УДК 428.1

А. Н. Зиннатуллина, М. Н. Шамсиев, Р. И. Ибятов

ИССЛЕДОВАНИЕ МИГРАЦИИ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ВЕЩЕСТВ ПОД ГИДРОСООРУЖЕНИЕМ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ РАЗЛИЧНЫХ ИСТОЧНИКОВ

Ключевые слова: гидротехническое сооружение, диффузионно-конвективный процесс, источник загрязнения.

В данной работе строится математическая 2D модель процесса распространения концентрации загрязняющего вещества под гидротехническим сооружением. Исследуется зависимость процесса распространения концентрации от вида источника загрязнения и параметров грунта.

Key words: a hydraulic work, a diffusion-convection process, a source of contamination.

The mathematical 2D model of a water pollutant concentration expansing process under hydraulic work is given in this paper. The dependence of a concentration expansing process on a type of a source of pollution and ground parameters is investigated.

Введение

Методы исследования проблем экологической безопасности в настоящее время быстро развиваются. Основой для выявления экологической ситуации и выработки мероприятий по предупреждению и ликвидации загрязнений является: проведение комплексного мониторинга и детальной экспертизы загрязненных земель, унификация ряда параметров и методов, обеспечивающих очистку почв от загрязнения, в том числе и построение компьютерных математических моделей для определения степени загрязнения.

В связи с этим изучение фильтрационных процессов в моделях пористых сред, наиболее адекватных к естественным условиям, является актуальным направлением, которое позволит прогнозировать формирование фронта загрязнения и давать оценку величины загрязненной зоны. Создаются и исследуются геофильтрационные модели средствами математического моделирования. Математическое моделирование является одним из основных методов в современной гидрологии. Оно неизмеримо расширяет возможности последней как в ее фундаментальных исследованиях, так и в области ее практических приложений.

Процесс переноса загрязнения под гидротехническим сооружением, подземный контур которого задан в виде полукруга рассматривается в работе [1].

1. Постановка задачи. Рассматривается река, перегороженная плотиной, для устойчивости которой строят противофильтрационные завесы. Из-за разностей уровней воды перед плотиной и за плотиной происходит фильтрация в обход гидросооружения. Откосы берегов считаются вертикальными, а угол наклона свободной поверхности очень малым, поэтому вводиться допущение, что пьезометрический напор постоянен по высоте. Процесс переноса загрязнения под гидротехническим сооружением, подземный контур которого задан в виде прямоугольника (рис.1), описывается дифференциальным уравнением [2, 3]:

$$D_x \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - V_x \frac{\partial c}{\partial x} - V_y \frac{\partial c}{\partial y} = \sigma \frac{\partial c}{\partial t},$$

$$(x, y) \in Z,\ t \in (0, T] \qquad (1)$$

с начальным

$$c|_{t=0} = c(x, y) \qquad (2)$$

и граничными условиями

$$c|_{AB} = c_0,\ \frac{\partial c}{\partial x}\Big|_{AE} = \frac{\partial c}{\partial x}\Big|_{BB_1} = \frac{\partial c}{\partial x}\Big|_{CC_1} = \frac{\partial c}{\partial x}\Big|_{DF} =$$

$$= \frac{\partial c}{\partial y}\Big|_{B_1C_1} = \frac{\partial c}{\partial y}\Big|_{EF} = \frac{\partial c}{\partial y}\Big|_{CD} = 0, \qquad (3)$$

где D_x и D_y – коэффициенты конвективной диффузии, σ – активная пористость, c_0 - значение концентрации на границе, AB – граница верхнего бьефа, CD – граница нижнего бьефа, l_x и l_y – длина и глубина подземного контура плотины, L_x и L_y – длина и глубина области фильтрации, V_x, V_y - составляющие скорости фильтрационных потоков под гидротехническим сооружением, Z – область фильтрации.

Составляющие скорости V_x и V_y фильтрационных потоков под гидротехническим сооружением вычисляются следующим образом:

$$V_x = -k_x \frac{\partial h}{\partial x},\ V_y = -k_y \frac{\partial h}{\partial y}, \qquad (4)$$

где h – действующий напор, k_x и k_y - коэффициенты фильтрации.

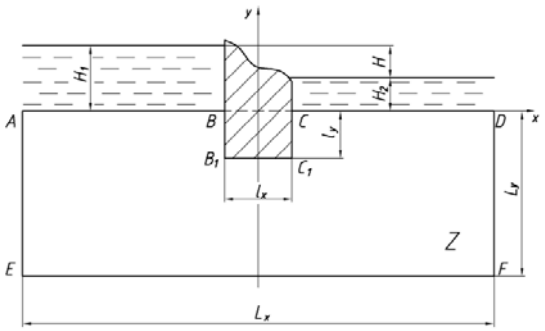

Рис. 1 - Схема гидротехнического сооружения

При нахождении распределения напора под гидросооружением предполагается, что процесс фильтрации воды является стационарным и описывается уравнением:

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0\,,\ (x,y) \in Z\,, \qquad (5)$$

с граничными условиями:

$$h\big|_{AB} = H_1,\ h\big|_{CD} = H_2,\ \frac{\partial h}{\partial x}\Big|_{AE} = \frac{\partial h}{\partial x}\Big|_{BB_1} = \frac{\partial h}{\partial x}\Big|_{CC_1},$$

$$= \frac{\partial h}{\partial x}\Big|_{DF} = \frac{\partial h}{\partial y}\Big|_{B_1C_1} = \frac{\partial h}{\partial y}\Big|_{EF} = 0\,, \qquad (6)$$

где H_1, H_2 - значения напоров на верхнем и нижнем бьефах.

2. Численное решение. Для численного решения системы (1) – (6) используется метод конечных разностей [3, 4]. При дискретизации системы (1) – (6) вводятся в области $\Omega = \left\{(x,y)\ \middle|\ 0 \le x \le L_x,\ 0 \le x \le L_y, 0 \le t \le T\right\}$ следующие сетки узлов:

неравномерная по пространству

$$\bar{z}_\Delta = \begin{cases} (x_i, y_j);\ i = \overline{1, N_x};\ j = \overline{1, N_y} \\ x_1 = 0;\ x_{N_x} = L_x;\ \Delta x_i = x_{i+1} - x_i,\ i = \overline{1, N_x - 1}; \\ \overline{\Delta x_i} = (\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)/2,\ i = \overline{2, N_x - 1}; \\ y_1 = 0;\ y_{N_y} = L_y;\ \Delta y_j = y_{j+1} - y_j,\ j = \overline{1, N_y - 1}; \\ \overline{\Delta y_j} = (\Delta y_{j-1} + \Delta y_j)/2;\ j = \overline{2, N_y - 1}; \end{cases}$$

и равномерная по времени t

$$\bar{z}_\tau = \left\{t_n = n\tau, n = \overline{0, K};\ 0 \le t_n \le T\right\}.$$

Полагаются $c(x_i, y_j, t_n) = c_{i,j}^n$,

$V_x(x_i, y_j) = V_x^{i,j}$, $V_y(x_i, y_j) = V_y^{i,j}$, $h(x_i, y_j) = h_{i,j}$.

Для конечно-разностной аппроксимации конвективного члена в уравнении (1) используется процедура взвешивания «вверх по потоку» [3], а для диффузионного сохраняется симметричное взвешивание. Граничные условия аппроксимируются вторым порядком точности.

Конечно – разностный аналог краевой задачи (1) − (6) запишется в виде [3, 4]:

$$\sigma \frac{c_{i,j}^{n+1} - c_{i,j}^n}{\tau} = \frac{D_x}{\overline{\Delta x_i}} \cdot \left(\frac{c_{i+1,j}^{n+1} - c_{i,j}^{n+1}}{\Delta x_i} - \frac{c_{i,j}^{n+1} - c_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x_{i-1}} \right) +$$

$$+ \frac{D_y}{\overline{\Delta y_j}} \cdot \left(\frac{c_{i,j+1}^{n+1} - c_{i,j}^{n+1}}{\Delta y_j} - \frac{c_{i,j}^{n+1} - c_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y_{j-1}} \right) -$$

$$- \left[\alpha_1 V_x^{i-1,j} \frac{(c_{i,j}^{n+1} - c_{i-1,j}^{n+1})}{\Delta x_{i-1}} + \right.$$

$$\left. + (1 - \alpha_1) V_x^{i,j} \frac{(c_{i+1,j}^{n+1} - c_{i,j}^{n+1})}{\Delta x_i} \right] -$$

$$- \left[\beta_1 V_y^{i,j-1} \frac{(c_{i,j}^{n+1} - c_{i,j-1}^{n+1})}{\Delta y_{j-1}} + \right.$$

$$\left. + (1 - \beta_1) V_y^{i,j} \frac{(c_{i,j+1}^{n+1} - c_{i,j}^{n+1})}{\Delta y_j} \right],$$

$$i = \overline{2, M-1},\ j = \overline{2, N-1}. \qquad (7)$$

$$c_{i,j}^0 = c_0(x_i, y_j),\ i = \overline{1, M},\ j = \overline{1, N}, \qquad (8)$$

$$c_{i_B-1,j}^{n+1} = c_{i_B,j}^{n+1},\ c_{i_C,j}^{n+1} = c_{i_C+1,j}^{n+1},\ j = \overline{j_{B_1C_1}, N};$$

$$c_{0,j}^{n+1} = c_{2,j}^{n+1},\ c_{M-1,j}^{n+1} = c_{M+1,j}^{n+1},\ j = \overline{1, N};$$

$$c_{i,j_{B_1C_1}-1}^{n+1} = c_{i,j_{B_1C_1}}^{n+1},\ i = \overline{i_B, i_C};\ c_{i,0}^{n+1} = c_{i,2}^{n+1},\ i = \overline{1, M};$$

$$c_{i-1,N}^{n+1} = c_{i,N}^{n+1},\ i = \overline{i_C, M}, \qquad (9)$$

$$V_x^{i,j} = -k_x \frac{h_{i,j} - h_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1}},$$

$$V_y^{i,j} = -k_y \frac{h_{i,j} - h_{i,j-1}}{\Delta y_{j-1}} \qquad (10)$$

$$\frac{k_x}{\overline{\Delta x_i}} \left(\frac{h_{i+1,j} - h_{i,j}}{\Delta x_i} - \frac{h_{i,j} - h_{i-1,j}}{\Delta x_{i-1}} \right) +$$

$$\frac{k_y}{\overline{\Delta y_j}} \left(\frac{h_{i,j+1} - h_{i,j}}{\Delta y_j} - \frac{h_{i,j} - h_{i,j-1}}{\Delta y_{j-1}} \right) = 0, \qquad (11)$$

$$h_{i,1} = H_1,\ i = \overline{1, i_B},\ h_{i,1} = H_2,\ i = \overline{i_C, M};$$

$$h_{i,j_{B_1C_1}-1} = h_{i,j_{B_1C_1}},\ i = \overline{i_B, i_C};\ h_{i,0} = h_{i,2},\ i = \overline{i, M},$$

$$h_{0,j} = h_{2,j},\ h_{M-1,j} = h_{M+1,j},\ j = \overline{1, N};$$

$$h_{i_B-1,j} = h_{i_B,j},\ h_{i_C,j} = h_{i_C+1,j},\ j = \overline{j_{B_1C_1}, N}, \qquad (12)$$

где α_1, β_1 – весовые коэффициенты, определяемые по знаку скоростей $V_x^{i-1,j}$ и $V_y^{i,j-1}$ в виде

$$\alpha_1 = \frac{1 + sign(V_x^{i-1,j})}{2},\ \beta_1 = \frac{1 + sign(V_y^{i,j-1})}{2}.$$

3. Результаты численных расчетов. Рассматривается модельный пример, где глубина подземного контура плотины l_y (рис.1), выбирается таким образом, чтобы его значение не вносило погрешность в решение задачи. Исходные данные: $H_1 = 10$ м, $H_2 = 5$ м, $L_x = 20$ м, $L_y = 10$ м, $l_x = 2{,}85$ м, $l_y = 2$ м, $\sigma = 0{,}4$. В начальный момент времени (t=0) на границе верхнего бьефа AB концентрация загрязнения $c_0 = 1$, а в остальных точках физической плоскости $c_0 = 0$. Пористая среда под плотиной считается изотропной: $D_x = D_y = 0{,}1$ м^2/сут и $k_x = k_y = 1{,}0$ м/сут. Поле концентрации на момент времени T=20 суток приведен на рис. 2. Результаты расчетов показывают что, загрязнение за счет конвективного переноса доходит до нижнего бьефа за 5 суток, а за 100 суток происходит полное загрязнение области Z в силу конвективно-диффузионного переноса.

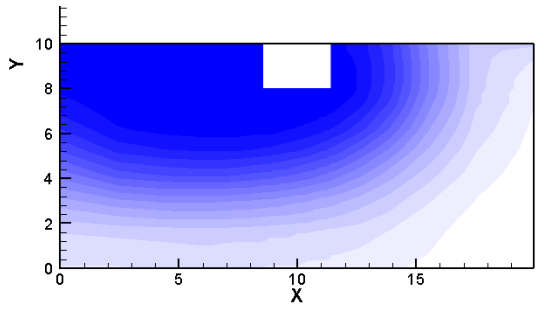

Рис. 2 - Поле концентрации при *T*=20 сут, $k_x = k_y$, $D_x = D_y$

Грунт под гидросооружением может иметь слоистое строение, обусловленное особенностями процесса осадконакопления. В слоистых грунтах фильтрационные свойства в плоскости слоев отличаются от фильтрационных свойств в направлении, перпендикулярном к слоям, т.е. являются анизотропными.

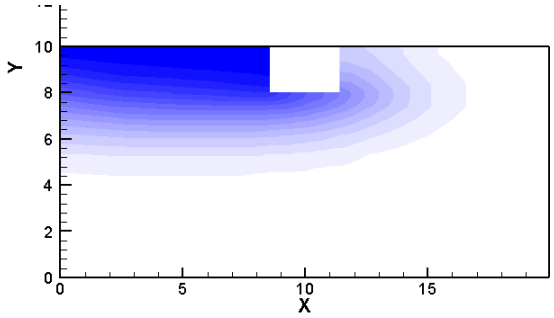

Рис. 3 - Поле концентрации при *T*=20 сут, $k_x \neq k_y$,$D_x \neq D_y$

На рис. 3 приведено поле концентрации, вычисленное при $D_x = 0{,}1$ м^2/сут, $D_y = 0{,}05$ м^2/сут, $k_x = 1{,}0$ м/сут и $k_y = 0{,}1$ м/сут. Из рис. 3 видно что, в вертикальном направлении преобладает диффузионный перенос, а в горизонтальном – конвективный. В этом случае загрязнение доходит до нижнего бьефа за 15 суток, а за 600 суток происходит полное загрязнение.

Далее моделируется процесс распространения загрязнения, когда источником на верхнем бьефе является труба. Результаты расчетов для различных грунтов приведены на рис. 4, 5. При изотропном грунте загрязнение доходит до нижнего бьефа за 15 суток, а при анизотропном – за 25 суток. При анизотропном грунте процесс распространения загрязнения происходит медленнее. Это связано с малым вкладом конвективного переноса в вертикальном направлении на процесс распространения загрязнения.

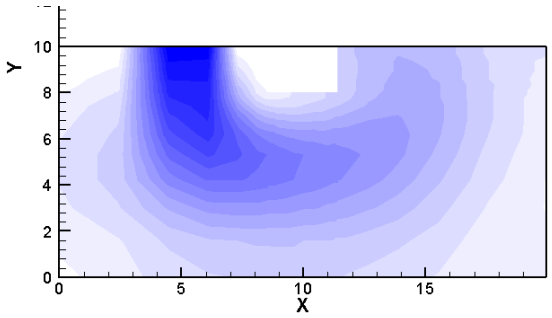

Рис. 4 - Поле концентрации при *T*=30 сут, $k_x = k_y$, $D_x = D_y$

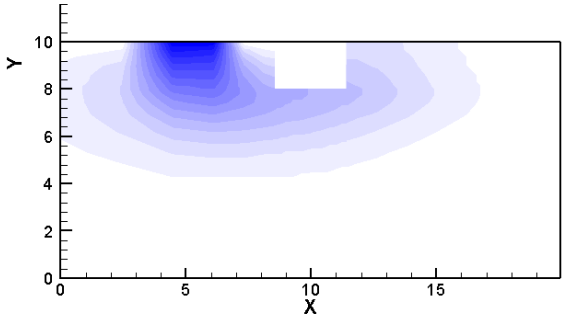

Рис. 5 – Поле концентрации при *T*=30 сут, $k_x \neq k_y$,$D_x \neq D_y$

Вывод

Разработан вычислительный алгоритм для моделирования процесса распространения загрязнения под гидросооружением при изотропном и анизотропном грунтах, а также в зависимости от вида источника загрязнения. Использование неравномерной сетки позволило, не увеличивая количество узлов, получить результаты с точностью достаточной для практики. При этом измельчение шага сетки производилось в районах больших градиентов напора.

Литература

1. А.Н. Зиннатуллина, М.Н. Шамсиев, Е.Г. Шешуков. Численное моделирование процесса распространения загрязнения под гидросооружением // Вестник технологического университета. Т.16 (№1), 257-258 (2013).
2. Я. Бэр, Д. Заславский, С. Ирмей. Физико-математические основы фильтрации воды. М.: Мир, 1971, 451с.
3. В.А. Мироненко. Динамика подземных вод: Учебник. – 3-е изд., стер. Издательство Московского государственного горного университета, Москва, 2001, 519 с.
4. А.А. Самарский. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971, 552 с.

© **А. Н. Зиннатуллина** – ст. препод. каф. прикладной информатики и математики КазГАУ, zinnatullina-alsu@mail.ru;
М. Н. Шамсиев – д-р техн. наук, вед. науч. сотр. Института механики и машиностроения КазНЦ РАН, MShamsiev@yandex.ru;
Р. И. Ибятов – д-р техн. наук, проф. каф. физики и математики КазГАУ, r.ibjatov@mail.ru.