УДК 517.958

И. Е. Плещинская, Н. Б. Плещинский, И. В. Сабиров

ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ЧАСТИЧНО ЭКРАНИРОВАННОМ СЛОЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ УСТРОЙСТВА ВВОДА ИЗЛУЧЕНИЯ

Ключевые слова: задача дифракции, периодическая решетка, метод интегрально-сумматорных тождеств, ввод излучения, частично экранированный слой.

Исследуется процесс возбуждения электромагнитных колебаний в частично экранированной диэлектрической пластине и анализируется возможность оптимизации параметров решетчатого узла ввода излучения в слой. Приводится график зависимости потока энергии через сечение частично экранированного слоя от угла падения плоской волны и ширины щели периодической решетки.

Keywords: diffraction problem, periodical grid, integral-summatorial identity method, radiation input, partially screened layer.

Process of initiation of electromagnetic oscillations in partially screened dielectric plate is investigated and possibility of optimization of parameters of grating knot of radiation input into a layer is analyzed. The graphic of dependence of energy stream on the angle of a plane wave and width of a crack of periodic grating through the section of partially screened layer is provided.

Введение

Слоистые композитные материалы имеют уникальные физико-механические свойства, что обуславливает их широкое применение в различных конструкциях [1], [2]. В ряде случаев в слоистых пластинах могут распространяться акустические, электромагнитные или упругие волны.

Для возбуждения периодических колебаний в многослойных пластинах внешним полем можно использовать периодические решетчатые структуры. В [3] изучался процесс преобразования электромагнитного излучения слоистым композитом с тонкими проводящими периодическими включениями. В работе [4] рассматривалась возможность использовать в качестве сканирующего экрана слоистый композит, армированный тонкими проводящими пластинами.

В данной работе исследуется процесс возбуждения электромагнитных колебаний в частично экранированной диэлектрической пластине и обсуждается возможность оптимизации параметров решетчатого узла ввода излучения в слой.

1. Задача дифракции электромагнитной волны на частично экранированном слое

Пусть бесконечный диэлектрический слой $0 < z < h$ (в декартовой системе координат) экранирован снизу идеально проводящей пластиной $z = 0$. На верхней поверхности слоя размещена периодическая система из идеально проводящих бесконечно тонких экранов. На слой сверху набегает плоская электромагнитная волна. В результате ее дифракции появляется электромагнитное поле над решеткой (уходящие на бесконечность волны) и поле в слое диэлектрика. Электромагнитные волны в слое в общем случае переносят энергию вдоль него.

Исследуем зависимость потока энергии через поперечное сечение пластины от параметров волноводной структуры и от характеристик возбуждающей волны.

Рассмотрим двумерный (плоский) случай, когда система экранов на поверхности слоя представляет собой ℓ-периодическую решетку из тонких проводящих лент, параллельных оси y.

Выберем гармоническую зависимость поля от времени в виде $\exp(-i\omega t)$.

Для поля ТЕ-поляризации ненулевые компоненты выражаются через потенциальную функцию $u(x,z)$ – решение уравнения Гельмгольца:

$$E_y = u, \quad H_x = \frac{-1}{i\omega\mu_0\mu}\frac{\partial u}{\partial z}, \quad H_z = \frac{1}{i\omega\mu_0\mu}\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u(x,z) = 0, \quad k^2 = \omega^2\mu_0\mu\varepsilon_0\varepsilon.$$

Достаточно исследовать процесс дифракции только в плоскости $y = 0$, а точнее, в полуплоскости $z > h$ (область 1) и в полосе $0 < z < h$ (область 2). Будем помечать индексами 1 и 2 параметры сред, заполняющих эти области, а также потенциальные функции искомых электромагнитных волн.

Пусть на периодическую структуру падает сверху плоская ТЕ-волна с потенциальной функцией

$$u^0(x,z) = e^{ik_1\sin\theta^0 x - ik_1\cos\theta^0 (z-h)}.$$

Нужно найти решения уравнения Гельмгольца в области 1 при $k = k_1$ и в области 2 при $k = k_2$, удовлетворяющие следующим граничным условиям и условиям сопряжения при $z = 0$ и при $z = h$:

$$u(x, 0+0) = 0,$$

$$u(x, h-0) = 0, \quad u(x, h+0) = 0 \quad \text{на лентах},$$

$$u(x, h-0) = u(x, h+0),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(x, h-0) = \frac{\partial u}{\partial z}(x, h+0) \quad \text{на щелях}.$$

Решение уравнения Гельмгольца в области 1 должно также удовлетворять условию излучения, то есть соответствовать уходящей на бесконечность электромагнитной волне.

2. Парное сумматорное функциональное уравнение

Так как система экранов на поверхности пластины является периодической, то будем искать решения уравнения Гельмгольца в каждой из областей как квазипериодические функции (волны Флоке) вида

$$u(x,z) = e^{i\alpha x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n(z) e_n(x),$$

$$e_n(x) = e^{i\frac{2\pi}{\ell}nx}, \quad n = 0, \pm 1, \ldots$$

здесь α - параметр Флоке.

Легко видеть, что коэффициенты Флоке $u_n(z)$ должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$u_n'' + \left[k_j^2 - \left(\frac{2\pi}{\ell}n + \alpha\right)^2\right] u_n(z) = 0, \quad n = 0, \pm 1, \ldots$$

Обозначим

$$\gamma_{jn} = \sqrt{k_j^2 - \left(\frac{2\pi}{\ell}n + \alpha\right)^2}$$

и условимся, что или $\operatorname{Re}\gamma_{jn} > 0$, или $\operatorname{Im}\gamma_{jn} > 0$.

В фундаментальной системе решений дифференциального уравнения содержатся две функции: $e^{-i\gamma_{jn}z}$ и $e^{i\gamma_{jn}z}$. При сделанных предположениях ($\exp(-i\omega t)$) первая из них определяет или приходящие с бесконечности волны, или неограниченно возрастающие при $z \to +\infty$. Вторая функция -- наоборот, или уходящие на бесконечность волны, или затухающие при $z \to +\infty$.

Условие излучения для области 1 сводится к тому, что в общем решении уравнений должны остаться только слагаемые с экспонентами второго типа. Поэтому будем искать

$$u^1(x,z) = e^{i\alpha x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{i\gamma_{1n}(z-h)} e_n(x), \quad z > h.$$

В области 2 должно быть выполнено граничное условие $u(x, 0+0) = 0$. Следовательно, произвольные постоянные в общем решении

$$u_n(z) = p_n e^{-i\gamma_{2n}z} + q_n e^{i\gamma_{2n}z}$$

должны удовлетворять условию $p_n + q_n = 0$. Тогда потенциальную функцию можно записать в виде

$$u^2(x,z) = e^{i\alpha x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \sin\gamma_{2n}z \cdot e_n(x), \quad 0 < z < h.$$

Из граничных условий и условий сопряжения при $z = h$ следует, что при всех x

$$u^0(x,h) + u^1(x,h) = u^2(x,h)$$

или

$$e^{ik_1\sin\theta^0 \cdot x} + e^{i\alpha x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e_n(x) =$$

$$= e^{i\alpha x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \sin\gamma_{2n}h \cdot e_n(x).$$

Отсюда

$$\alpha = k_1 \sin\theta^0$$

и

$$1 + a_0 = b_0 \sin\gamma_{20}h, \quad a_n = b_n \sin\gamma_{2n}h \quad \text{при } n \neq 0.$$

Исключим неизвестные b_n. Для определения неизвестных a_n остаются два равенства:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e_n(x) = -1 \quad \text{на лентах,}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \left[\gamma_{1n} + i\gamma_{2n} \operatorname{ctg}\gamma_{2n}h\right] \cdot e_n(x) =$$

$$= \gamma_{10} - i\gamma_{20} \operatorname{ctg}\gamma_{20}h \quad \text{на щелях.}$$

3. Бесконечная система линейных алгебраических уравнений

Так как оба равенства в парном уравнении – равенства периодических функций, то достаточно их рассматривать на частях M и N отрезка $[0, \ell]$, которые относятся к лентам и щелям соответственно.

Удобнее, когда одно из равенств в парном сумматорном функциональном уравнении является однородным. Введем новые искомые коэффициенты

$$c_0 = a_0 - \frac{\gamma_{10} - i\gamma_{20}\operatorname{ctg}\gamma_{20}}{\gamma_{10} + i\gamma_{20}\operatorname{ctg}\gamma_{20}},$$

$$c_n = a_n = b_n \sin\gamma_{2n}h \quad \text{при } n \neq 0.$$

Тогда

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e_n(x) = -\xi \quad \text{на } M,$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \xi_n e_n(x) = 0 \quad \text{на } N,$$

где

$$\xi = \frac{2i\gamma_{20}\operatorname{ctg}\gamma_{20}}{\xi_0}, \quad \xi_n = \gamma_{1n} + i\gamma_{2n}\operatorname{ctg}\gamma_{2n}h,$$

$$n = 0, \pm 1, \ldots$$

Методом интегрально-сумматорных тождеств [5] парное сумматорное функциональное уравнение преобразуется в бесконечную систему линейных алгебраических уравнений (БСЛАУ)

$$-\ell c_k + \frac{1}{\ell} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \xi_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\xi_m} I_{n-m} J_{m-k} = \xi \cdot I_{-k},$$

$$k = 0, \pm 1, \ldots$$

где

$$I_n = \int_M e_n(t)dt, \quad J_n = \int_N e_n(t)dt, \quad n = 0, \pm 1, \ldots$$

Более сложная БСЛАУ в задаче дифракции электромагнитной волны на частично экранированном слое была получена в работе [6].

Приближенное решение бесконечной системы уравнений может быть найдено методом усечения.

4. Поток энергии через сечение слоя

Рассмотрим поперечное сечение плоскостью $x=0$ слоя $0<z<h$. Вычислим поток энергии через это сечение (нормированный на единицу длины оси y) электромагнитного поля, возбуждаемого падающей сверху плоской волной. Так как нормальная компонента среднего значения вектора Пойнтинга

$$\overline{\Pi}_x = \frac{1}{2\omega\mu_0\mu}\mathrm{Re}\left(iu\frac{\partial u^*}{\partial x}\right),$$

то поток энергии через сечение

$$F_x = \frac{1}{2\omega\mu_0\mu}\mathrm{Re}\sum_{n_1=-\infty}^{+\infty} b_{n_1}\sum_{n_2=-\infty}^{+\infty} b_{n_2}^*\left(\alpha+\frac{2\pi}{\ell}n_2\right)\cdot S_{n_1,n_2},$$

где

$$S_{n_1,n_2} = \int_0^h \sin\gamma_{2n_1}z\cdot\sin\gamma_{2n_2}^* z\cdot dz$$

(* – операция комплексного сопряжения).

Вычислительный эксперимент показал, что зависимость потока энергии через сечение частично экранированного слоя от угла падения θ плоской волны от внешнего источника и ширины щели d периодической решетки является многоэкстремальной функцией $F_x = F_x(\theta, d)$ (см. рис. 1).

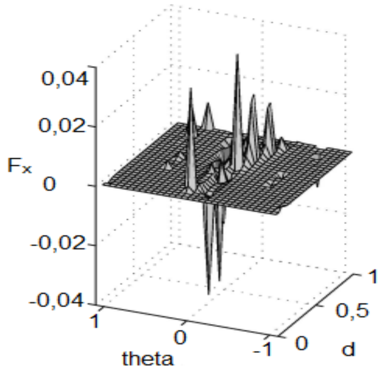

Рис. 1 – Зависимость потока энергии от параметров θ и d

5. Оптимизация параметров узла ввода излучения

Исследовать на экстремумы функцию $F_x(\theta, d)$ слишком сложно. Поэтому для определения значений параметров θ и d, доставляющих ей глобальный экстремум, можно использовать следующий алгоритм.

На отрезке $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$ выберем N значений θ_k^0, $k=0\ldots N-1$. Получим методом проекции градиента решения d_k^0 одномерных задач

$$F_x(\theta_k^0, d) \to extr,\quad d\in[d_{\min}, d_{\max}],\quad k=0\ldots N-1.$$

Среди найденных пар (θ_k^0, d_k^0), $k=0\ldots N-1$ можно выбрать наилучшие и уточнить значения θ_k и d_k методом проекции градиента для целевой функции двух переменных.

Работа выполнена при поддержке РФФИ и АН РТ, грант 12-01-97012-р-поволжье-а.

Литература

[1] В.В. Васильев, *Механика конструкций из композиционных материалов*. Машиностроение, Москва, 1988. 272 с.

[2] В.И. Королев, *Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс*. Машиностроение, Москва, 1965. 272 с.

[3] И.Е. Плещинская, Н.Б. Плещинский, *Вестник Казан. технол. ун-та*, №11, 147-153 (2010).

[4] И.Л. Александрова, И.Е. Плещинская, Н.Б. Плещинский, *Вестник Казан. технол. ун-та*, №7, 37-39 (2012).

[5] I.L. Aleksandrova, E.A. Osipov, N.B. Pleshchinskii, P.A. Rogozhin, Proceedings of PIERS 2012 in Moscow, 435-439 (2012).

[6] Е.Г. Лапина, *Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского*, **2**. Казанск. матем. об-во, Казань, 1999. С. 229-234.

© **И. Е. Плещинская -** канд. физ.-мат. наук, доц. каф. информатики и прикладной математики КНИТУ, plant_flower@mail.ru; **Н. Б. Плещинский -** д-р физ.-мат. наук, проф., зав. каф. прикладной математики К(П)ФУ, pnb@kpfu.ru; **И. В. Сабиров –** студ. К(П)ФУ.