

МОДЕЛИ ТРЕНИЯ В ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКАХ ПРИ ОБТЕКАНИИ РАЗЛИЧНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Ключевые слова: касательное напряжение, перенос импульса, диссипация энергии, динамическая скорость, пограничный слой.

Рассмотрены процессы переноса импульса в турбулентном пограничном слое. Получены оригинальные модели для расчета касательного напряжения, коэффициентов трения, толщины пограничного слоя и коэффициентов переноса импульса в пограничных слоях при различных условиях движения сред. Показаны примеры расчета данных характеристик и согласование с известными экспериментальными данными. Полученные уравнения и методы определения характеристик пограничного слоя могут использоваться при расчетах промышленных тепло- и массообменных аппаратов различных конструкций и другого оборудования.

Keywords: shear stress, momentum transfer, dissipation of energy, dynamic velocity, boundary layer.

The processes of transfer of momentum are considered in a turbulent boundary layer. Obtained the original model for the calculation of the shear stress, the coefficient of friction, the thickness of the boundary layer and the transport coefficients of the impulse (impulsootdachi) in the boundary layers at different conditions of fluid flow. Shows the examples of calculation of these characteristics and agreement with the experimental data. The resulting equations and methods for determination of the boundary layer can be used in the calculation of industrial heat and mass transfer devices of various designs and other equipment

Введение

Теоретические методы моделирования и исследования массо- и теплообменных процессов условно подразделяются на точные, асимптотические, численные и приближенные. В связи с разнообразием конструкций контактных устройств и одновременно происходящих процессов обмена импульсом, массой и теплотой в большинстве задач химической технологии получить точные аналитические решения невозможно, поэтому наибольшее применение получили последние три метода. Так, например, среди различных асимптотических методов применяется метод функциональных параметров. Для этого строится разложение оператора относительно малой шкалы сравнения. Зависимость членов асимптотической последовательности от малого параметра осуществляется с помощью процедуры сращивания. Получаемые асимптотические ряды часто расходятся или очень медленно сходятся. Кроме этого удается вычислить только несколько первых членов разложения. Эти обстоятельства ограничивают использование асимптотических формул для инженерных расчетов.

Для моделирования и исследования процессов теплообмена в химической технологии используются чаще приближенные и численные методы. К приближенным методам относятся, например, однопараметрические интегральные методы в теории пограничного слоя, пленочная и пенетрационная модели, методы линеаризации уравнений и др. Приближенные методы позволяют получать необходимые формулы для выполнения конкретных инженерных расчетов.

В рамках приближенных методов находит применение подход, когда сложное явление заменяют совокупностью «элементарных процессов (актов)». Такими элементарными актами, прежде всего,

являются процессы переноса импульса, массы и тепла в пограничном слое.

Приближенное математическое описание процессов переноса в пограничном слое в первую очередь связано с моделями Прандтля и Кармана, гидродинамической аналогией Рейнольдса и Чилтона-Кальборна и далее моделью диффузионного пограничного слоя Ландау-Левича. Кроме этого важное значение имеют консервативные свойства пограничного слоя – т.е. весьма слабые зависимости некоторых характеристик осредненного течения по отношению к внешним возмущениям, на которые одними из первых обратили внимание С.С. Кутателадзе и А.И. Леонтьев.

В данной статье рассматриваются различные модели пограничного слоя для вычисления напряжения трения и других характеристик на поверхности различных обтекаемых тел при турбулентном режиме. Касательное напряжение трения очень важно при определении коэффициентов гидравлического сопротивления обтекаемых тел, а также при решении тепломассообменных задач с использованием различных вариантов гидродинамической аналогии.

Рассматриваются пограничные слои при движении несжимаемой вязкой жидкости с постоянными физическими свойствами. В статье широко используется понятие коэффициента переноса импульса, которое позволяет получить в аналитическом виде расчетные формулы для коэффициента трения и толщины пограничного слоя. Даны результаты расчета этих характеристик и сравнение с экспериментальными данными.

Определение касательного напряжения трения

Для расчета коэффициентов переноса в тепло- и массообменных аппаратах различных конструкций необходимо определить среднее значение

касательного напряжения на стенке τ_{CT} (или динамической скорости $u_* = \sqrt{\tau_{\text{CT}}/\rho}$), где ρ – плотность среды, кг/м³.

Рассмотрим общий метод определения касательного напряжения трения (локального потока импульса) на стенке – поверхности обтекаемого тела. Пусть ось Oy направлена по нормали к стенке. В этом случае касательное напряжение в любой точке пограничного слоя будет определяться по известному выражению с учетом молекулярного и турбулентного переноса

$$\tau = -\mu \frac{du}{dy} - \mu_T(y) \frac{du}{dy} = -\rho(v + v_T) \frac{du}{dy}, \quad (1)$$

где μ, μ_T – динамическая молекулярная и турбулентная вязкость, Па·с; v, v_T – коэффициенты кинематической молекулярной и турбулентной вязкости, м²/с; du/dy – градиент скорости; y – поперечная координата, м.

Касательное напряжение на стенке, то есть при $y = 0$, может быть выражено, используя уравнение импульсоотдачи (потока импульса) в виде:

$$\tau = -\rho\gamma(u_\infty - u_{\text{CT}}) = \rho\gamma u_\infty, \quad (2)$$

где γ – коэффициент переноса импульса, м/с; u_∞, u_{CT} – скорость в ядре потока и на стенке, м/с. В уравнении (2) учитывая условие прилипания, имеем $u_{\text{CT}} = 0$.

В литературе [1] γ имеет размерность кг/(м²·с). Однако, удобнее в выражении (2) использовать размерность γ – м/с.

Еще в середине XIX столетия изучением процесса трения в трубах занимались сначала Дарси, а потом Фаннинг, которые и ввели понятие о коэффициенте трения

$$C_f = \frac{2\tau_{\text{CT}}}{\rho u_\infty^2} = \frac{2\gamma}{u_\infty}, \quad (3)$$

при $u_\infty = u_{\text{CP}}$, где u_{CP} – средняя скорость потока, м/с.

Запишем значение динамической скорости, используя выражение (2)

$$u_* = \sqrt{\gamma u_\infty}. \quad (4)$$

Рассмотрим подход определения коэффициента переноса импульса.

Введем относительный поток импульса

$\tau^*(y) = \tau(y)/\tau_{\text{CT}}$. Тогда из выражения (1) запишем

$$\frac{\rho \int_{u_{\text{CT}}}^{u_{\text{CP}}} du}{\tau_{\text{CT}}} = \int_0^\delta \frac{\tau^*(y) dy}{v + v_T}, \quad (5)$$

где δ – толщина гидродинамического пограничного слоя, м.

Сравнивая (5) и (2) приходим к следующему выражению для определения коэффициента переноса импульса [3]

$$\gamma = \left[\int_0^\delta \frac{\tau^*(y) dy}{v + v_T(y)} \right]^{-1}. \quad (6)$$

Выражение (6) является достаточно общим и позволяет рассчитать коэффициент переноса импульса на основе известного коэффициента молекулярной вязкости, а также известного характера изменения коэффициента турбулентной вязкости $v_T(y)$ и относительного потока импульса $\tau^*(y)$ в пограничном слое. Применение выражения (6) рассмотрено ниже.

В тех случаях, когда значения C_f неизвестны (например, в аппаратах с вводом внешней энергии в контактирующие фазы), находит применение подход вычисления динамической скорости (касательного напряжения), с использованием средней диссипируемой энергии в единице объема среды [2, 5-7].

Скорость диссипации энергии $\mathcal{E}$ в жидкости, обусловленной вязкостью, при градиенте скорости du/dy записывают в виде [8]

$$\mathcal{E} = \frac{de}{dy} = \tau \frac{du}{dy}, \quad (7)$$

где e – плотность потока энергии, $e = \tau u$; τ – касательное напряжение, Па; u – скорость среды, м/с; y – поперечная координата, м.

Получим значение динамической скорости на основе уравнения (7) и известного характера переноса импульса в турбулентном пограничном слое.

В уравнении (7) значение производной найдем из выражения:

$$\tau = -\rho(v + v_T) \frac{du}{dy}, \quad \frac{du}{dy} = \frac{\tau}{\rho(v + v_T)}, \quad (8)$$

Из (7) и (8) получим:

$$\mathcal{E} = \frac{\tau^2}{\rho(v + v_T)}, \quad v_T = v_T(y). \quad (9)$$

Среднее значение скорости диссипируемой энергии в пограничном слое толщиной δ запишем в виде $\bar{\mathcal{E}} = \tau_{\text{CT}}$:

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{\tau_{\text{CT}}^2}{\delta \rho} \int_0^\delta \frac{dy}{v + v_T(y)}, \quad (10)$$

где подынтегральная функция определяет сопротивление переносу импульса в турбулентном пограничном слое (6), и тогда уравнение (10) получит форму:

$$\bar{\mathcal{E}} = \frac{\tau_{\text{CT}}^2}{\delta \rho \gamma} = \frac{u_*^4 \rho}{\delta \gamma}, \quad (11)$$

Отсюда найдем значение динамической скорости:

$$u_* = \left(\frac{\varepsilon \delta \gamma}{\rho} \right)^{0,25} = \left(\frac{\varepsilon R_\delta \nu \gamma}{\rho} \right)^{0,2} \quad (12)$$

где $R_\delta = u_* \delta / \nu$ – безразмерная толщина пограничного слоя.

По данному выражению можно вычислять u_* (или C_f) для аппаратов с подводом внешней энергии или при обтекании тел сложной геометрии, например, насадочных или зернистых слоев, пучков труб и т.п.

Коэффициенты переноса импульса

В общем случае в выражении (12) коэффициент переноса импульса определим путем интегрирования зависимости (6):

$$\frac{1}{\gamma} = \int_0^\delta \frac{\tau^*(y) dy}{\nu + \nu_T(y)} \quad (13)$$

Для наглядности получим формулу для γ на основе применения относительно простой двухслойной модели пограничного слоя Прандтля. Запишем интеграл (13) в виде сопротивлений переносу импульса в вязком подслое ($\nu_T = 0$) и турбулентной области ($\nu_T = \chi u_* y$)

$$\frac{1}{\gamma} = \int_0^{\delta_1} \frac{dy}{\nu} + \int_{\delta_1}^\delta \frac{dy}{\chi u_* y} \quad (14)$$

получим

$$\gamma = \frac{u_*}{R_1 + \frac{1}{\chi} \ln(R_\delta / R_1)} \quad (15)$$

где $R_\delta = u_* \delta / \nu$ – безразмерная толщина турбулентного пограничного слоя; $R_1 = u_* \delta_1 / \nu = 11,6$ – безразмерная толщина вязкого подслоя на пластине; $\chi = 0,4$ – константа Прандтля.

Далее с применением трехслойной модели Кармана выражение (13) получит вид:

$$\frac{1}{\gamma} = \int_0^{\delta_1} \frac{dy}{\nu} + 5 \int_{\delta_1}^{\delta_2} \frac{dy}{u_* y} + 2,5 \int_{\delta_2}^\delta \frac{dy}{u_* y}, \quad (16)$$

где $\delta_1 = 5\nu / u_*$; $\delta_2 = 30\nu / u_*$.

Первое слагаемое в выражении (16) определяет сопротивление переносу импульса в вязком подслое толщиной δ_1 , второе – в переходной (буферной) области толщиной $\delta_2 - \delta_1$, а третье – в турбулентной области толщиной $\delta - \delta_2$.

Для удобства далее используем безразмерные числа

$$\tilde{R}_1 = \frac{u_* \delta_1}{\nu}; \quad \tilde{R}_2 = \frac{u_* \delta_2}{\nu},$$

где согласно модели Кармана $\tilde{R}_1 = 5$; $\tilde{R}_2 = 30$.

После интегрирования (16) получим

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{\tilde{R}_1}{u_*} + \frac{\tilde{R}_1}{u_*} \ln 6 + \frac{2,5}{u_*} \ln \left(R_\delta / \tilde{R}_2 \right) \quad (17)$$

или

$$\gamma = \frac{u_*}{2,792 \tilde{R}_1 + 2,5 \ln(R_\delta / \tilde{R}_2)} \quad (18)$$

Как известно, в моделях Прандтля и Кармана в вязком подслое $\nu_T = 0$.

Согласно теории Ландау и Левича, подтвержденной Дайслером, турбулентность в вязком подслое описывается функцией [9]

$$\frac{\nu_T}{\nu} = \left(0,124 y^+ \right)^4, \quad \text{при } y^+ \leq 6, \quad (19)$$

тогда после интегрирования аналогичного выражения (16) с $\nu_T(y)$ (19) получим

$$\gamma = \frac{u_*}{2,288 \tilde{R}_1 + 2,5 \ln(R_\delta / \tilde{R}_2)}, \quad (20)$$

где $\tilde{R}_1 = 6$, для плоского пограничного слоя.

Как следует из расчета по выражениям (18) и (20) учет затухания турбулентных пульсаций в вязком подслое в модели Кармана практически слабо влияет на значение коэффициента переноса импульса. Наиболее значительное влияние наблюдается для двухфазных сред [3, 5, 6].

В работах [2,3] выполнено интегрирование выражения (6) с различными функциями турбулентной вязкости в пограничном слое. Например, с функциями $\nu_T(y)$ Owen P. получено:

$$\gamma = \frac{u_*}{11,73 + 2,5 \ln[(0,4 u_* \delta - 3\nu)/(5\nu)]} \quad (21)$$

Или с функциями $\nu_T(y)$ Дайслера и Ханратти

$$\gamma = \frac{u_*}{5,309 + 2,5 \ln R_\delta} \quad (22)$$

Результаты расчета γ для пластины по (15), (18), (20), (21) и (22) согласуются с расхождением $\pm 7\%$.

Ниже показано, что использование данных выражений для коэффициента импульсоотдачи позволяют получить в явном виде ряд важных характеристик турбулентного пограничного слоя.

Толщина пограничного слоя

Локальная и средняя толщина турбулентного пограничного слоя на пластине имеет вид [9]:

$$\delta_x = \frac{0,37x}{Re_x^{0,2}}, \quad \delta = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{0,37x dx}{Re_x^{0,2}} = \frac{0,205L}{Re_L^{0,2}}, \quad (23)$$

где L – длина пластины, м; x – продольная координата; $Re_x = u_\infty x / \nu$; $Re_L = u_\infty L / \nu$.

С применением выражений для γ , толщину пограничного слоя найдем из потокового соотношения (2):

$$\tau_{\text{ст}} = u_*^2 \rho = \rho \gamma \bar{u}_\infty, \quad (24)$$

На основе (24) с учетом коэффициента переноса импульса (22) получено [3]:

$$R_\delta = \exp \left[0,4 \left(\frac{u_\infty}{u_*} - 5,309 \right) \right]. \quad (25)$$

Аналогичные выражения для δ или R_δ можно получить из (24) с коэффициентами γ (15) и (18):

$$R_\delta = R_1 \exp \left[0,4 \left(\frac{u_\infty}{u_*} - R_1 \right) \right], \quad (26)$$

$$R_\delta = \tilde{R}_2 \exp \left[0,4 \left(\frac{u_\infty}{u_*} - \tilde{R}_1 \right) \right], \quad (27)$$

где $\tilde{R}_1 = 5$; $\tilde{R}_2 = 30$; $R_1 = 11,6$.

Выражения (25) - (27) дают практически одинаковые результаты и согласуются с результатами расчета по выражению (23).

Коэффициенты трения

Рассмотрим применение выражений для коэффициентов импульсоотдачи в форме коэффициентов трения.

Из (2) с γ (15) получим динамическую скорость в виде:

$$u_* = \frac{u_\infty}{R_1 + \frac{1}{\chi} \ln(R_\delta / R_1)}. \quad (28)$$

Выражение (28) связывает динамическую скорость трения u_* с характеристиками турбулентного пограничного слоя в двухслойной модели Прандтля $-R_\delta, R_1, \chi$. Расчет u_* по (28) удовлетворительно согласуется с u_* , полученному по выражению (3) $u_* = f(C_f)$.

С использованием выражения (28) можно записать коэффициент трения

$$C_f = 2 \left[R_1 + \frac{1}{\chi} \ln(R_\delta / R_1) \right]^{-2} \quad (29)$$

Аналогично с выражением (18)

$$C_f = 2 \left[2,792 \tilde{R}_1 + 2,5 \ln(R_\delta / \tilde{R}_2) \right]^{-2} \quad (30)$$

и с формулой (22)

$$C_f = 2 \left[5,309 + 2,5 \ln R_\delta \right]^{-2}. \quad (31)$$

На рис. 1,2 представлены результаты расчета по выражению (29) коэффициента трения на пластине и коэффициента сопротивления ($\lambda = 4C_f$) для труб. Расхождение с эксперимен-

тальными данными в пределах 10-15%. Аналогичные результаты дают и выражения (30) и (31).

$C_f \cdot 10^3$

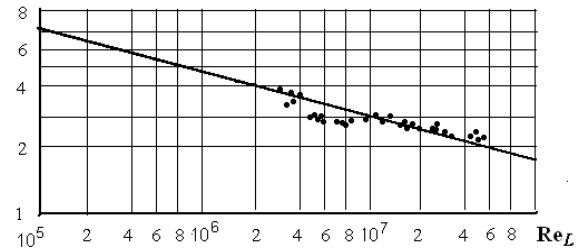


Рис. 1 - Коэффициент сопротивления плоской пластины. Сплошная линия – расчет по (29); точки экспериментальные данные [12]

λ

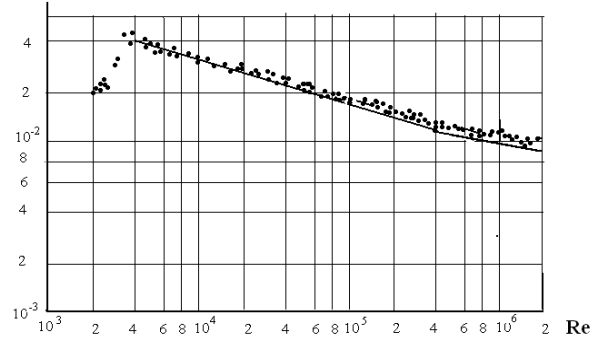


Рис. 2 - Коэффициент сопротивления для гладких круглых труб. Сплошная линия – расчет по (29) ($\lambda = 4C_f$); точки экспериментальные данные [12]

При обтекании тел сложной геометрии можно воспользоваться выражением (12). Получим

$$C_f = \frac{2}{u_\infty^2} \left(\frac{\bar{\varepsilon} R_\delta v \gamma}{\rho} \right)^{0,4}. \quad (32)$$

По данному выражению с R_δ (26) и γ (15) выполнены расчеты для различных случаев турбулентного обтекания поверхностей: шахматных и коридорных пучков труб; зернистых и насадочных слоев; в аппарате с механическими мешалками и в гидроциклоне. Средняя скорость диссипации энергии $\bar{\varepsilon}$ записывается через перепад давления (мощность N)

$$\frac{\bar{\varepsilon}}{V} = \frac{N}{V} = \frac{\Delta p Q}{V} \quad (33)$$

где Q - объемный расход, м³/с.

В результате многочисленных расчетов различного оборудования и обобщения полученных результатов получены выражения

$$C_f = \frac{2A}{u_\infty^2} \left(\frac{\bar{\varepsilon} V}{\rho} \right)^{0,5}, \quad (34)$$

$$u_* = A \left(\frac{\bar{\varepsilon} V}{\rho} \right)^{0,25}, \quad (35)$$

где коэффициент пропорциональности является слабо меняющейся функцией $A = f(Re)$ и с погрешностью $\pm 12\%$ можно принять: $A = 2,0$ – для шахматных и коридорных пучков труб; $A = 1,8$ – для насадочных и зернистых слоев; $A = 2,0$ – для аппаратов с мешалками; $A = 1,55$ – для гидроциклонов.

Выражение (35) соответствуют известной зависимости [7,10,11], где коэффициент A находится экспериментально для каждого типа аппарата и установлен в пределах $A = 1,7 \div 2,4$.

Основные результаты и выводы

Выполненные в данной работе аналитические исследования моделей пограничного слоя и сделанные сопоставления с экспериментальными данными и известными расчетными зависимостями позволяют сделать следующие обобщения и выводы:

1. Для турбулентного режима получено аналитическое выражение (12), где основными параметрами являются средняя скорость диссипации энергии, толщина пограничного слоя и коэффициент переноса импульса.

2. Путем использования моделей Прандтля, Кармана, Ландау, Левича и Дайсслера и интегрирования уравнения (6), получены выражения для коэффициентов переноса для турбулентного режима.

3. На основе баланса импульса в пограничном слое с использованием выражений для коэффициентов переноса импульса получены уравнения (25) – (27) для расчета средней толщины гидродинамического пограничного слоя.

4. Получено обобщенное выражение для коэффициента трения (32) и ряд частных случаев (34) при турбулентном обтекании различных тел.

Приведенные в данной работе уравнения и методы расчета гидромеханических характеристик пограничного слоя могут использоваться в расчетах промышленных тепло- и массообменных аппаратов и другого оборудования в зависимости от решаемых задач [4-7,13,14].

Литература

1. П. Бенедек, А. Ласло Научные основы химической технологии. Под ред. П.Г. Романкова и М.И. Курочкиной. – Изд. «Химия», 1970.376 с.
2. А.Г. Лаптев Модели пограничного слоя и расчет тепломассобменных процессов. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2007.500 с.
3. А.Г. Лаптев, Н.А. Николаев, М.М. Баширов Методы интенсификации и моделирования тепломассообменных процессов. М.: Теплотехник, 2011.287 с.
4. А.Г. Лаптев, Т.М. Фарахов Математические модели переноса импульса в пограничном слое. Инженерно-физический журнал, 86, 3, (2013)
5. С.Г. Дьяконов, В.И. Елизаров, А.Г. Лаптев Теоретические основы и моделирование процессов разделения веществ. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1993.437 с.
6. Л.В. Брагинский, В.И. Бегачев, В.М. Барабаш Перемешивание в жидких средах: физические основы и инженерные методы расчета. Л.: Химия, 1984.389 с.
7. В.Н. Соколов, И.В. Доманский Газожидкостные реакторы. Л.: Машиностроение, 1976.216 с.
8. Л.Д. Ландау, В.М. Лившиц Теоретическая физика: учеб. пособие: в 10 т. Т.6. Гидродинамика. 5-е изд. М.: Физматлит, 2003.560 с.
9. Г. Шлихтинг Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974.714 с.
10. И.В.Доманский, В.Н.Соколов Обобщение различных случаев конвективного теплообмена с помощью полумпирической теории турбулентного переноса. Теор. основы хим. технол., 2, 5, 761–767 (1968).
11. П.П. Ермаков Влияние воздействия акустических колебаний на процесс массопередачи. Теор. основы хим. технол., 25, 2, 198–203 (1991).
12. Г.Н. Абрамович Прикладная газовая динамика. Изд-е 4-е: Главная ред. физико-математической лит-ры изд-ва «Наука», М.,1976. 888с.
13. А.Г. Лаптев, М.М., Баширов, А.И. Фарахова Математическое моделирование разделения тонкодисперсной фазы в гидроциклоне. Вестник Казан. гос. технол. ун-та. 15, 24, 132-134 (2012)
14. А.Г. Лаптев, М.И. Фарахов Энергоэффективное оборудование разделения и очистки веществ в химической технологии. Вестник Казан. гос. технол. ун-та, 9, 152-158, (2011)