

Р. А. Каюмов, А. Р. Мангушева

## ПРЕДЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДЛЯ ПЛЕНОЧНО-ТКАНЕВОГО КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

*Ключевые слова: пластичность; упрочнение; большие перемещения; предельное равновесие.*

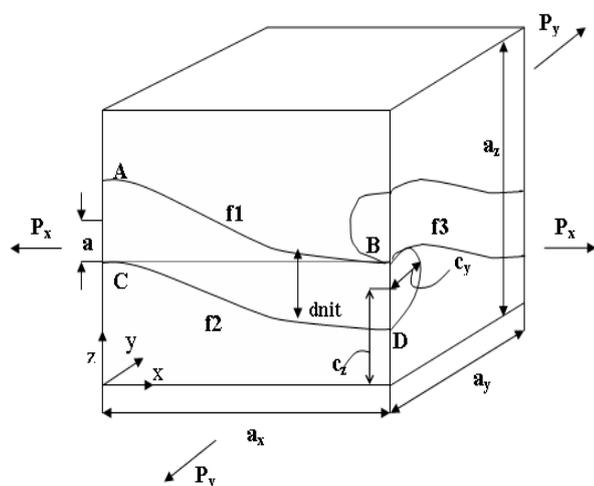
*Рассмотрен пленочно-тканевый композиционный материал, для которого построена трехмерная конечно-элементная модель представительной ячейки. Приведены методика решения задачи об ее двухосном растяжении и задачи построения для нее предельной поверхности. Результаты представлены в виде графиков.*

*Key words: plasticity; hardening; large displacements; limiting balance.*

*The fabric composite material is considered. For its representative cell the 3-D finite-element model is developed. The technique of the task decision about its two axes a lengthening and task to construct a limiting surface is given. The results are shown as the diagrams.*

### Введение

Рассматривается ячейка пленочно-тканевого композиционного материала (ПТКМ), которая представляет собой ткань из высокопрочных синтетических нитей и пленочного полимерного покрытия. Последние служат обычно для защиты армирующей основы от воздействия атмосферных факторов и придания воздухонепроницаемости материалу. Для анализа ПТКМ можно рассмотреть его представительный элемент, изображенный на рисунке 1.



**Рис. 1** – Элементарная ячейка пленочно-тканевого композита

Линии АВ, CD и часть эллипса описываются функциями:

$$f1 = a \cos\left(\frac{\pi x}{a_x}\right) + cz + a + dnit / 2 \quad (1)$$

$$f2 = a \cos\left(\frac{\pi x}{a_x}\right) + cz + a - dnit / 2 \quad (2)$$

$$f3 = \frac{y_t^2}{c_y^2} + \frac{(z_t - c_0)^2}{\left(\frac{dnit}{2}\right)^2}, \quad (3)$$

где  $c_0 = \frac{f1 + f2}{2}$ .

Эти функции позволяют выделить область, занимаемую нитью ткани, которую называем основой. Поперечную нить назовем утком. Нити на других сторонах представительного элемента описываются аналогично.

Для дискретизации области по пространственным координатам используем метод конечных элементов. Для вычисления параметра предельной нагрузки применим метод вариации упругих характеристик [1], который основан на законе пластического течения.

### Основная часть

Рассмотрим задачу построения предельных кривых в пространстве усилий растяжения  $P_x$  и  $P_y$ . Подобные задачи рассматривались в [2] для более простых случаев ячеек, а именно для слоистых элементов оболочек. Ввиду простоты строения ячейки в этом случае авторам удалось получить систему параметрических уравнений предельной поверхности. Однако при этом в большинстве частных случаев между этими параметрами имеется нелинейная связь. Сравнения экспериментальных данных и результатов, полученных по теории предельного равновесия для слоистых образцов, приведены, в частности, в работах [3,4].

Рассмотрим частный случай условия текучести, являющийся обобщением критерия Мизеса на случай ортотропного материала:

$$f(\sigma) = \sigma^T A \sigma \quad (4)$$

Матрицу А для него можно представить в виде:

$$A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{vmatrix}$$

При рассмотрении соотношений закона пластического течения в форме:

$$\sigma = \frac{A^{-1}\xi}{\sqrt{\xi^T A \xi}}, \quad \xi = \dot{\varepsilon} \quad (5)$$

можно увидеть аналогию между нелинейно-упругой и жесткопластической задачами. Для этого под  $\xi$  нужно понимать приращение деформации, а под матрицей упругих характеристик – матрицу

$$E = \frac{A^{-1}}{\sqrt{\xi^T A \xi}} \quad (6)$$

Этот подход, предложенный в [5] для условия типа (4), в дальнейшем был развит на более общие условия текучести. Для изотропных тел и условия Мизеса аналогичная методика была рассмотрена в [6].

На основе вышеизложенного разработана методика решения полученной задачи методом итерационного уточнения матрицы  $E$  на каждом шаге по перемещениям. Были использованы следующие исходные данные (все данные в миллиметрах):  $a=0.4$ ,  $d_{нит}=0.2$ ,  $c_z=0.3$ ,  $c_y=0.2$ ,  $c_x=0.2$ ,  $a_x=1$ ,  $a_y=1$ ,  $a_z=1$  (см. рис. 1). Предел текучести матрицы

$\tau_T^{Mamp} = 1/\sqrt{3}KH / \text{мм}^2$ , основы и утка  $\tau_T^{осн} = \tau_T^{утка} = 10/\sqrt{3}KH / \text{мм}^2$ . Матрица  $A$  имела вид:

$$A = \begin{pmatrix} 1.34615 & 0.576923 & 0.576923 & 0 & 0 & 0 \\ 0.576923 & 1.34615 & 0.576923 & 0 & 0 & 0 \\ 0.576923 & 0.576923 & 1.34615 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.333 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.333 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.333 \end{pmatrix} \cdot \frac{3}{\tau_T^2}$$

Здесь  $\tau_T$  - предел текучести при сдвиге.

На рисунке 2 приведены предельные кривые в пространстве усилий растяжения в зависимости от геометрических характеристик ПТКМ.

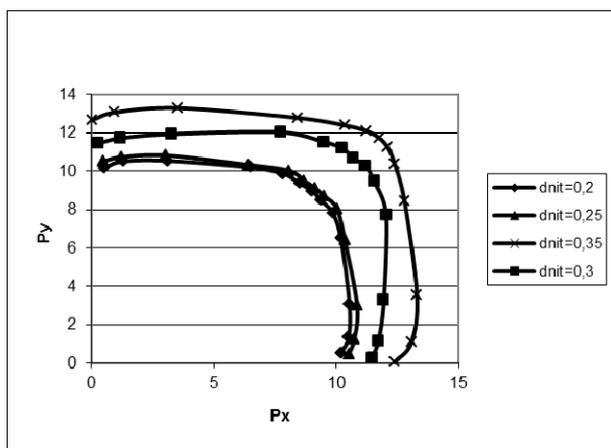


Рис. 2 – Зависимость предельных нагрузок от толщины нити и утка

Для определения реальной несущей способности конструкции необходимо учитывать ее поведение после начала пластического деформирования, поскольку в одних случаях происходит уменьшение

предельной нагрузки, необходимой для дальнейшей деформации конструкции (что приводит к катастрофическому разрушению), а в других – ее увеличение. Такой анализ можно провести при учете конечности перемещений. При решении задач по теории предельного равновесия, как было отмечено выше, для этого можно использовать метод пересчета геометрии конструкции по известному полю перемещений. Результаты данной методики приведены на рисунке 3.

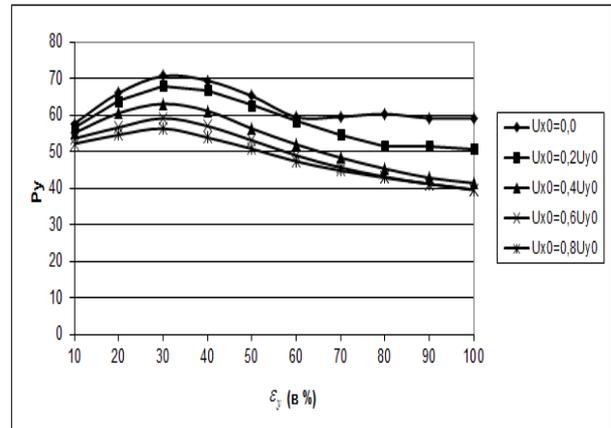


Рис. 3 – Зависимость предельной нагрузки от деформации ячейки  $\varepsilon_y$  в направлении утка (оси  $y$ )

Из рисунка 3 видно, что при некотором значении удлинения ячейки, предельная нагрузка достигает своего максимума (ввиду выпрямления нитей), после чего наступает исчерпание несущей способности рассматриваемого элемента.

Поскольку для большинства материалов при больших деформациях появляется упрочнение, то необходимо учитывать изменения предела текучести. В данной работе используется теория изотропного упрочнения, тогда соотношение примем в виде  $\sigma_T = \sigma_{T_0}(1 + C^* \varepsilon_i)$ , где  $\varepsilon_i$  - интенсивность деформации,  $\sigma_{T_0}$  - предел текучести. Результаты приведены на рис.4.

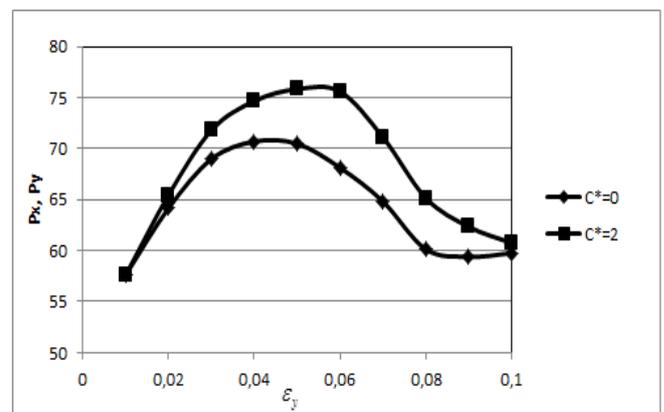


Рис. 4 – Зависимость предельной нагрузки от деформации ячейки  $\varepsilon_y$  при разных параметрах упрочнения  $C^*$

## Выводы

Рассмотрена задача оценки несущей способности ячейки ПТКМ при двухосном растяжении. Для вычисления параметра предельной нагрузки применяется метод вариации упругих характеристик, а для дискретизации области – метод конечных элементов. Получены предельные кривые в пространстве усилий растяжения  $R_x$  и  $R_y$  и зависимости предельной нагрузки от общего удлинения стержня по оси  $x$  и  $y$ .

## Литература

1. Каюмов, Р.А. Об одном методе двусторонней оценки предельной нагрузки / Р.А. Каюмов // Проблемы прочности. – 1992. – N1. – С.51-55.
2. Терегулов, И.Г. Предельное состояние многослойных композитных пластин и оболочек / И.Г. Терегулов, Э.С. Сибгатуллин, О.А. Маркин // Механика композитных материалов. – 1988. – N4. – С.715-720.
3. Терегулов, И.Г. Расчет конструкций по теории предельного равновесия / И.Г. Терегулов, Р.А. Каюмов, Сибгатуллин Э.С. Казань: ФЭн, 2003. – 180 с.
4. Каюмов, Р.А. Прямые и обратные задачи расчета слоистых оболочечных конструкций /Р.А. Каюмов, С.В. Гусев, Р.О. Нежданов// Казань: Каз.гос.энерг.ун-т. – 2004.- 180 с.
5. Каюмов Р.А. Метод вариации упругих характеристик в задаче о предельной нагрузке // Жур. ПМТФ. - 1990. - № 3. - С.134-139.
6. Рутман Ю.Л. Метод псевдожесткостей для решения задач о предельном равновесии жесткопластических конструкций. – С.Петербург. – 1998. – 53 с.
7. Каюмов, Р.А. Физически нелинейная модель тканевых материалов, обработанных в потоке высокочастотной плазма/ Р.А. Каюмов, И.Ш. Абдуллин, М.Н. Серазутдинов, В.В. Хамматова, И.З. Мухамедова, Е.В. Кумпан, А.М, Шакирова // Вестник Казанского технологического университета. №6; Федеральное агентство по образованию, Казан. гос. технол. ун-т. – Казань: КГТУ, 2010. – С. 42 – 53.

---

© **Р. А. Каюмов** – проф., д.ф.-м.н., зав. каф. сопротивления материалов и основ теории упругости КГАСУ, [kaumov@gambler.ru](mailto:kaumov@gambler.ru); **А. Р. Мангушева** – к.ф.-м. н., доц. каф. интеллектуальных систем и управления информационными ресурсами КНИТУ, [alinamr@mail.ru](mailto:alinamr@mail.ru).