

ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ЗАКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

Ключевые слова: тонкостенный стержень, напряжения и деформации, принцип Лагранжа, вариационный метод.

В статье представлены элементы теории тонкостенных стержней закрытого профиля, изложен вариационный метод, позволяющий с использованием простейших соотношений для компонент деформаций представить принципа Лагранжа для стержней, поперечное сечение которых составлено из прямолинейных и криволинейных.

Keywords: thin-walled rods, stresses and deformations, Lagrange principle, variational method.

The article presents the elements of the theory rods with a thin-walled closed profiles, the method, which allows to present principle Lagrange for rods with cross sections consisting of rectilinear and curvilinear sectors based on the simple relations for components of deformation.

В данной статье приведены основные формулы вариационного метода расчета тонкостенных стержней закрытого профиля, основанного на применении функционала Лагранжа. Используются основные положения метода [1-4], ранее использованного для определения напряженно-деформированного состояния стержней различной формы. Учитываются сдвиги и деформация, возникающие при деформациях изгиба и кручения. Принимаются основные допущения теории стержней Тимошенко и теории тонкостенных стержней закрытого профиля Уманского [5-7].

Для описания напряженно-деформированного состояния стержней используются следующие гипотезы:

1. Справедлив закон Гука.
2. При деформировании, продольные волокна стержня не взаимодействуют друг с другом в перпендикулярных к ним направлениях (гипотеза ненадавливания).
3. Поперечные сечения стержня, плоские до деформации, после деформации изгиба и растяжения-сжатия остаются плоскими.
4. Напряжения и деформации, связанные с изгибом в плоскости, проходящей через главную ось поперечного сечения стержня, постоянны по ширине сечения.
5. Составляющие касательных напряжений, перпендикулярные к профилю поперечного сечения (к срединной поверхности) стержня равны нулю (гипотеза безмоментности).
6. Составляющие касательных напряжений, параллельные касательной к профилю поперечного сечения стержня, постоянны по толщине стенки (гипотеза о равномерном распределении касательных напряжений).
7. Профиль стержня в плоскости поперечного сечения при кручении перемещается как абсолютно твердое тело (гипотеза неизменяемости контура).
8. При кручении появляются перемещения в направлении продольной оси стержня, возникает деформация поперечного сечения.

Для описания напряженно-деформированного состояния стержня введем декартовую систему координат $Oxyz$, с осью Ox , перпендикулярной к

плоскости поперечного сечения (рис. 1). Обозначим через $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – орты этой системы координат

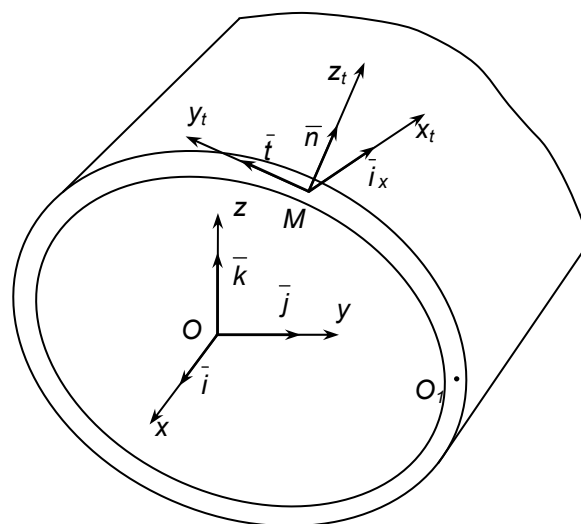


Рис. 1

На срединной поверхности поперечного сечения стержня, введем локальную декартову систему координат, с осями Mx_t, My_t, Mz_t , направленными по касательной и по нормали к профилю стержня (рис. 1). Обозначим орты этих осей $\bar{i}_x, \bar{j}_t, \bar{n}$. Полагая $\bar{n} = \bar{j}_t \times \bar{i}_x$.

В системе координат Oyz ,

$$\bar{j}_t = t_y \bar{j} + t_z \bar{k}, \quad \bar{n} = n_y \bar{j} + n_z \bar{k}. \quad (1)$$

Здесь t_y, t_z, n_y, n_z – направляющие косинусы осей My_t, Mz_t .

Справедливы равенства:

$$t_y = \bar{j} \cdot \bar{j}_t, \quad t_z = \bar{k} \cdot \bar{j}_t, \quad n_y = \bar{j} \cdot \bar{n}, \quad n_z = \bar{k} \cdot \bar{n},$$

$$n_y = t_z, \quad n_z = -t_y,$$

$$y = y_M + y_t t_y + z_t t_z, \quad z = z_M + y_t t_z - z_t t_y, \quad (2)$$

$$t_y = \frac{dy}{ds} = \frac{\partial y}{\partial y_t} = -\frac{\partial z}{\partial z_t}, \quad t_z = \frac{dz}{ds} = \frac{\partial y}{\partial z_t} = \frac{\partial z}{\partial y_t}.$$

Для описания перемещений и деформаций используем векторы перемещения и углов поворота поперечного сечения стержня:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= u_1(x)\bar{j} + u_2(x)\bar{j} + u_3(x)\bar{k}; \\ \bar{\varphi} &= \varphi_1(x)\bar{j} + \varphi_2(x)\bar{j} + \varphi_3(x)\bar{k},\end{aligned}\quad (3)$$

где $u_1(x), u_2(x), u_3(x)$ - перемещения в направлении осей Ox, Oy, Oz , $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ - углы поворота поперечных сечений стержня относительно этих осей.

С учетом равенств (3) и принятых гипотез, возникающие при изгибе и растяжении - сжатии перемещения точек в поперечном сечении стержня $u_u(x, y, z)$, $v_u(x)$, $w_u(x)$ в направлении осей Ox, Oy, Oz , определяются по формулам:

$$\begin{aligned}u_u(x, y, z) &= u_1(x) + z\varphi_2(x) - y\varphi_3(x), \\ v_u(x) &= u_2(x); \quad w_u(x) = u_3(x).\end{aligned}\quad (4)$$

При кручении, в плоскости поперечного сечения стержня возникают перемещения $\bar{V}(x, y, z)$, связанные с поворотом и перемещения $u_k(x, y, z)$ в направлении продольной оси Ox , обусловленные с деформацией сечения.

Полагаем

$$\bar{V}(x, y, z) = v(x, y, z)\bar{t} + w(x, y, z)\bar{n}, \quad (5)$$

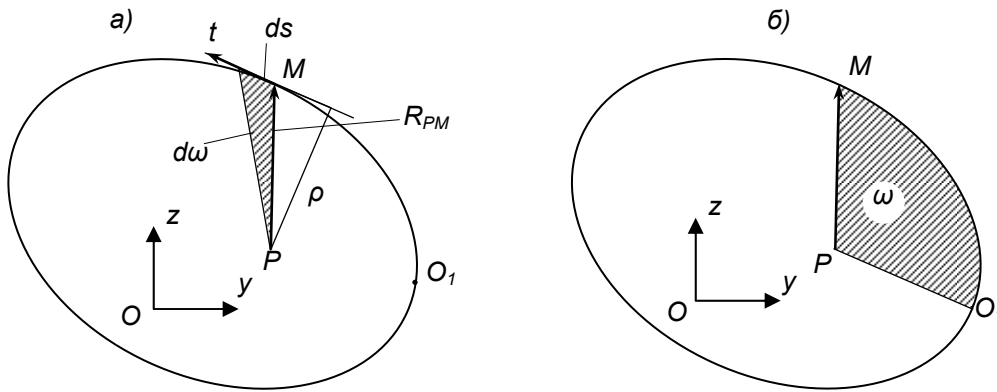


Рис. 2

Выполняя операцию векторного умножения, находим

$$\bar{V} = [\eta - \theta(z_m - z_p)]\bar{j} + [\xi + \theta(y_m - y_p)]\bar{k}. \quad (6)$$

Приравняв правые части соотношений (5), (6), получаем

$$\begin{aligned}v(x, y_m, z_m)\bar{t} + w(x, y_m, z_m)\bar{n} &= \\ &= [\eta - \theta(z_m - z_p)]\bar{j} + [\xi + \theta(y_m - y_p)]\bar{k}.\end{aligned}$$

Умножая это уравнение скалярно на вектора $\bar{t}$ и $\bar{n}$, определяем перемещения в направлениях осей y_t и z_t :

$$\begin{aligned}v(x, y_m, z_m) &= \\ &= [\eta - \theta(z_m - z_p)]\bar{j} \cdot \bar{t} + [\xi + \theta(y_m - y_p)]\bar{k} \cdot \bar{t}, \\ w(x, y_m, z_m) &= [\eta - \theta(z_m - z_p)]\bar{j} \cdot \bar{n} + \\ &+ [\xi + \theta(y_m - y_p)]\bar{k} \cdot \bar{n}.\end{aligned}$$

С учетом формул (1), (2) находим

$$\begin{aligned}v(x, y_m, z_m) &= \eta t_y + \xi t_z + \\ &+ \theta[(y_m - y_p)t_z - (z_m - z_p)t_y],\end{aligned}$$

где $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ - перемещения в направлении осей My_t и Mz_t (рис.1).

В соответствии с гипотезой неизменяемости контура, при кручении тонкостенный стержень в плоскости поперечного сечения поворачивается как абсолютно жесткое тело. Следовательно, для точек $M(y_m, z_m)$ профиля (на линии пересечения срединной поверхности стержня с поперечным сечением) вектор $\bar{V} = v\bar{t} + w\bar{n}$ может быть представлен в следующем виде [7]:

$$\bar{V} = \bar{v}_P + \bar{\theta} \times \bar{R}_{PM}.$$

Здесь $\bar{v}_P = \eta\bar{j} + \xi\bar{k}$ - вектор перемещения точки $P(y_P, z_P)$ поперечного сечения (рис. 2), которая называется центром кручения; η, ξ - компоненты вектора в системе координат Oyz ; $\bar{\theta} = \theta\bar{j}$ - вектор углов поворота сечения вокруг оси проходящей через полюс $P(y_P, z_P)$ и параллельной оси Ox , $\bar{R}_{PM} = (\bar{r} - \bar{r}_P) = (y_m - y_p)\bar{j} + (z_m - z_p)\bar{k}$ - вектор, проведенный из полюса P в точку M профиля.

$$\begin{aligned}w(x, y_m, z_m) &= \eta t_z - \xi t_y - \\ &- \theta[(y_m - y_p)t_y + (z_m - z_p)t_z].\end{aligned}\quad (7)$$

В дальнейшем полагаем, что полюс $P(y_P, z_P)$ совпадает с началом системы координат $Oxyz$. Следовательно

$$\begin{aligned}\theta &= \varphi_1(x), \\ \eta &= u_2(x), \quad \xi = u_3(x).\end{aligned}$$

С учетом этих равенств формулы (7) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}v(x, y_m, z_m) &= u_2(x)t_y + \\ &+ u_3(x)t_z + \varphi_1(x)[y_mt_z - z_mt_y], \\ w(x, y_m, z_m) &= u_2(x)t_z - \\ &- u_3(x)t_y - \varphi_1(x)[y_mt_y + z_mt_z].\end{aligned}\quad (8)$$

Так как принята гипотеза о равномерном распределении касательных напряжений по толщине стенки, можно считать, что перемещения $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ точек $M_n(y, z)$, лежащих на оси Mz_t ($y_t = 0$), такие же, как и для точки

$M(y_M, z_M)$. Следовательно, для точек, координаты которых вычисляются по формулам

$$y = y_M + z_t t_z, \quad z = z_M - z_t t_y, \quad (9)$$

полагая в левой части формул (8) $y_M = y$, $z_M = z$, получим

$$\begin{aligned} v(x, y, z) &= u_2(x) t_y + u_3(x) t_z + \\ &+ \varphi_1(x) [y_M t_z - z_M t_y], \\ w(x, y, z) &= u_2(x) t_z - u_3(x) t_y - \\ &- \varphi_1(x) [y_M t_y + z_M t_z]. \end{aligned} \quad (10)$$

Считаем, что модули упругости и сдвига материала являются переменными величинами, зависящими от длины дуги s линии (рис.2):

$$E(s) = E_0 e^*(s), \quad G(s) = G_0 g^*(s).$$

В соответствии с теорией тонкостенных стержней Уманского [5-7] деформация сечения при кручении описывается функцией

$$u_K(x, y, z) = -\beta(x) \alpha(y, z) = -\beta(x) \alpha(s), \quad (11)$$

где $\beta(x)$ - функция меры деформации;

$$\alpha(y, z) = \alpha(s) = \omega(s) - \frac{I_x^*}{\Omega} \int_0^s \frac{ds}{g^*(s) h(s)}. \quad (12)$$

Здесь $\Omega = \int_0^L \rho ds = \oint \rho ds$ (L - периметр профиля),

$\rho = \rho(s) = \bar{R}_{PM} \cdot \bar{n} = y_M n_y + z_M n_z = y_M t_z - z_M t_y$ - длина перпендикуляра, проведенного из начала координат $Oxyz$ к касательной к линии O_1M в точке

M (рис. 2); $I_x^* = \Omega^2 \int_0^L \frac{ds}{g^*(s) h(s)}$ - осевой момент

инерции поперечного сечения при кручении, $h(s)$ -

толщина стенки; $\omega(s) = \int_0^M \rho ds = \int_0^s \rho ds$ - сектори-

альная характеристика (площадь) профиля.

При растяжении-сжатии, изгибе и кручении тонкостенного закрытого профиля в направлении нормали к поперечному сечению возникают перемещения вызванные растяжением-сжатием, изгибом и деформацией сечения при кручении:

$$u(x, y, z) = u_u(x, y, z) + u_K(x, y, z).$$

Подставляя в это равенство выражения (4), (11), находим

$$u(x, y, z) = u_1(x) + z\varphi_2(x) - y\varphi_3(x) - \beta(x) \alpha(s). \quad (13)$$

Деформации и напряжения будем вычислять в системе координат $My_t z_t$. Используем формулы теории упругости:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \gamma_{xy_t} = \gamma_{xs} = \frac{\partial u}{\partial y_t} + \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (14)$$

Обратим внимание на то, что по формулам (14) вычисляются деформации в фиксированной точке M и в фиксированной локальной системе координат $My_t z_t$. В этом случае, в точке M

$ds = dy_t$ (рис. 1, 2), следовательно $\frac{\partial}{\partial y_t} = \frac{\partial}{\partial s}$. С

учетом этого равенства и выражений (2), (12), (10), (13) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{du_1(x)}{dx} + z \frac{d\varphi_2(x)}{dx} - y \frac{d\varphi_3(x)}{dx} - \frac{d\beta(x)}{dx} \alpha(s), \\ \frac{\partial u}{\partial y_t} &= \varphi_2(x) \frac{\partial z}{\partial y_t} - \varphi_3(x) \frac{\partial y}{\partial y_t} - \\ &- \beta(x) \frac{d\alpha(s)}{ds} = \varphi_2(x) t_z - \varphi_3(x) t_y - \\ &- \beta(x) \left[\rho(s) - \frac{I_x^*}{\Omega g^*(s) h(s)} \right], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{du_2(x)}{dx} t_y + \frac{du_3(x)}{dx} t_z + \\ &+ \frac{d\varphi_1(x)}{dx} [y_M t_z - z_M t_y], \end{aligned}$$

Подставляя формулы (15) в (14), находим выражения для компонент деформаций

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{du_1(x)}{dx} + z \frac{d\varphi_2(x)}{dx} - y \frac{d\varphi_3(x)}{dx} - \frac{d\beta(x)}{dx} \alpha(s), \\ \gamma_{xy_t} &= \frac{du_2(x)}{dx} t_y + \frac{du_3(x)}{dx} t_z + \\ &+ \frac{d\varphi_1(x)}{dx} [y_M t_z - z_M t_y] + \\ &+ \varphi_2(x) t_z - \varphi_3(x) t_y - \beta(x) \left[\rho(s) - \frac{I_x^*}{\Omega g^*(s) h(s)} \right]. \end{aligned} \quad (16)$$

Учитывая принятые гипотезы безмоментности и неизменяемости контура, следует полагать $\tau_{xz_t} = G\gamma_{xz_t} = 0$, $\tau_{y_t z_t} = G\gamma_{y_t z_t} = 0$.

В соответствии с гипотезой ненадавливания, продольные волокна стержня не взаимодействуют в нормальном по отношению к ним направлениям, следовательно, нормальные напряжения в направлении осей My_t , Mz_t равны нулю: $\sigma_{y_t} = \sigma_{z_t} = 0$.

Таким образом, в поперечном сечении тонкостенного стержня возникают напряжения

$$\sigma_x = E \varepsilon_x, \quad \tau_{xy_t} = G \gamma_{xy_t}; \quad (17)$$

Формулы (16), (17) справедливы для точек поперечного сечения стержня, лежащих на оси Mz_t , т.к. для них также выполняется равенство

$$\frac{\partial}{\partial y_t} = \frac{\partial}{\partial s}.$$

Координаты точек, лежащих на оси Mz_t ($y_t = 0$) вычисляются по формулам (9). Координаты некоторой фиксированной точки на линии $y_t = 0$ обозначим через (y_i, z_i) , а длину дуги, которая соответствует точке $M(y_{Mi}, z_{Mi})$ - s_i . В соответствии с равенствами (9) - $y_i = y_{Mi} + z_{ti} t_z$, $z_i = z_{Mi} - z_{ti} t_y$. Следовательно, с

учетом соотношений (16), (17) для точек (y_i, z_i) , лежащих на оси Mz_t

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, y_i, z_i) &= E \varepsilon_x(x, y_i, z_i), \\ \tau_{xy_t}(x, y_i, z_i) &= G \gamma_{xy_t}(x, y_i, z_i); \\ \varepsilon_x(x, y_i, z_i) &= \frac{du_1(x)}{dx} + z_i \frac{d\varphi_2(x)}{dx} - \\ &- y_i \frac{d\varphi_3(x)}{dx} - \frac{d\beta(x)}{dx} \alpha(s_i), \\ \gamma_{xy_t}(x, y_i, z_i) &= \frac{du_2(x)}{dx} t_y + \frac{du_3(x)}{dx} t_z + \\ &+ \frac{d\varphi_1(x)}{dx} [y_{mi} t_z - z_{mi} t_y] + \\ &+ \varphi_2(x) t_z - \varphi_3(x) t_y - \beta(x) \left[\rho(s_i) - \frac{l_x^*}{\Omega g^*(s_i) h(s_i)} \right].\end{aligned}\quad (18)$$

Для расчета напряженно-деформированного состояния стержневой системы может быть использован вариационный принцип Лагранжа:

$$\delta U - \delta W = 0. \quad (19)$$

Здесь δU – вариация потенциальной энергии деформации системы, δW – вариация работы внешних сил.

Потенциальная энергия деформации стержня в точках (x, y_i, z_i)

$$U_A(x, y_i, z_i) = \frac{1}{2} [\sigma_x(x, y_i, z_i) \varepsilon_x(x, y_i, z_i) + \tau_{xy_t}(x, y_i, z_i) \gamma_{xy_t}(x, y_i, z_i)].$$

Вариация потенциальной энергии деформации

$$\delta U_A(x, y_i, z_i) = [\sigma_x(x, y_i, z_i) \delta \varepsilon_x(x, y_i, z_i) + \tau_{xy_t}(x, y_i, z_i) \delta \gamma_{xy_t}(x, y_i, z_i)]. \quad (20)$$

В точках (x, y_i, z_i) , вариация работы внешних сил, распределенных по длине и по площади поперечных сечений стержня

$$\begin{aligned}\delta W_A(x, y_i, z_i) &= q_u^A(x, y_i, z_i) \delta u(x, y_i, z_i) + \\ &+ q_v^A(x, y_i, z_i) \delta v(x, y_i, z_i) + \\ &+ q_w^A(x, y_i, z_i) \delta w(x, y_i, z_i),\end{aligned}\quad (21)$$

где q_u^A, q_v^A, q_w^A – проекции внешних сил, действующих в поперечном сечении с площадью A , на оси координат Ox, My_t, Mz_t .

Подставляя в (21) выражения для перемещений (10), (13), получим

$$\begin{aligned}\delta W_A(x, y_i, z_i) &= q_u^A(x, y_i, z_i) [\delta u_1(x) + z_i \delta \varphi_2(x) - \\ &- y_i \delta \varphi_3(x) - \delta \beta(x) \alpha(s_i)] + \\ &+ q_v^A(x, y_i, z_i) [\delta u_2(x) t_y + \delta u_3(x) t_z + \\ &+ \delta \varphi_1(x) (y_{mi} t_z - z_{mi} t_y)] + \\ &+ q_w^A(x, y_i, z_i) [\delta u_2(x) t_z - \delta u_3(x) t_y - \\ &- \delta \varphi_1(x) (y_{mi} t_y + z_{mi} t_z)].\end{aligned}\quad (22)$$

Учитывая, что $t_y^2 + t_z^2 = 1$, а величины q_u^A, q_v^A, q_w^A являются проекциями внешних сил

q_1^A, q_2^A, q_3^A на оси координат Ox, Oy, Oz по формулам $q_u^A = q_1^A, q_v^A = q_2^A t_y + q_3^A t_z, q_w^A = q_2^A t_z - q_3^A t_y$, вариацию работы внешних (22) можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}\delta W_A(x, y_i, z_i) &= q_1^A(x, y_i, z_i) [\delta u_1(x) + z_i \delta \varphi_2(x) - \\ &- y_i \delta \varphi_3(x) - \delta \beta(x) \alpha(s_i)] + \\ &+ q_2^A(x, y_i, z_i) [\delta u_2(x) - \delta \varphi_1(x) z_{mi}] + \\ &+ q_3^A(x, y_i, z_i) [\delta u_3(x) + \delta \varphi_1(x) y_{mi}].\end{aligned}\quad (23)$$

Для стержня длиной l_C , с площадью поперечного сечения A ,

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_{l_C} \iint_A \delta U_A dA dl, \\ \delta W &= \int_{l_C} \iint_A \delta W_A dA dl.\end{aligned}\quad (24)$$

Интегралы $\iint_A \delta U_A dA, \iint_A \delta W_A dA$ будем

вычислять с использованием численного интегрирования. При этом

$$\begin{aligned}\iint_A \delta U_A dA &= \sum_{i=1}^I \delta U_A(x, y_i, z_i) g_i, \\ \iint_A \delta W_A dA &= \sum_{i=1}^I \delta W_A(x, y_i, z_i) g_i.\end{aligned}\quad (25)$$

Здесь g_i – весовые множители, зависящие от используемой для численного интегрирования квадратурной формулы, размеров и формы поперечного сечения.

С учетом равенств (23), (20), (24) (25), получается

$$\begin{aligned}\delta U &= \int_{l_C} \left\{ \sum_{i=1}^I \delta U_A(x, y_i, z_i) g_i \right\} dl = \\ &= \int_{l_C} \left\{ \sum_{i=1}^I [\sigma_x(x, y_i, z_i) \delta \varepsilon_x(x, y_i, z_i) + \right. \\ &\left. + \tau_{xy_t}(x, y_i, z_i) \delta \gamma_{xy_t}(x, y_i, z_i)] g_i \right\} dl;\end{aligned}\quad (26)$$

$$\delta W = \int_{l_C} \left\{ \sum_{i=1}^I \delta W_A(x, y_i, z_i) g_i \right\} dl =$$

$$\begin{aligned}\int_{l_C} \left\{ \sum_{i=1}^I \left\{ q_1^A(x, y_i, z_i) [\delta u_1(x) + z_i \delta \varphi_2(x) - \right. \right. \\ \left. \left. - y_i \delta \varphi_3(x) - \delta \beta(x) \alpha(s)] + \right. \right. \\ \left. \left. + q_2^A(x, y_i, z_i) [\delta u_2(x) - \delta \varphi_1(x) z_{mi}] + \right. \right. \\ \left. \left. + q_3^A(x, y_i, z_i) [\delta u_3(x) + \delta \varphi_1(x) y_{mi}] \right\} g_i \right\} dl.\end{aligned}$$

Полагая в последнем выражении

$$F_1(x) = \iint_A q_1^A(x) dA = \sum_{i=1}^I q_1^A(x, y_i, z_i) g_i,$$

$$F_2(x) = \iint_A q_2^A(x) dA = \sum_{i=1}^I q_2^A(x, y_i, z_i) g_i,$$

$$F_3(x) = \iint_A q_3^A(x) dA = \sum_{i=1}^I q_3^A(x, y_i, z_i) g_i,$$

$$m_1(x) = \iint_A (q_3^A(x)y - q_2^A(x)z) dA =$$

$$= \sum_{i=1}^I \{ q_3^A(x, y_i, z_i) y_{mi} - q_2^A(x, y_i, z_i) z_{mi} \} g_i,$$

$$m_2(x) = \iint_A q_1^A(x) z dA = \sum_{i=1}^I q_1^A(x, y_i, z_i) z_i g_i,$$

$$m_3(x) = \iint_A q_1^A(x) y dA = - \sum_{i=1}^I q_1^A(x, y_i, z_i) y_i g_i,$$

$$m_B^*(x) = \iint_A q_1^A(x) \alpha(s) dA = \sum_{i=1}^I q_1^A(x, y_i, z_i) \alpha(s_i) g_i,$$

вариацию работы распределенных по длине стержня внешних сил F_1, F_2, F_3 , моментов m_1, m_2, m_3 и бимоента m_B^* можно представить в следующем виде:

$$\delta W = \int_{l_c} [F_1(x) \delta u_1(x) + F_2(x) \delta u_2(x) + F_3(x) \delta u_3(x) +$$

$$+ m_1(x) \delta \varphi_1(x) + m_2(x) \delta \varphi_2(x) +$$

$$+ m_3(x) \delta \varphi_3(x) - m_B^*(x) \delta \beta(x)] dl.$$

Аналогично, для сил сосредоточенных сил F_{1k}, F_{2k}, F_{3k} , приложенных в точках продольной оси стержня с координатой x_k и моментов, $M_{1j}, M_{2j}, M_{3j}, M_{Bj}$, действующих в точках с координатой x_j , вариация работы сосредоточенных внешних сил

$$\delta W_L = \sum_{k=1}^K [F_{1k} \delta u_1(x_k) + F_{2k} \delta u_2(x_k) + F_{3k} \delta u_3(x_k)] +$$

$$+ \sum_{j=1}^J [M_{1j} \delta \varphi_1(x_j) + M_{2j} \delta \varphi_2(x_j) +$$

$$+ M_{3j} \delta \varphi_3(x_j) - M_{Bj} \delta \beta(x_j)].$$

Следовательно, вариация работы распределенных и сосредоточенных в точках внешних сил

$$\delta W = \int_{l_c} [F_1(x) \delta u_1(x) + F_2(x) \delta u_2(x) + F_3(x) \delta u_3(x) +$$

$$+ m_1(x) \delta \varphi_1(x) + m_2(x) \delta \varphi_2(x) +$$

$$+ m_3(x) \delta \varphi_3(x) - m_B(x) \delta \beta(x)] dl +$$

$$+ \sum_{k=1}^K [F_{1k} \delta u_1(x_k) + F_{2k} \delta u_2(x_k) + F_{3k} \delta u_3(x_k)] +$$

$$+ \sum_{j=1}^J [M_{1j} \delta \varphi_1(x_j) + M_{2j} \delta \varphi_2(x_j) +$$

$$+ M_{3j} \delta \varphi_3(x_j) - M_{Bj} \delta \beta(x_j)].$$

Для выбранной системы координат $Oxyz$, усилия и моменты в поперечных сечениях стержня вычисляются по формулам:

$$N = \iint_A \sigma_x dA = \iint_A E \varepsilon_x dA,$$

$$Q_y = \iint_A \tau_{xy_t} t_y dA = \iint_A G \gamma_{xy_t} t_y dA,$$

$$Q_z = \iint_A \tau t_z dA = \iint_A G \gamma_{xy_t} t_z dA, \quad (28)$$

$$M_y = \iint_A \sigma_x z dA = \iint_A E \varepsilon_x z dA,$$

$$M_z = \iint_A \sigma_x y dA = \iint_A E \varepsilon_x y dA,$$

$$M_x = \iint_A (\tau_{xy_t} t_z y - \tau_{xy_t} t_y z) dA =$$

$$= \iint_A G (\varepsilon_{xy_t} t_z y - \varepsilon_{xy_t} t_y z) dA.$$

Эти величины являются интегральными характеристиками и вычисляются достаточно точно при использовании соотношений для деформаций в виде (16).

Нормальные напряжения σ_x в поперечных сечениях стержня можно вычислять на основе закона Гука по формуле:

$$\sigma_x = E_0 e^*(s) \left[\frac{du_1(x)}{dx} + z \frac{d\varphi_2(x)}{dx} - \right.$$

$$\left. - y \frac{d\varphi_3(x)}{dx} - \frac{d\beta(x)}{dx} \alpha(s) \right]$$

Использование же закона Гука (17) для определения касательных напряжений позволяет определять достаточно точно только интегральные характеристики.

Для более точного вычисления значений касательных напряжений τ_{xy_t} в точке М поперечного сечения стержня (рис. 2,3) следует использовать формулу, полученную на основе уравнений равновесия выделенного элемента стержня. В частности, в монографии [7] представлена формула для вычисления τ_{xy_t} в случае, когда оси Oy , Oz являются главными центральными осями поперечного сечения и полюс Р (рис. 2) совпадает с центром изгиба – центром кручения.

Литература

1. Серазутдинов М.Н. Вариационные соотношения теории тонкостенных стержней открытого профиля. // Вестник Казанского технологического университета. 2013 г. Т. 16, № 5. С. 216 – 223.
2. Серазутдинов М.Н. Расчет усиливаемых нагруженных конструкций вариационным методом /М.Н. Серазутдинов, М.Н. Убайдуллоев, Х.А. Абрагим // Известия вузов. Строительство. 2010. № 7. С. 118 – 123.
3. Серазутдинов М. Н., Абрагим Х.А. Несущая способность стержневых элементов конструкций, усиливаемых в напряженном состоянии. / Серазутдинов М.Н. // Вестник Казанского технологического университета. 2010 г. № 9. С.512 – 518.
4. Серазутдинов М.Н. Метод расчета криволинейных стержней. / М.Н. Серазутдинов, Ф.С. Хайруллин // Известия вузов. Строительство и архитектура. 1991. № 5. С. 104 – 108.
5. Уманский А.А. Изгиб и кручение тонкостенных авиаконструкций. – М.: Оборониз, 1939. – 112 с.

6. Уманский А.А. О нормальных напряжениях при кручении крыла самолета. – Техника воздушного флота, 1940, № 12
С. 48 – 65.

7. Сливкер В.И. Строительная механика. Вариационные основы. Учебное пособие. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2005. – 736 с.

© **М. Н. Серазутдинов** - д-р физ. мат. наук, проф. зав. каф. теоретической механики и сопротивления материалов КНИТУ, serazmn@mail.ru.