

А. П. Кирпичников, А. С. Титовцев

ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ПОЛИКОМПОНЕНТНЫХ ПОТОКОВ

Ключевые слова: Система массового обслуживания, система дифференцированного обслуживания, поликомпонентный поток требований, очередь.

В работе выполнена математическая формализация числовых характеристик стационарного режима функционирования открытых систем массового обслуживания с поликомпонентным входным потоком и множеством ограничений на длину очереди.

Keywords: queuing system, system of difference service, polycomponent flow of requirements, queue.

In the work we performed mathematical formalization of numerical characteristics of stationary mode of functioning of open queuing systems with a polycomponent input stream and a great number of restrictions on the length of the queue.

В опубликованном цикле работ авторов [1 - 13] было введено понятие открытых систем дифференцированного обслуживания поликомпонентных потоков, являющихся комбинациями систем массового обслуживания (СМО) различных типов, в частности, многолинейной классической СМО, СМО с отказами и СМО с очередью конечной длины, а также исследованы основные характеристики стационарных режимов систем массового обслуживания такого типа. Напомним, что при этом рассматриваемая СМО имеет m обслуживающих устройств и входной поток требований, содержащий заявки нескольких типов:

- 0-й тип – заявки, которые обслуживаются только при наличии свободного обслуживающего устройства и никогда не становятся в очередь. В случае, если на момент поступления в систему очередной подобной заявки в системе не оказывается свободного обслуживающего устройства, данная заявка покидает систему необслуженной.

- 1-й тип – заявки, которые обслуживаются при наличии свободного обслуживающего устройства, либо становятся в очередь, если число требований в очереди меньше определённого числа ε_1 . В случае,

когда в очереди уже имеется ε_1 или более требований, вновь поступившая заявка 1-го типа получает отказ и выбывает из системы необслуженной;

- 2-й тип – заявки, которые обслуживаются при наличии свободного обслуживающего устройства, либо становятся в очередь, если число требований в очереди меньше определённого числа ε_2 . В случае,

когда в очереди уже имеется ε_2 или более требований, вновь поступившая заявка 2-го типа получает отказ и выбывает из системы необслуженной, и т.д.;

- h -й тип – заявки, которые обслуживаются при наличии свободного обслуживающего устройства, либо становятся в очередь, если число требований в очереди меньше определённого числа ε_h . В случае,

когда в очереди уже имеется ε_h или более требований, вновь поступившая заявка h -го типа получает отказ и выбывает из системы необслуженной.

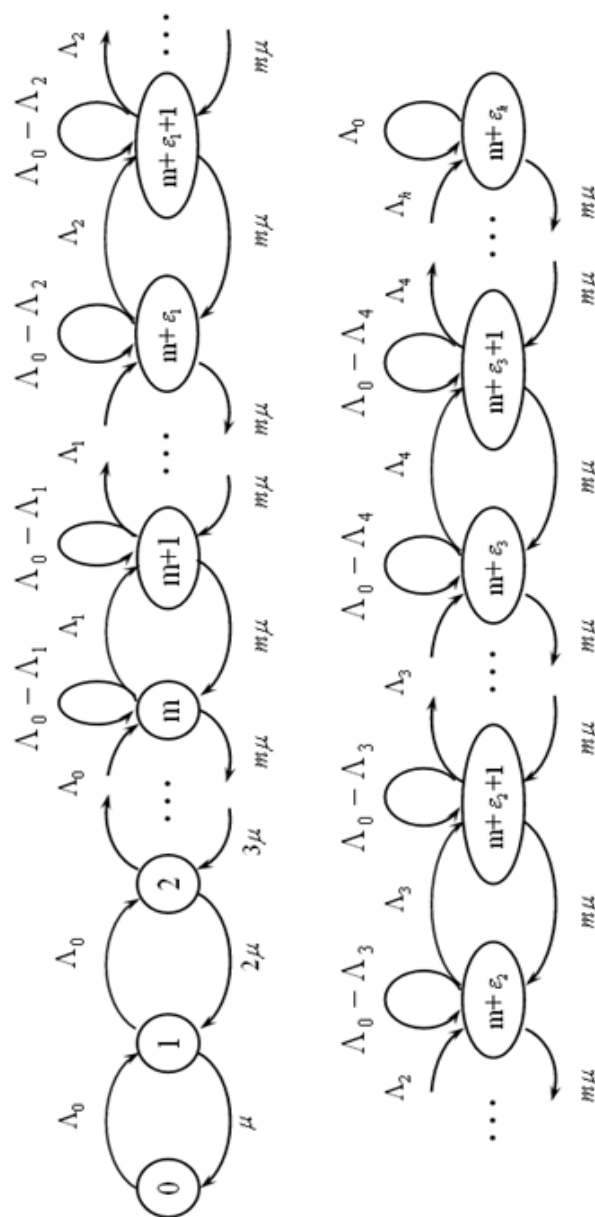


Рис. 1 - Граф состояний и переходов СМО

В работах [5, 6] потоки заявок такого рода было предложено называть поликомпонентными, а системы, обслуживающие каждый тип заявок по отдельным правилам, - системами дифференциро-

ванного обслуживания поликомпонентных потоков. Граф состояний и переходов такой СМО приведен на рис.1.

Принятые обозначения:

$$\varepsilon_0 = E_0 = 0; \quad \varepsilon_1 = E_1; \quad \varepsilon_2 = E_1 + E_2; \dots$$

$$\varepsilon_j = \sum_{i=0}^j E_i = \sum_{i=1}^j E_i \text{ - ограничения длины очереди}$$

для заявок j-го типа;

$$\Lambda_0 = \sum_{j=0}^h \lambda_j; \quad \Lambda_1 = \sum_{j=1}^h \lambda_j; \quad \Lambda_2 = \sum_{j=2}^h \lambda_j; \dots$$

$\Lambda_h = \lambda_h$; где λ_j - интенсивности потоков заявок j-го типа;

$$R_0 = \sum_{j=0}^h \rho_j; \quad R_1 = \sum_{j=1}^h \rho_j; \quad R_2 = \sum_{j=2}^h \rho_j; \dots$$

$$R_h = \rho_h; \quad R_i = \frac{\Lambda_i}{\mu}, \text{ где } \rho_j \text{ - приведенные интен-}$$

сивности потоков заявок j-го типа.

Потоки заявок каждого типа, образующие поликомпонентный поток, являются простейшими и имеют интенсивности λ_j , следовательно, суммарные поликомпонентные потоки с интенсивностями Λ_j также являются простейшими (пуассоновскими) [14]. Среднюю интенсивность обслуживания заявок одним обслуживающим устройством обозначим как μ . В этом случае интенсивность выходного потока обслуженных заявок до m -го состояния кратна μ и зависит от числа занятых каналов. После m -го состояния интенсивность потока обслуженных заявок равна $m\mu$. Поток обслуженных заявок также носит простейший характер.

С учетом принятых обозначений и допущений получим непрерывную марковскую цепь, граф состояний которой приведен на рис. 1. С учетом формул [10], полученных для вероятностей стационарных состояний по методике, предложенной в монографиях [15, 16], найдем общую зависимость различных числовых характеристик от параметров входного потока заявок в стационарном режиме работы системы.

Среднее число заявок, находящихся под обслуживанием:

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \sum_{i=1}^{m-1} iP_i + m \sum_{i=m}^{m+\varepsilon_h} P_i = \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \frac{R_0^i}{(i-1)!} P_0 + m \sum_{i=1}^h P_{Bi} + m P_{m+\varepsilon_h} = \\ &= R_0 P_0 e_{m-2}(R_0) + m(P_{ож} + P_{отк}) = \\ &= R_0 P_0 e_{m-2}(R_0) + m \left(\sum_{i=1}^h P_{Bi} + P_{m+\varepsilon_h} \right). \end{aligned}$$

Осреднённый квадрат числа заявок, находящихся под обслуживанием:

$$\begin{aligned} \overline{n^2} &= \sum_{i=1}^{m-1} i^2 P_i + m^2 \sum_{i=m}^{m+\varepsilon_h} P_i = \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} i^2 \frac{R_0^i}{i!} P_0 + m^2 \sum_{i=m}^{m+\varepsilon_h} P_i = \\ &= R_0 P_0 \sum_{i=1}^{m-1} i \frac{R_0^{i-1}}{(i-1)!} + m^2 \sum_{i=m}^{m+\varepsilon_h} P_i = \\ &= R_0 P_0 \left(R_0 \sum_{i=1}^{m-1} \frac{R_0^{i-2}}{(i-2)!} + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{R_0^{i-1}}{(i-1)!} \right) + m^2 \sum_{i=m}^{m+\varepsilon_h} P_i = \\ &= R_0 P_0 e_{m-2}(R_0) + R_0^2 P_0 e_{m-3}(R_0) + \\ &+ m^2 \left(\sum_{i=1}^h P_{Bi} + P_{m+\varepsilon_h} \right). \end{aligned}$$

Средняя длина очереди:

$$\begin{aligned} \bar{l} &= \sum_{i=1}^h \left\{ \frac{R_i}{m-R_i} [P_{Bi} - E_i P_{m+\varepsilon_i}], \quad R_i \neq m \right\} + \\ &+ \sum_{i=2}^h \varepsilon_{i-1} \frac{R_i}{m} P_{Bi}. \end{aligned}$$

Осреднённый квадрат длины очереди:

$$\begin{aligned} \bar{l}^2 &= \sum_{i=1}^h \left[\varepsilon_{i-1}^2 P_{Bi} + \left\{ \frac{R_i}{m-R_i} \left(\frac{m+R_i}{m-R_i} + 2\varepsilon_{i-1} \right) P_{Bi} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \frac{mE_i}{m-R_i} \left(E_i + \frac{2R_i}{m-R_i} + 2\varepsilon_{i-1} \right) P_{m+\varepsilon_i}, \quad R_i \neq m \right\} + \right. \\ &\left. R_i = m \right] + \\ &+ \varepsilon_h^2 P_{m+\varepsilon_h}. \end{aligned}$$

Полный вывод последних двух характеристик приводится в работах [12-13].

Среднее число заявок, находящихся в системе в целом (как в очереди, так и под обслуживанием):

$$\begin{aligned} \bar{k} &= \bar{n} + \bar{l} = R_0 P_0 e_{m-2}(R_0) + m \left(\sum_{i=1}^h P_{Bi} + P_{m+\varepsilon_h} \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^h \left\{ \frac{R_i}{m-R_i} [P_{Bi} - E_i P_{m+\varepsilon_i}], \quad R_i \neq m \right\} + \\ &+ \sum_{i=1}^h \left\{ \frac{E_i(E_i+1)}{2} P_{m+\varepsilon_{i-1}}, \quad R_i = m \right\} + \\ &+ \sum_{i=2}^h \varepsilon_{i-1} \frac{R_i}{m} P_{Bi} = R_0 P_0 e_{m-2}(R_0) + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{i=1}^h \left\{ \left[\frac{R_i}{m-R_i} [P_{Bi} - E_i P_{m+\varepsilon_i}], \quad R_i \neq m \right] + \left[\frac{E_i(E_i+1)}{2} P_{m+\varepsilon_{i-1}}, \quad R_i = m \right] \right\} +$$

$$+ \left(m + \varepsilon_{i-1} \frac{R_i}{m} \right) P_{Bi} \Big] + m P_{m+\varepsilon_h}.$$

Ковариация числа требований, находящихся под обслуживанием, и числа требований в очереди:

$$\text{cov}(n, l) = \bar{n}l - \bar{n}\bar{l} = \sum_{i=m+1}^{\infty} m(i-m)P_i - \bar{n}\bar{l} =$$

$$= m \sum_{i=m+1}^{\infty} (i-m)P_i - \bar{n}\bar{l} = m\bar{l} - \bar{n}\bar{l}.$$

Дисперсия числа требований в системе в целом:

$$\sigma_k^2 = \sigma_n^2 + \sigma_l^2 + 2\text{cov}(n, l) =$$

$$= \bar{n}^2 - \bar{n}^2 + \bar{l}^2 - \bar{l}^2 + 2m\bar{l} - 2\bar{n}\bar{l} =$$

$$= \bar{n}^2 + \bar{l}^2 + 2m\bar{l} - (\bar{n}^2 + \bar{l}^2 + 2\bar{n}\bar{l}) =$$

$$= (\bar{n} + \bar{l})^2 - (\bar{n} + \bar{l})^2 = \bar{k}^2 - \bar{k}^2.$$

Тогда, осреднённый квадрат числа требований, находящихся в системе в целом, равен

$$\bar{k}^2 = \bar{n}^2 + \bar{l}^2 + 2m\bar{l} = R_0 P_0 e_{m-2}(R_0) +$$

$$+ R_0^2 P_0 e_{m-3}(R_0) + m^2 \left(\sum_{i=1}^h P_{Bi} + P_{m+\varepsilon_h} \right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^h \left[\varepsilon_{i-1}^2 P_{Bi} + \left\{ \frac{R_i}{m-R_i} \left(\frac{m+R_i}{m-R_i} + 2\varepsilon_{i-1} \right) P_{Bi} - \right. \right.$$

$$\left. \left(E_i - 1 \right) E_i \left(\frac{2E_i - 1}{6} + \varepsilon_{i-1} \right) P_{m+\varepsilon_i}, \quad R_i \neq m \right\} +$$

$$\left. - \frac{mE_i}{m-R_i} \left(E_i + \frac{2R_i}{m-R_i} + 2\varepsilon_{i-1} \right) P_{m+\varepsilon_i}, \quad R_i = m \right] +$$

$$+ \varepsilon_h^2 P_{m+\varepsilon_h} +$$

$$+ 2m \sum_{i=1}^h \left\{ \left[\frac{R_i}{m-R_i} [P_{Bi} - E_i P_{m+\varepsilon_i}], \quad R_i \neq m \right] + \left[\frac{E_i(E_i+1)}{2} P_{m+\varepsilon_{i-1}}, \quad R_i = m \right] \right\} +$$

$$+ \varepsilon_{i-1} \frac{R_i}{m} P_{Bi} \Big] =$$

$$= R_0 P_0 e_{m-2}(R_0) + R_0^2 P_0 e_{m-3}(R_0) +$$

$$+ \sum_{i=1}^h \left\{ \left[\frac{R_i}{m-R_i} \left(\frac{m+R_i}{m-R_i} + 2\varepsilon_{i-1} + 2m \right) P_{Bi} - \right. \right.$$

$$\left. E_i \left[(E_i - 1) \left(\frac{2E_i - 1}{6} + \varepsilon_{i-1} \right) + \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{mE_i}{m-R_i} \left(E_i + \frac{2R_i}{m-R_i} + 2\varepsilon_{i-1} + 2R_i \right) P_{m+\varepsilon_i}, \quad R_i \neq m \right] + \right.$$

$$\left. \left. + (E_i + 1)m \right] P_{m+\varepsilon_i}, \quad R_i = m \right\} +$$

$$+ (\varepsilon_{i-1}^2 + 2\varepsilon_{i-1}R_i + m^2) P_{Bi} \Big] + (\varepsilon_h^2 + m^2) P_{m+\varepsilon_h}.$$

Результаты расчётов, полученные в настоящей работе, продолжают цикл результатов, опубликованных ранее в работах [1 - 13] и могут быть полезны при проектировании и эксплуатации широкого класса объектов и систем, работающих по принципу систем и сетей массового обслуживания.

Литература

1. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, 4, 78-85 (2006);
2. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Обозрение прикл. и промышл. матем.*, 14, 5, 893-896 (2007);
3. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Обозрение прикл. и промышл. матем.*, 15, 6, 1090-1091 (2008);
4. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, 5, С. 154-161 (2011);
5. А.С. Титовцев, Дисс. канд. техн. наук, КНИТУ, Казань, 2011. 143 с.;
6. А.С. Титовцев, *Системы дифференцированного обслуживания поликомпонентных потоков. Модели и характеристики*. Saarbrücken, LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2012. 132 с.;
7. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, 15, 1, С. 148-152 (2012);
8. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, 15, 6, С. 201-202 (2012);
9. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, 15, 8, С. 337-340 (2012);
10. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, 16, 6, С. 248-252 (2013);
11. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Наука в Центральной России*, 4, С. 5-8 (2013);
12. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, 16, 11, С. 255-257 (2013);
13. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, 16, 18, С. 282-286 (2013);
14. А.Я. Хинчин, *Работы по математической теории массового обслуживания*. М., ГИФМЛ, 1963. 236 с.;
15. А.П. Кирпичников, *Прикладная теория массового обслуживания*. Казань, Изд-во Казанского гос. ун-та, 2008. 112 с.;
16. А.П. Кирпичников, *Методы прикладной теории массового обслуживания*. Казань, Изд-во Казанского университета, 2011. 200 с.