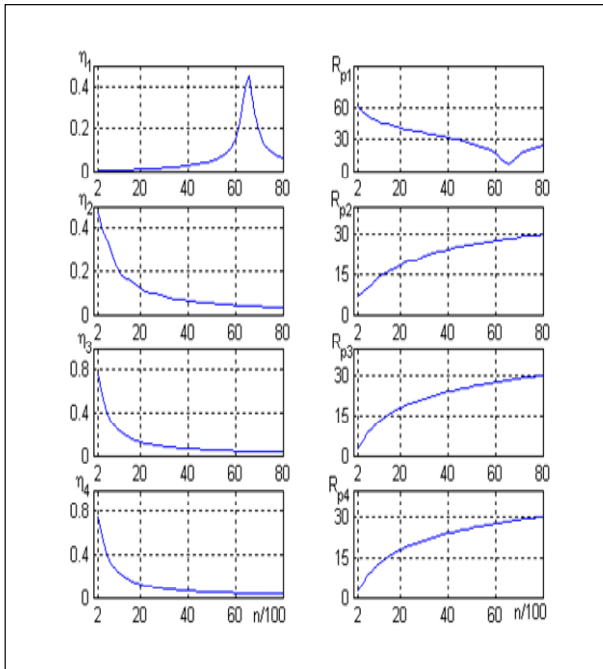


Рис. 2 - Зависимости параметров η_i и R_{pi} от частоты n (Гц) для трехслойной пластины со стальными несущими слоями и заполнителем, имеющим параметры $E_3 = 5 \cdot 10^6 \bar{e} \tilde{a} / i^2$, $G_{13} = 2,1 \cdot 10^6 \bar{e} \tilde{a} / i^2$, $G_{23} = 1,5 \cdot 10^6 \bar{e} \tilde{a} / i^2$, $\rho_3 = 0,4 \bar{e} \tilde{a} \tilde{n}^2 / i^4$

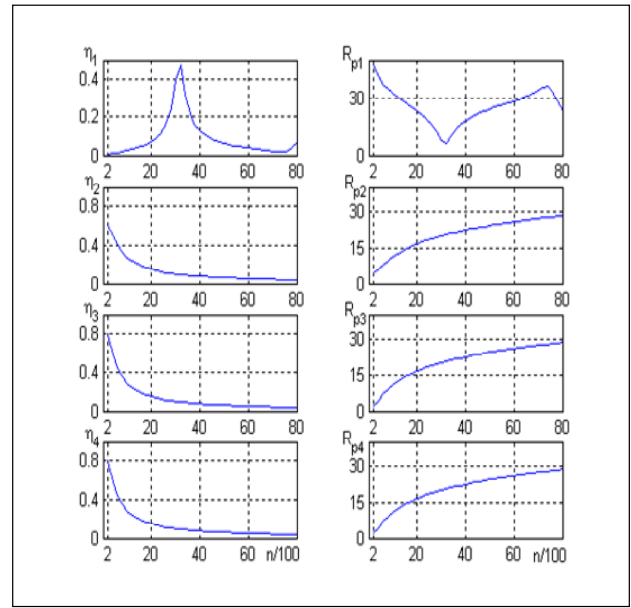


Рис. 3 - Зависимости параметров η_i и R_{pi} от частоты n (Гц) для трехслойной пластины с несущими слоями из плекса и заполнителем, имеющим параметры $E_3 = 10^6 \bar{e} \tilde{a} / i^2$, $G_{13} = G_{23} = 3,84 \cdot 10^5 \bar{e} \tilde{a} / i^2$, $\rho_3 = 0,4 \bar{e} \tilde{a} \tilde{n}^2 / i^4$

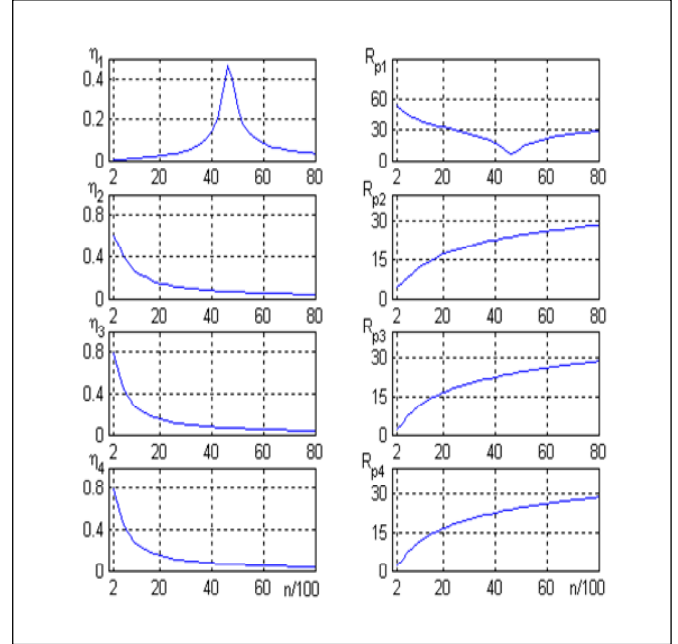


Рис. 4 - Зависимости параметров η_i и R_{pi} от частоты n (Гц) для трехслойной пластины с несущими слоями из плекса и заполнителем, имеющим параметры $E_3 = 5 \cdot 10^6 \bar{e} \tilde{a} / i^2$, $G_{13} = 2,1 \cdot 10^6 \bar{e} \tilde{a} / i^2$, $G_{23} = 1,5 \cdot 10^6 \bar{e} \tilde{a} / i^2$, $\rho_3 = 0,4 \bar{e} \tilde{a} \tilde{n}^2 / i^4$

Литература

1. А.Г. Мунин, В.Ф. Самохин, *Авиационная акустика. Часть 1: Шум на местности дозвуковых пассажирских самолетов и вертолетов*. Машиностроение, Москва, 1986. 243 с.
2. А.Г. Мунин, Б.М. Ефимцов, *Авиационная акустика. Часть 2: Шум в салонах пассажирских самолетов*. Машиностроение, Москва, 1986. 261 с.
3. В.В. Болотин, *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*, 1, 74–81 (1968).
4. Б.М. Ефимцов, *Труды ЦАГИ*, 1374, 39-46 (1971).
5. Б.М. Ефимцов, *Труды ЦАГИ*, 1655, 33-46 (1975).
6. L. Maestrello, *J. Sound and Vibration*, 2, 2, 100-115 (1965).
7. А.Н. Гузь, В.Д. Кубенко, *Методы расчета оболочек. Том 5. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек*. Наук. думка, Киев, 1982. 400 с.
8. Б.В. Замышляев, Ю.С. Яковлев, *Динамические нагрузки при подводном взрыве*. Судостроение, Ленинград, 1967. 387 с.
9. Е.Н. Мнев, А.К. Перцев, *Гидроупругость*. Судостроение, Ленинград, 1970. 366 с.
10. Э.И. Григолюк, А.Г. Горшков, *Нестационарная гидроупругость оболочек*. Судостроение, Ленинград, 1974. 208 с.
11. Л.И. Слепян, *Нестационарные упругие волны*. Судостроение, Ленинград, 1972. 374 с.
12. В.Д. Кубенко, *Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой*. Наук. думка, Киев, 1979. 184 с.
13. А.Г. Горшков, *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*, 3, 155-158 (1974).
14. А.Г. Горшков, *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*, 2, 165-178 (1976).
15. А.Г. Горшков, *ВИНИТИ. Механика деформируемого твердого тела*, 13, 105-186 (1980).
16. Э.И. Григолюк, *VII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин* (Днепропетровск, 1969). С. 755-778.
17. А.К. Перцев, Э. Г. Платонов, *IX Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин* (Ленинград, 1973). С. 78-82.
18. В.Е. Берсудский, В.Н. Крысин, С.И. Лесных, *Технология изготовления сотовых авиационных конструкций*. Машиностроение, Москва, 1975. 216 с.
19. А.И. Ендогур, М.В. Вайнберг, К.М. Иерусалимский, *Сотовые конструкции. Выбор параметров и проектирование*. Машиностроение, Москва, 1986. 200 с.
20. В.Ф. Панин, Ю.А. Гладков, *Конструкции с заполнителем. Справочник*. Машиностроение, Москва, 1991. 272 с.
21. К. Штамм, Г. Витте, *Многослойные конструкции // Перевод с нем. Т.Н. Орешкиной.; Под ред. С.С. Кармилова*. Стройиздат, Москва, 1983. 300 с.
22. В.Н. Паймушин, В.Р. Хусаинов, *Механика композиционных материалов и конструкций*, 7, 2, 215-235 (2001).
23. В.А. Иванов, *Вестн. Казан. технол. ун-та*, 14, 8, 207-209 (2011).
24. В.А. Иванов, *Вестн. Казан. технол. ун-та*, 14, 8, 224-228 (2011).

© В. А. Иванов – д.ф.-м.н., проф. каф. машиноведения КНИТУ, lashkov_dm@kstu.ru; В. Н. Паймушин – д.ф.-м.н., проф. зав. каф. сопротивления материалов КНИТУ (КАИ); Т. В. Полякова – к.т.н., доц. каф. машиноведения КНИТУ.