

МОДЕЛИ ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ.

ЧАСТЬ 2. НЕЛИНЕЙНЫЕ И НЕАВТОНОМНЫЕ ИНВАРИАНТЫ

Ключевые слова: аттрактор Лоренца, нелинейных и неавтономных инварианты.

Проведено дальнейшее обобщение классической модели Лоренца, описывающей хаотическую динамику, с учетом инвариантных нелинейных и неавтономных преобразований координат.

Keywords: attractor Lorenz, nonlinear and non-autonomous invariants.

Conducted a further generalization of the classical Lorenz model, which describes the chaotic dynamics, taking into account the non-linear and non-autonomous invariant coordinate transformations.

Введение

Вопросы моделирования сложной динамики привлекают внимание многих исследователей (см., например, [1-4]). Ранее в статье [4] нами было проведено обобщение известных моделей Лоренца, Рикитаке и Росслера, способных описывать хаотическое поведение с учетом инвариантных линейных преобразований координат. В продолжение этой статьи в данном сообщении рассматриваются более сложные обобщения модели Лоренца

$$x' = -\alpha x + \alpha y, \quad y' = \beta x - xz - y, \quad z' = xy - \gamma z \quad (1)$$

при $\alpha=10, \beta=28, \gamma=8/3$,

инвариантные относительно линейных неавтономных и нелинейных автономных преобразований координат.

Результаты и их обсуждение

Автономные нелинейные преобразования. Рассмотрим квадратичную деформацию со сдвигом по всем переменным без поворота осей координат вида (для более сложных преобразований выкладки становятся громоздкими)

$$x = a_1 x^2 + b_1 x + c_1, \quad y = a_2 y^2 + b_2 y + c_2, \quad z = a_3 z^2 + b_3 z + c_3, \quad (2)$$

где $\Delta \equiv \det(a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2; a_3, b_3, c_3) \neq 0$ (условие физичности). Преобразуем классическую модель Лоренца (1) с учетом (2), разрешим ее относительно производных от новых переменных и получим обобщенную модель Лоренца, инвариантную ей по свойствам относительно преобразований (2)

$$\begin{aligned} x' &= \alpha[(a_2 y^2 + b_2 y + c_2) - (a_1 x^2 + b_1 x + c_1)] / (2a_1 x + b_1), \\ y' &= [(a_1 x^2 + b_1 x + c_1)(\beta - z) - (a_2 y^2 + b_2 y + c_2)] / (2a_2 y + b_2), \\ z' &= [(a_1 x^2 + b_1 x + c_1)(a_2 y^2 + b_2 y + c_2) - \gamma(a_3 z^2 + b_3 z + c_3)] / (2a_3 z + b_3). \end{aligned} \quad (3)$$

Варьируя коэффициенты этой модели можно получить бесконечное множество квадратичных модификаций модели Лоренца и провести их классификацию. Например, в частном случае, при $a_1=a_2=a_3=0$ модель (3) совпадает с моделью (5) статьи [4].

Модель 3.1. При $a_1=a_2=0.01, a_3=1, b_1=b_2=1, b_3=0, c_1=1, c_2=c_3=0$ получим дробно-нелинейную модификацию модели Лоренца: 3.1)

$x' = \alpha[(0.01y^2 + y) - (0.01x^2 + x + 1)] / (0.02x + 1), \quad y' = [(0.01x^2 + x + 1)(\beta - z) - (0.01y^2 + y)] / (0.02y + 1),$
 $z' = [(0.01x^2 + x + 1)(0.01y^2 + y) - \gamma z^2] / 2z.$ Эта модификация отсутствует среди линейных инвариантов и соответствует замене переменных $x \rightarrow 0.01x^2 + x + 1, y \rightarrow y = 0.01y^2 + y, z \rightarrow z^2$. Она инвариантна по свойствам классической модели Лоренца относительно преобразований квадратичной деформации по всем осям без поворота (рис. 1).

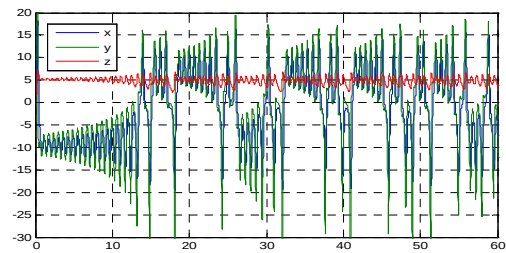


Рис. 1 - Зависимости $x(t), y(t), z(t)$ для модели 3.1 при $\alpha=10, \beta=28, \gamma=8/3, a_1=a_2=0.01, a_3=1, b_1=b_2=1, b_3=0, c_1=1, c_2=c_3=0$

Модель 3.2. При $a_1=a_2=0, a_3=1, b_1=b_2=1, b_3=0, c_1=1, c_2=c_3=0$ получим более простую дробно-нелинейную модификацию модели Лоренца: 3.2) $x' = \alpha[y - (x+1)] / (0.02x + 1), y' = [(0.01x^2 + x + 1)(\beta - z) - (0.01y^2 + y)] / (0.02y + 1), z' = [(0.01x^2 + x + 1)(0.01y^2 + y) - \gamma z^2] / 2z.$ Эта модификация, также отсутствующая среди линейных инвариантов, является частным случаем предыдущей и соответствует замене переменных $x \rightarrow x+1, y \rightarrow y, z \rightarrow z^2$. Она инвариантна по свойствам модели Лоренца относительно сдвига по оси x на единицу и квадратичной деформации по оси z без поворота (рис. 2).

Неавтономные преобразования. Рассмотрим знаменитые преобразования Лоренца для четырехмерной системы «пространство-время», применяемые в теории относительности [5]

$$\text{прямые } x = x, \quad y = y, \quad z = (z - vt) / (1 - v^2/c^2)^{1/2}, \quad t = (t - vz/c^2) / (1 - v^2/c^2)^{1/2}, \quad (4)$$

$$\text{обратные } x = x, \quad y = y, \quad z = (z + vt) / (1 - v^2/c^2)^{1/2}, \quad t = (t + vz/c^2) / (1 - v^2/c^2)^{1/2}, \quad (5)$$

где c – скорость света, v – скорость объекта. Они являются обобщением вращения системы координат, сохраняют инвариантными форму основных законов физики (образуют группу Лоренца-Пуанкаре) и могут быть записаны в различной (например, гиперболической) форме:

$$\text{прямые } x = x, \quad y = y, \quad z = z \operatorname{ch} \theta - ct \operatorname{sh} \theta, \quad ct = ct \operatorname{ch} \theta - z \operatorname{sh} \theta, \quad (6)$$

$$\text{обратные } x = x, \quad y = y, \quad z = z \operatorname{ch} \theta + ct \operatorname{sh} \theta, \quad ct = ct \operatorname{ch} \theta + z \operatorname{sh} \theta, \quad (7)$$

где θ – быстрота (параметр), $\operatorname{sh} \theta = (e^\theta - e^{-\theta})/2$ и $\operatorname{ch} \theta = (e^\theta + e^{-\theta})/2$ – гиперболические синус и косинус.

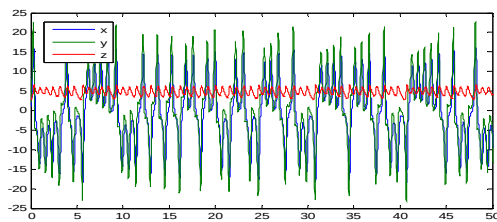


Рис. 2 - Зависимости $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ для модели 3.2 при $\alpha=10$, $\beta=28$, $\gamma=8/3$, $a_1=a_2=0$, $a_3=1$, $b_1=b_2=1$, $b_3=0$, $c_1=1$, $c_2=c_3=0$

Преобразуем классическую модель Лоренца (1), например, с помощью (7) и разрешим ее относительно производных от новых переменных. Так, для переменной x преобразования выполняются следующим образом $dx/dt = dx/dt dt/dt = \alpha(y-x)(\operatorname{ch} \theta + dz/dt \operatorname{sh} \theta/c)$. Выполнив аналогичные преобразования для остальных переменных (опущены), получим обобщенную модель Лоренца, инвариантную ей по свойствам относительно неавтономных преобразований

$$\begin{aligned} x' &= \alpha(y-x)(\operatorname{ch} \theta + z' \operatorname{sh} \theta/c), \\ y' &= [\beta x - y - x(z \operatorname{ch} \theta + ct \operatorname{sh} \theta)](\operatorname{ch} \theta + z' \operatorname{sh} \theta/c), \\ z' &= [xy - \gamma \operatorname{ch} \theta (z + ct \operatorname{th} \theta - c \operatorname{sh} \theta)] / [\operatorname{ch} \theta - \operatorname{th} \theta xy/c + \gamma \operatorname{sh} \theta (z + ct \operatorname{th} \theta)/c]. \end{aligned} \quad (8)$$

Варьируя параметры c и θ в правых частях модели (8), получим бесконечное множество новых модификаций модели Лоренца, инвариантных относительно неавтономных преобразований (7). Например, при $\theta=0$, $\operatorname{ch} \theta=1$, $\operatorname{sh} \theta=0$ модель (8) совпадает с классической моделью Лоренца (1).

Модель 8.1. При $\theta=1$, $\operatorname{ch} \theta=(e+1/e)/2=1.54$, $\operatorname{sh} \theta=(e-1/e)/2=1.18$ и модель (8) примет вид: 8.1) $x' = \alpha \operatorname{ch}(1) \alpha (y^2 - x^2)$, $y' = \operatorname{ch}(1) (\beta x - y - xz \operatorname{ch}(1))$, $z' = xy / \operatorname{ch}(1) - \gamma z$. Эта модификация отсутствует среди линейных автономных и нелинейных неавтономных инвариантов. Она соответствует замене переменных $x \rightarrow x$, $y \rightarrow y$, $z \rightarrow \operatorname{ch}(1)z + ct \operatorname{sh}(1)$, $t \rightarrow \operatorname{ch}(1)t + z \operatorname{sh}(1)/c$ и инвариантна по свойствам модели Лоренца относительно неавтономных преобразований (7), рис. 3.

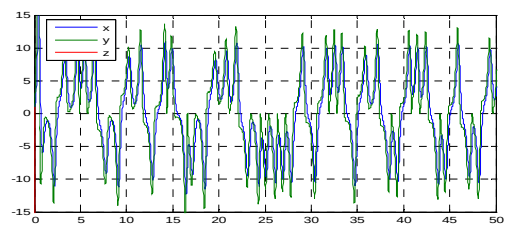


Рис. 3 - Зависимости $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ для модели 8.1 при $\alpha=10$, $\beta=28$, $\gamma=8/3$, $c=300000$, $\theta=1$

Хаос возможен и при других модификациях модели Лоренца, не упомянутых выше. Эти модификации инвариантны относительно каких-то, вообще говоря, неизвестных, нелинейных и неавтономных преобразований. Например, нами экспериментально установлены следующие модификации модели Лоренца.

Модели 9.1-9.5. 9.1) $x' = -\alpha x + \alpha y$, $y' = \beta x - xz - y$, $z' = xy - \gamma z + c$, $-300 \leq c \leq 7$; 9.2) $x' = -\alpha x + \alpha y + d$, $y' = \beta x - xz - y$, $z' = xy - \gamma z$, $-15 \leq d \leq 16$; 9.3) $x' = -\alpha x + e y + d$, $y' = \beta x - xz - y$, $z' = xy - \gamma z$, $-15 \leq e \leq 48$; 9.4) $x' = -\alpha x + \alpha y$, $y' = \beta x - xz$, $z' = xy - \gamma z$; 9.5) $x' = -\alpha x + \alpha y$, $y' = \beta x - xz - y$, $z' = xy - c$, $c \geq 0$ (c, d, e – параметры). Для этих моделей с ростом c хаотичность растет. Отметим, что они не следуют из моделей (3) или (8). На рис. 4 в качестве примера приведены результаты численного анализа модели 9.5.

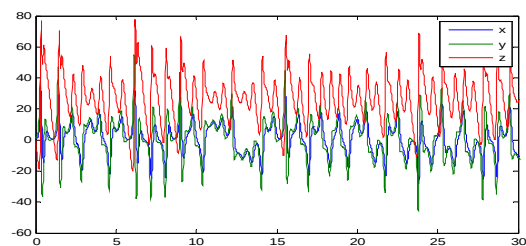


Рис. 4 - Зависимости $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ для модели 9.5 при $c=100$

Таким образом, нами получены все возможные линейные и нелинейные инварианты аттрактора Лоренца, описывающие хаотическую динамику простыми трехмерными автономными системами обыкновенных дифференциальных уравнений.

Литература

1. *Странные аттракторы* / Под ред. Я.Г. Синая, Л.П. Шильникова. Л., Мир, 1981, 253 с.
2. О.В. Матухина, *Вестник Казан. технол. ун-та*, **16**, 2, 191-194 (2013).
3. Р.Г. Мухарлямов, О.В. Матухина *Вестник Казан. технол. ун-та*, **15**, 12, 220-225 (2012).
4. В.Х. Федотов, Н.И. Кольцов, *Вестник Казан. технол. ун-та*, в печати (2013).
5. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, Теория поля. М, Наука, 1988, 512 с.