

А. П. Кирпичников, А. С. Титовцев

РАСЧЕТ ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ В СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ ПОЛИКОМПОНЕНТНЫХ ПОТОКОВ

Ключевые слова: Система массового обслуживания, система дифференцированного обслуживания, поликомпонентный поток требований, очередь.

В работе представлен алгоритм расчёта функции распределения времени ожидания в открытых системах массового обслуживания с поликомпонентным входным потоком и множеством ограничений на длину очереди в стационарном режиме функционирования.

Keywords: queuing system, system of difference service, polycomponent flow of requirements, queue.

This paper presents an algorithm of the calculation of the distribution function of the waiting time in the open systems of mass service with a polycomponent input stream and a great number of restrictions on the length of the queue in the stationary mode of functioning.

В опубликованном к настоящему времени работах авторов [1 - 14] было введено понятие открытых систем дифференцированного обслуживания поликомпонентных потоков, являющихся комбинациями известных систем массового обслуживания (СМО) различных типов, к которым относятся, в частности, многоканальная классическая СМО, СМО с отказами и СМО с очередью конечной длины. В этих работах авторами были впервые исследованы основные характеристики стационарного режима комбинированных систем массового обслуживания такого типа. Настоящая публикация продолжает начатый цикл исследований.

Напомним, что при этом рассматриваемая нами СМО имеет m обслуживающих устройств и входной поток требований, содержащий заявки нескольких различных типов:

- 0-й тип – заявки, которые обслуживаются только при наличии свободного обслуживающего устройства и никогда не становятся в очередь. В случае, если на момент поступления в систему очередной подобной заявки в системе не оказывается свободного обслуживающего устройства, данная заявка покидает систему необслуженной.

- 1-й тип – заявки, которые обслуживаются при наличии свободного обслуживающего устройства, либо становятся в очередь, если число требований в очереди меньше определённого числа ε_1 . В случае,

когда в очереди уже имеется ε_1 или более требований, вновь поступившая заявка 1-го типа получает отказ и выбывает из системы необслуженной;

- 2-й тип – заявки, которые обслуживаются при наличии свободного обслуживающего устройства, либо становятся в очередь, если число требований в очереди меньше определённого числа ε_2 . В случае,

когда в очереди уже имеется ε_2 или более требований, вновь поступившая заявка 2-го типа получает отказ и выбывает из системы необслуженной, и т.д.;

- h -й тип – заявки, которые обслуживаются при наличии свободного обслуживающего устройства,

либо становятся в очередь, если число требований в

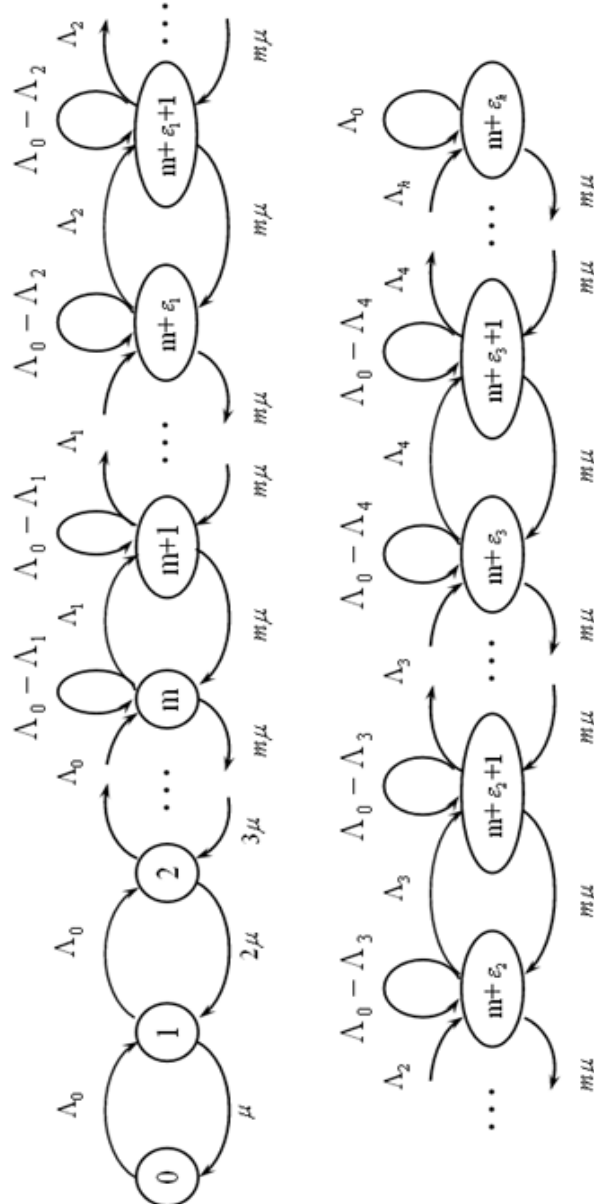


Рис. 1 - Граф состояний и переходов СМО

очереди меньше определённого числа ε_h . В случае, когда в очереди уже имеется ε_h или более требова-

ний, вновь поступившая заявка h -го типа получает отказ и выбывает из системы необслуженной.

Потоки заявок такого рода получили название поликомпонентных, а системы, обслуживающие каждый тип заявок по отдельным правилам, - название систем дифференцированного обслуживания поликомпонентных потоков [5, 6]. Граф состояний и переходов такой СМО приведён на рис.1.

Принятые обозначения:

$$\varepsilon_0 = E_0 = 0; \quad \varepsilon_1 = E_1; \quad \varepsilon_2 = E_1 + E_2; \dots$$

$$\varepsilon_j = \sum_{i=0}^j E_i = \sum_{i=1}^j E_i \quad \text{- ограничения длины очереди}$$

для заявок j -го типа;

$$\Lambda_0 = \sum_{j=0}^h \lambda_j; \quad \Lambda_1 = \sum_{j=1}^h \lambda_j; \quad \Lambda_2 = \sum_{j=2}^h \lambda_j; \dots$$

$\Lambda_h = \lambda_h$; где λ_j - интенсивности потоков заявок j -го типа;

$$R_0 = \sum_{j=0}^h \rho_j; \quad R_1 = \sum_{j=1}^h \rho_j; \quad R_2 = \sum_{j=2}^h \rho_j; \dots$$

$$R_h = \rho_h; \quad R_i = \frac{\Lambda_i}{\mu}, \quad \text{где } \rho_j \text{ - приведенные интен-}$$

сивности потоков заявок j -го типа.

Потоки заявок каждого типа, образующие поликомпонентный поток, являются простейшими и имеют интенсивности λ_j , суммарные поликомпонентные потоки с интенсивностями Λ_j также являются простейшими (пуассоновскими) [15]. Среднюю интенсивность обслуживания заявок одним обслуживающим устройством обозначим символом μ . В этом случае интенсивность выходного потока обслуженных заявок до m -го состояния кратна μ и зависит от числа занятых каналов. После m -го состояния интенсивность потока обслуженных заявок равна $m\mu$. Поток обслуженных заявок также носит простейший характер.

С учётом принятых обозначений и допущений получим непрерывную марковскую цепь, граф состояний которой приведен на рис. 1. С учетом формул [10], полученных для вероятностей стационарных состояний по методике [16, 17], а также числовых характеристик установившегося режима, найденных в работах [12, 14], можно определить общую зависимость функции распределения времени ожидания обслуживания вновь прибывшей заявки от параметров входного потока заявок в стационарном режиме работы системы при помощи следующих соображений.

В рассматриваемой нами системе массового обслуживания очередь возможна только тогда, когда заняты все обслуживающие устройства. При этом суммарный поток обслуженных заявок всей системы складывается из потоков обслуживания каждого канала и имеет интенсивность $m\mu$. В этом случае вероятность того, что при наличии очереди

за время t системой обслужено i заявок, запишется в виде

$$B_i(t) = \frac{(m\mu t)^i}{i!} e^{-m\mu t}.$$

Найдём функцию распределения времени ожидания обслуживания одной заявкой. По определению

$$F_{ож}(t) = P(t_{ож} < t),$$

где $t_{ож}$ - время ожидания обслуживания (случайная величина), но тогда

$$F_{ож}(t) = 1 - P(t_{ож} \geq t),$$

где $P(t_{ож} \geq t)$ - вероятность того, что время ожидания в очереди для одной заявки больше некоторого наперёд заданного времени t . Это возможно, во-первых, в том случае, когда вновь прибывшая в систему заявка находит все обслуживающие устройства занятыми, а за время t ни одно из устройств не освобождается, то есть очередь пуста и за время t система не успевает обслужить ни одной заявки. Во-вторых, если в очереди имеется одна заявка и за время t системой обслуживается не более одной заявки, либо же в очереди имеются две заявки и за время t системой обслуживается не более двух заявок и так далее. По формуле полной вероятности отсюда имеем:

$$\begin{aligned} q[1 - F_{ож}(t)] &= \frac{\Lambda_1}{\Lambda} \{ P_m B_0(t) + \\ &+ P_{m+1} [B_0(t) + B_1(t)] + \\ &+ P_{m+2} [B_0(t) + B_1(t) + B_2(t)] + \dots + \\ &+ P_{m+\varepsilon_1-1} [B_0(t) + \dots + B_{\varepsilon_1-1}(t)] \} + \\ &+ \frac{\Lambda_2}{\Lambda} \{ P_{m+\varepsilon_1} [B_0(t) + B_1(t) + \dots + B_{\varepsilon_1}(t)] + \\ &+ P_{m+\varepsilon_1+1} [B_0(t) + B_1(t) + \dots + B_{\varepsilon_1+1}(t)] + \dots + \\ &+ P_{m+\varepsilon_2-1} [B_0(t) + B_1(t) + \dots + B_{\varepsilon_2-1}(t)] \} + \\ &+ \frac{\Lambda_3}{\Lambda} \{ P_{m+\varepsilon_2} [B_0(t) + B_1(t) + \dots + B_{\varepsilon_2}(t)] + \\ &+ P_{m+\varepsilon_2+1} [B_0(t) + B_1(t) + \dots + B_{\varepsilon_2+1}(t)] + \dots + \\ &+ P_{m+\varepsilon_3-1} [B_0(t) + B_1(t) + \dots + B_{\varepsilon_3-1}(t)] \} + \dots + \\ &+ \frac{\Lambda_h}{\Lambda} \{ P_{m+\varepsilon_{h-1}} [B_0(t) + B_1(t) + \dots + B_{\varepsilon_{h-1}}(t)] + \\ &+ P_{m+\varepsilon_{h-1}+1} [B_0(t) + B_1(t) + \dots + B_{\varepsilon_{h-1}+1}(t)] + \dots + \\ &+ P_{m+\varepsilon_h-1} [B_0(t) + B_1(t) + \dots + B_{\varepsilon_h-1}(t)] \} = \\ &= \frac{\Lambda_1}{\Lambda} \left[B_0(t) \sum_{i=m}^{m+\varepsilon_1-1} P_i + B_1(t) \sum_{i=m+1}^{m+\varepsilon_1-1} P_i + \dots + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + B_{\varepsilon_1-1}(t) P_{m+\varepsilon_1-1} \Big] + \\
& + \frac{\Lambda_2}{\Lambda} \left[\sum_{i=0}^{\varepsilon_1} B_i(t) \sum_{i=m+\varepsilon_1}^{m+\varepsilon_2-1} P_i + B_{\varepsilon_1+1}(t) \sum_{i=m+\varepsilon_1+1}^{m+\varepsilon_2-1} P_i + \dots + \right. \\
& + B_{\varepsilon_2-1}(t) P_{m+\varepsilon_2-1} \Big] + \\
& + \frac{\Lambda_3}{\Lambda} \left[\sum_{i=0}^{\varepsilon_2} B_i(t) \sum_{i=m+\varepsilon_2}^{m+\varepsilon_3-1} P_i + B_{\varepsilon_2+1}(t) \sum_{i=m+\varepsilon_2+1}^{m+\varepsilon_3-1} P_i + \dots + \right. \\
& + B_{\varepsilon_3-1}(t) P_{m+\varepsilon_3-1} \Big] + \dots + \\
& + \frac{\Lambda_h}{\Lambda} \left[\sum_{i=0}^{\varepsilon_{h-1}} B_i(t) \sum_{i=m+\varepsilon_{h-1}}^{m+\varepsilon_h-1} P_i + B_{\varepsilon_{h-1}+1}(t) \sum_{i=m+\varepsilon_{h-1}+1}^{m+\varepsilon_h-1} P_i + \dots + \right. \\
& + B_{\varepsilon_h-1}(t) P_{m+\varepsilon_h-1} \Big].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=m}^{m+\varepsilon_1-1} P_i &= \frac{R^m}{m!} P_0 \left[1 + \frac{R_1}{m} + \left(\frac{R_1}{m} \right)^2 + \dots + \left(\frac{R_1}{m} \right)^{\varepsilon_1-1} \right] = \\
&= \frac{R^m}{m!} P_0 \frac{1 - \left(\frac{R_1}{m} \right)^{\varepsilon_1}}{1 - \frac{R_1}{m}};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=m+1}^{m+\varepsilon_1-1} P_i &= \frac{R_1}{m} \frac{R^m}{m!} P_0 \left[1 + \frac{R_1}{m} + \dots + \left(\frac{R_1}{m} \right)^{\varepsilon_1-2} \right] = \\
&= \frac{R^m}{m!} P_0 \frac{\frac{R_1}{m} - \left(\frac{R_1}{m} \right)^{\varepsilon_1}}{1 - \frac{R_1}{m}};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=m+2}^{m+\varepsilon_1-1} P_i &= \left(\frac{R_1}{m} \right)^2 \frac{R^m}{m!} P_0 \left[1 + \frac{R_1}{m} + \dots + \left(\frac{R_1}{m} \right)^{\varepsilon_1-3} \right] = \\
&= \frac{R^m}{m!} P_0 \frac{\left(\frac{R_1}{m} \right)^2 - \left(\frac{R_1}{m} \right)^{\varepsilon_1}}{1 - \frac{R_1}{m}};
\end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned}
P_{m+\varepsilon_1-1} &= \left(\frac{R_1}{m} \right)^{\varepsilon_1-1} \frac{R^m}{m!} P_0 = \\
&= \frac{R^m}{m!} P_0 \frac{\left(\frac{R_1}{m} \right)^{\varepsilon_1-1} - \left(\frac{R_1}{m} \right)^{\varepsilon_1}}{1 - \frac{R_1}{m}},
\end{aligned}$$

тогда

$$B_0(t) \sum_{i=m}^{m+\varepsilon_1-1} P_i + B_1(t) \sum_{i=m+1}^{m+\varepsilon_1-1} P_i + \dots +$$

$$\begin{aligned}
& + B_{\varepsilon_1-1}(t) P_{m+\varepsilon_1-1} = e^{-m\mu t} \frac{R^m}{m!} P_0 \frac{1}{1 - \frac{R_1}{m}} \times \\
& \times \left\{ 1 - \left(\frac{R_1}{m} \right)^{\varepsilon_1} + \frac{m\mu t}{1!} \left[\frac{R_1}{m} - \left(\frac{R_1}{m} \right)^{\varepsilon_1} \right] + \right. \\
& + \frac{(m\mu t)^2}{2!} \left[\left(\frac{R_1}{m} \right)^2 - \left(\frac{R_1}{m} \right)^{\varepsilon_1} \right] + \dots + \\
& + \frac{(m\mu t)^{\varepsilon_1-1}}{(\varepsilon_1-1)!} \left[\left(\frac{R_1}{m} \right)^{\varepsilon_1-1} - \left(\frac{R_1}{m} \right)^{\varepsilon_1} \right] \Big\} = \\
& = e^{-m\mu t} \frac{R^m}{m!} P_0 \frac{1}{1 - \frac{R_1}{m}} \times \\
& \times \left\{ e_{\varepsilon_0}(m\mu t) \left[1 - \left(\frac{R_1}{m} \right)^{\varepsilon_1} \right] + \right. \\
& + \frac{(m\mu t)^{\varepsilon_0+1}}{(\varepsilon_0+1)!} \left[\frac{R_1}{m} - \left(\frac{R_1}{m} \right)^{\varepsilon_1} \right] + \dots + \\
& + \frac{(m\mu t)^{\varepsilon_1-1}}{(\varepsilon_1-1)!} \left[\left(\frac{R_1}{m} \right)^{\varepsilon_1-1} - \left(\frac{R_1}{m} \right)^{\varepsilon_1} \right] \Big\} = \\
& = e^{-m\mu t} \frac{R^m}{m!} P_0 \frac{1}{1 - \frac{R_1}{m}} \left[e_{\varepsilon_0}(m\mu t) + \right. \\
& + \frac{e_{\varepsilon_1-1}(R_1\mu t) - e_{\varepsilon_0}(R_1\mu t)}{\left(\frac{R_1}{m} \right)^{\varepsilon_0}} - e_{\varepsilon_1-1}(m\mu t) \left(\frac{R_1}{m} \right)^{\varepsilon_1} \Big] = \\
& = e^{-m\mu t} \frac{R^m}{m!} P_0 \frac{1}{1 - \frac{R_1}{m}} \times \\
& \times \left[e_{\varepsilon_1-1}(R_1\mu t) - \left(\frac{R_1}{m} \right)^{\varepsilon_1} e_{\varepsilon_1-1}(m\mu t) \right]. \\
& \sum_{i=m+\varepsilon_1}^{m+\varepsilon_2-1} P_i = \left(\frac{R_1}{m} \right)^{\varepsilon_1} \frac{R^m}{m!} P_0 \left[1 + \frac{R_2}{m} + \dots + \left(\frac{R_2}{m} \right)^{\varepsilon_2-1} \right] = \\
& = \left(\frac{R_1}{m} \right)^{\varepsilon_1} \frac{R^m}{m!} P_0 \frac{1 - \left(\frac{R_2}{m} \right)^{\varepsilon_2}}{1 - \frac{R_2}{m}};
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=m+\varepsilon_1+1}^{m+\varepsilon_2-1} P_i = \frac{R_2}{m} \left(\frac{R_1}{m} \right)^{E_1} \frac{R^m}{m!} P_0 \left[1 + \frac{R_2}{m} + \dots + \left(\frac{R_2}{m} \right)^{E_2-2} \right] = \left(\frac{R_1}{m} \right)^{E_1} \frac{R^m}{m!} P_0 \frac{\frac{R_2}{m} - \left(\frac{R_2}{m} \right)^{E_2}}{1 - \frac{R_2}{m}};$$

$$\sum_{i=m+\varepsilon_1+2}^{m+\varepsilon_2-1} P_i = \left(\frac{R_1}{m} \right)^{E_1} \frac{R^m}{m!} P_0 \frac{\left(\frac{R_2}{m} \right)^2 - \left(\frac{R_2}{m} \right)^{E_2}}{1 - \frac{R_2}{m}};$$

⋮

$$P_{m+\varepsilon_2-1} = \left(\frac{R_2}{m} \right)^{E_2-1} \left(\frac{R_1}{m} \right)^{E_1} \frac{R^m}{m!} P_0 = \left(\frac{R_1}{m} \right)^{E_1} \frac{R^m}{m!} P_0 \frac{\left(\frac{R_2}{m} \right)^{E_2-1} - \left(\frac{R_2}{m} \right)^{E_2}}{1 - \frac{R_2}{m}},$$

тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\varepsilon_1} B_i(t) \sum_{i=m+\varepsilon_1}^{m+\varepsilon_2-1} P_i + B_{\varepsilon_1+1}(t) \sum_{i=m+\varepsilon_1+1}^{m+\varepsilon_2-1} P_i + \dots + \\ & + B_{\varepsilon_2-1}(t) P_{m+\varepsilon_2-1} = e^{-m\mu t} \left(\frac{R_1}{m} \right)^{E_1} \frac{R^m}{m!} P_0 \frac{1}{1 - \frac{R_2}{m}} \times \\ & \times \left\{ e_{\varepsilon_1}(m\mu t) \left[1 - \left(\frac{R_2}{m} \right)^{E_2} \right] + \right. \\ & + \frac{(m\mu t)^{\varepsilon_1+1}}{(\varepsilon_1+1)!} \left[\frac{R_2}{m} - \left(\frac{R_2}{m} \right)^{E_2} \right] + \\ & + \frac{(m\mu t)^{\varepsilon_1+2}}{(\varepsilon_1+2)!} \left[\left(\frac{R_2}{m} \right)^2 - \left(\frac{R_2}{m} \right)^{E_2} \right] + \dots + \\ & + \left. \frac{(m\mu t)^{\varepsilon_2-1}}{(\varepsilon_2-1)!} \left[\left(\frac{R_2}{m} \right)^{E_2-1} - \left(\frac{R_2}{m} \right)^{E_2} \right] \right\} = \\ & = e^{-m\mu t} \left(\frac{R_1}{m} \right)^{E_1} \frac{R^m}{m!} P_0 \frac{1}{1 - \frac{R_2}{m}} \left[e_{\varepsilon_1-1}(m\mu t) + \right. \\ & + \left. \frac{e_{\varepsilon_2-1}(R_2\mu t) - e_{\varepsilon_1-1}(R_2\mu t)}{\left(\frac{R_2}{m} \right)^{\varepsilon_1}} - e_{\varepsilon_2-1}(m\mu t) \left(\frac{R_2}{m} \right)^{E_2} \right] = \\ & = e^{-m\mu t} \frac{R^m}{m!} P_0 \frac{1}{1 - \frac{R_2}{m}} \left[\left(\frac{R_1}{m} \right)^{E_1} e_{\varepsilon_1-1}(m\mu t) + \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{E_1} \left[e_{\varepsilon_2-1}(R_2\mu t) - e_{\varepsilon_1-1}(R_2\mu t) \right] - \left(\frac{R_1}{m} \right)^{E_1} \left(\frac{R_2}{m} \right)^{E_2} e_{\varepsilon_2-1}(m\mu t) \right].$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=m+\varepsilon_2}^{m+\varepsilon_3-1} P_i &= \left(\frac{R_2}{m} \right)^{E_2} \left(\frac{R_1}{m} \right)^{E_1} \frac{R^m}{m!} P_0 \times \\ &\times \left[1 + \frac{R_3}{m} + \dots + \left(\frac{R_3}{m} \right)^{E_3-1} \right] = \\ &= \left(\frac{R_2}{m} \right)^{E_2} \left(\frac{R_1}{m} \right)^{E_1} \frac{R^m}{m!} P_0 \frac{1 - \left(\frac{R_3}{m} \right)^{E_3}}{1 - \frac{R_3}{m}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=m+\varepsilon_2+1}^{m+\varepsilon_3-1} P_i &= \frac{R_3}{m} \left(\frac{R_2}{m} \right)^{E_2} \left(\frac{R_1}{m} \right)^{E_1} \frac{R^m}{m!} P_0 \times \\ &\times \left[1 + \frac{R_3}{m} + \dots + \left(\frac{R_3}{m} \right)^{E_3-2} \right] = \\ &= \left(\frac{R_2}{m} \right)^{E_2} \left(\frac{R_1}{m} \right)^{E_1} \frac{R^m}{m!} P_0 \frac{\frac{R_3}{m} - \left(\frac{R_3}{m} \right)^{E_3}}{1 - \frac{R_3}{m}}; \end{aligned}$$

$$\sum_{i=m+\varepsilon_2+2}^{m+\varepsilon_3-1} P_i = \left(\frac{R_2}{m} \right)^{E_2} \left(\frac{R_1}{m} \right)^{E_1} \frac{R^m}{m!} P_0 \frac{\left(\frac{R_3}{m} \right)^2 - \left(\frac{R_3}{m} \right)^{E_3}}{1 - \frac{R_3}{m}};$$

⋮

$$P_{m+\varepsilon_3-1} = \left(\frac{R_2}{m} \right)^{E_2} \left(\frac{R_1}{m} \right)^{E_1} \frac{R^m}{m!} P_0 \frac{\left(\frac{R_3}{m} \right)^{E_3-1} - \left(\frac{R_3}{m} \right)^{E_3}}{1 - \frac{R_3}{m}},$$

тогда

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\varepsilon_2} B_i(t) \sum_{i=m+\varepsilon_2}^{m+\varepsilon_3-1} P_i + B_{\varepsilon_2+1}(t) \sum_{i=m+\varepsilon_2+1}^{m+\varepsilon_3-1} P_i + \dots + \\ & + B_{\varepsilon_3-1}(t) P_{m+\varepsilon_3-1} = e^{-m\mu t} \left(\frac{R_2}{m} \right)^{E_2} \left(\frac{R_1}{m} \right)^{E_1} \frac{R^m}{m!} P_0 \times \\ & \times \frac{1}{1 - \frac{R_3}{m}} \left\{ e_{\varepsilon_2}(m\mu t) \left[1 - \left(\frac{R_3}{m} \right)^{E_3} \right] + \right. \\ & + \left. \frac{(m\mu t)^{\varepsilon_2+1}}{(\varepsilon_2+1)!} \left[\frac{R_3}{m} - \left(\frac{R_3}{m} \right)^{E_3} \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(m\mu t)^{\varepsilon_2+2}}{(\varepsilon_2+2)!} \left[\left(\frac{R_3}{m} \right)^2 - \left(\frac{R_3}{m} \right)^{\varepsilon_3} \right] + \dots + \\
& + \frac{(m\mu t)^{\varepsilon_3-1}}{(\varepsilon_3-1)!} \left[\left(\frac{R_3}{m} \right)^{\varepsilon_3-1} - \left(\frac{R_3}{m} \right)^{\varepsilon_3} \right] \Bigg\} = \\
& = e^{-m\mu t} \left(\frac{R_2}{m} \right)^{\varepsilon_2} \left(\frac{R_1}{m} \right)^{\varepsilon_1} \frac{R^m}{m!} P_0 \frac{1}{1-\frac{R_3}{m}} \left[e_{\varepsilon_2-1}(m\mu t) + \right. \\
& + \left. \frac{e_{\varepsilon_3-1}(R_3\mu t) - e_{\varepsilon_2-1}(R_3\mu t)}{\left(\frac{R_3}{m} \right)^{\varepsilon_2}} - e_{\varepsilon_3-1}(m\mu t) \left(\frac{R_3}{m} \right)^{\varepsilon_3} \right] = \\
& = e^{-m\mu t} \frac{R^m}{m!} P_0 \frac{1}{1-\frac{R_3}{m}} \left[\left(\frac{R_1}{m} \right)^{\varepsilon_1} \left(\frac{R_2}{m} \right)^{\varepsilon_2} e_{\varepsilon_2-1}(m\mu t) + \right. \\
& + \left(\frac{R_1}{R_3} \right)^{\varepsilon_1} \left(\frac{R_2}{R_3} \right)^{\varepsilon_2} \left[e_{\varepsilon_3-1}(R_3\mu t) - e_{\varepsilon_2-1}(R_3\mu t) \right] - \\
& - \left. \left(\frac{R_1}{m} \right)^{\varepsilon_1} \left(\frac{R_2}{m} \right)^{\varepsilon_2} \left(\frac{R_3}{m} \right)^{\varepsilon_3} e_{\varepsilon_3-1}(m\mu t) \right]. \\
& \vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=m+\varepsilon_{h-1}}^{m+\varepsilon_h-1} P_i = \left(\frac{R_{h-1}}{m} \right)^{\varepsilon_{h-1}} \dots \left(\frac{R_1}{m} \right)^{\varepsilon_1} \frac{R^m}{m!} P_0 \times \\
& \times \left[1 + \frac{R_h}{m} + \dots + \left(\frac{R_h}{m} \right)^{\varepsilon_h-1} \right] = \\
& = \prod_{g=1}^{h-1} \left(\frac{R_g}{m} \right)^{\varepsilon_g} \frac{R^m}{m!} P_0 \frac{1 - \left(\frac{R_h}{m} \right)^{\varepsilon_h}}{1 - \frac{R_h}{m}}; \\
& \sum_{i=m+\varepsilon_{h-1}+1}^{m+\varepsilon_h-1} P_i = \frac{R_h}{m} \left(\frac{R_{h-1}}{m} \right)^{\varepsilon_{h-1}} \dots \left(\frac{R_1}{m} \right)^{\varepsilon_1} \frac{R^m}{m!} P_0 \times \\
& \times \left[1 + \frac{R_h}{m} + \dots + \left(\frac{R_h}{m} \right)^{\varepsilon_h-2} \right] = \\
& = \prod_{g=1}^{h-1} \left(\frac{R_g}{m} \right)^{\varepsilon_g} \frac{R^m}{m!} P_0 \frac{\frac{R_h}{m} - \left(\frac{R_h}{m} \right)^{\varepsilon_h}}{1 - \frac{R_h}{m}}; \\
& \vdots
\end{aligned}$$

$$P_{m+\varepsilon_{h-1}} = \prod_{g=1}^{h-1} \left(\frac{R_g}{m} \right)^{\varepsilon_g} \frac{R^m}{m!} P_0 \frac{\left(\frac{R_h}{m} \right)^{\varepsilon_{h-1}} - \left(\frac{R_h}{m} \right)^{\varepsilon_h}}{1 - \frac{R_h}{m}},$$

ТОГДА

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^{\varepsilon_{h-1}} B_i(t) \sum_{i=m+\varepsilon_{h-1}}^{m+\varepsilon_h-1} P_i + B_{\varepsilon_{h-1}+1}(t) \sum_{i=m+\varepsilon_{h-1}+1}^{m+\varepsilon_h-1} P_i + \dots + \\
& + B_{\varepsilon_h-1}(t) P_{m+\varepsilon_h-1} = e^{-m\mu t} \prod_{g=1}^{h-1} \left(\frac{R_g}{m} \right)^{\varepsilon_g} \frac{R^m}{m!} P_0 \times \\
& \times \frac{1}{1 - \frac{R_h}{m}} \left\{ e_{\varepsilon_{h-1}}(m\mu t) \left[1 - \left(\frac{R_h}{m} \right)^{\varepsilon_h} \right] + \right. \\
& + \frac{(m\mu t)^{\varepsilon_{h-1}+1}}{(\varepsilon_{h-1}+1)!} \left[\frac{R_h}{m} - \left(\frac{R_h}{m} \right)^{\varepsilon_h} \right] + \\
& + \frac{(m\mu t)^{\varepsilon_{h-1}+2}}{(\varepsilon_{h-1}+2)!} \left[\left(\frac{R_h}{m} \right)^2 - \left(\frac{R_h}{m} \right)^{\varepsilon_h} \right] + \dots + \\
& + \left. \frac{(m\mu t)^{\varepsilon_h-1}}{(\varepsilon_h-1)!} \left[\left(\frac{R_h}{m} \right)^{\varepsilon_{h-1}} - \left(\frac{R_h}{m} \right)^{\varepsilon_h} \right] \right\} = \\
& = e^{-m\mu t} \prod_{g=1}^{h-1} \left(\frac{R_g}{m} \right)^{\varepsilon_g} \frac{R^m}{m!} P_0 \frac{1}{1 - \frac{R_h}{m}} \left[e_{\varepsilon_{h-1}-1}(m\mu t) + \right. \\
& + \left. \frac{e_{\varepsilon_{h-1}}(R_h\mu t) - e_{\varepsilon_{h-1}-1}(R_h\mu t)}{\left(\frac{R_h}{m} \right)^{\varepsilon_{h-1}}} - e_{\varepsilon_{h-1}}(m\mu t) \left(\frac{R_h}{m} \right)^{\varepsilon_h} \right] = \\
& = e^{-m\mu t} \frac{R^m}{m!} P_0 \frac{1}{1 - \frac{R_h}{m}} \left[\prod_{g=1}^{h-1} \left(\frac{R_g}{m} \right)^{\varepsilon_g} e_{\varepsilon_{h-1}-1}(m\mu t) + \right. \\
& + \prod_{g=1}^{h-1} \left(\frac{R_g}{R_h} \right)^{\varepsilon_g} \left[e_{\varepsilon_{h-1}}(R_h\mu t) - e_{\varepsilon_{h-1}-1}(R_h\mu t) \right] - \\
& - \left. \prod_{g=1}^h \left(\frac{R_g}{m} \right)^{\varepsilon_g} e_{\varepsilon_h-1}(m\mu t) \right].
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& q[1 - F_{\text{ок}}(t)] = e^{-m\mu t} P_{m-1} \times \\
& \times \left\{ \frac{R_1}{m - R_1} \left[e_{\varepsilon_1-1}(R_1\mu t) - \left(\frac{R_1}{m} \right)^{\varepsilon_1} e_{\varepsilon_1-1}(m\mu t) \right] + \right. \\
& + \sum_{i=2}^h \frac{R_i}{m - R_i} \left[\prod_{g=1}^{i-1} \left(\frac{R_g}{m} \right)^{\varepsilon_g} e_{\varepsilon_{i-1}-1}(m\mu t) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \prod_{g=1}^{i-1} \left(\frac{R_g}{R_i} \right)^{E_g} \left[e_{\varepsilon_i-1}(R_i \mu t) - e_{\varepsilon_{i-1}-1}(R_i \mu t) \right] - \\
& - \prod_{g=1}^i \left(\frac{R_g}{m} \right)^{E_g} e_{\varepsilon_i-1}(m \mu t) \Bigg\}; \\
F_{\text{ож}}(t) = & 1 - e^{-m \mu t} \frac{P_{m-1}}{q} \times \\
& \times \left\{ \frac{R_1}{m - R_1} \left[e_{\varepsilon_1-1}(R_1 \mu t) - \left(\frac{R_1}{m} \right)^{E_1} e_{\varepsilon_1-1}(m \mu t) \right] + \right. \\
& + \sum_{i=2}^h \frac{R_i}{m - R_i} \left[\prod_{g=1}^{i-1} \left(\frac{R_g}{m} \right)^{E_g} e_{\varepsilon_{i-1}-1}(m \mu t) + \right. \\
& + \prod_{g=1}^{i-1} \left(\frac{R_g}{R_i} \right)^{E_g} \left[e_{\varepsilon_i-1}(R_i \mu t) - e_{\varepsilon_{i-1}-1}(R_i \mu t) \right] - \\
& \left. \left. - \prod_{g=1}^i \left(\frac{R_g}{m} \right)^{E_g} e_{\varepsilon_i-1}(m \mu t) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Полученная система формул исчерпывающе решает поставленную выше задачу. При этом результаты расчётов, полученные в настоящей работе, и продолжающие цикл результатов, опубликованных ранее авторами, могут быть полезны при проектировании и эксплуатации достаточно широкого класса объектов и систем, работающих по принципу систем и сетей массового обслуживания.

Литература

1. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, 4, 78-85 (2006);
2. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Обозрение прикл. и промышл. матем.*, **14**, 5, 893-896 (2007);
3. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Обозрение прикл. и промышл. матем.*, **15**, 6, 1090-1091 (2008);
4. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, 5, С. 154-161 (2011);
5. А.С. Титовцев, Дисс. канд. техн. наук, КНИТУ, Казань, 2011. 143 с.;
6. А.С. Титовцев, *Системы дифференцированного обслуживания поликомпонентных потоков. Модели и характеристики*. Saarbrücken, LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2012. 132 с.;
7. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, **15**, 1, С. 148-152 (2012);
8. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, **15**, 6, С. 201-202 (2012);
9. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, **15**, 8, С. 337-340 (2012);
10. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, **16**, 6, С. 248-252 (2013);
11. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Наука в Центральной России*, 4, С. 5-8 (2013);
12. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, **16**, 11, С. 255-257 (2013);
13. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, **16**, 18, С. 282-286 (2013);
14. А.П. Кирпичников, А.С. Титовцев, *Вестник Казан. техн. ун-та*, **16**, 23, С. 242-244 (2013);
15. А.Я. Хинчин, *Работы по математической теории массового обслуживания*. М., ГИФМЛ, 1963. 236 с.;
16. А.П. Кирпичников, *Прикладная теория массового обслуживания*. Казань, Изд-во Казанского гос. ун-та, 2008. 112 с.;
17. А.П. Кирпичников, *Методы прикладной теории массового обслуживания*. Казань, Изд-во Казанского университета, 2011. 200 с.

© **А. П. Кирпичников** – д-р физ.-мат. наук, зав. каф. интеллектуальных систем и управления информационными ресурсами КНИТУ, kirpichnikov@kstu.ru; **А. С. Титовцев** – канд. тех. наук, доцент каф. интеллектуальных систем и управления информационными ресурсами КНИТУ, notna6683@mail.ru.