

М. К. Тлеулинов, В. А. Кузнецов

О МОДЕЛИРОВАНИИ СВЯЗЕЙ ЗВЕНЬЕВ СОСТАВНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Ключевые слова: геометрически нелинейная модель, составные конструкции, реакции.

Строится геометрически нелинейная модель для определения реакций в узлах соединения составных поверхностей. Приводятся результаты расчетов.

Keywords: geometrically nonlinear model, composite structures, reactions.

Constructed geometrically nonlinear model to determine the reactions at the nodes connection of the component surfaces. The results of calculations.

Введение

Некоторые агрегаты сложного оборудования [1,2] могут иметь элементы в виде составных поверхностей, соединенных между собой статически неопределимым образом - в трех и более точках. Напряженно деформированное состояние таких конструкций необходимо определять с учетом условий совместного деформирования отдельных звеньев. В таких случаях внутренние усилия и реакции в узлах соединения определяются не столько внешней нагрузкой, сколько жесткостными характеристиками и взаимным расположением отдельных частей. Кроме того, линейное и геометрически нелинейное решения при моделировании таких конструкций очень часто существенно отличаются. Поэтому представляет интерес вопрос о зависимости линейного и геометрически нелинейного решения от взаимного расположения и относительной толщины поверхностей. В данной работе предлагается вариант построения геометрически нелинейной математической модели для решения этой задачи.

Основные соотношения и условия связи отдельных звеньев

Рассмотрим конструкцию, состоящую из двух звеньев - несущей и прикрепленной к ней на шарнирах управляющей поверхностью. Каждое звено будем представлять оболочкой, отнесенной к произвольной криволинейной системе координат x_1, x_2, x_3 , нормально связанной со срединной поверхностью данного звена. Пусть $\mathbf{r}(x_1, x_2)$ - радиус-вектор точек срединной поверхности, а $\mathbf{n}(x_1, x_2)$ - орт нормали к ней. Базисные векторы основного базиса определяются так [3]:

$$\mathbf{r}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_\alpha}.$$

Радиус-вектор $\mathbf{R}$ произвольной точки пространства, удаленной от срединной поверхности на расстояние x_3 , будет

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(x_1, x_2) + x_3 \mathbf{n}(x_1, x_2).$$

Перемещения произвольной точки представим в виде

$$\mathbf{U} = U_x \mathbf{i} + U_y \mathbf{j} + U_z \mathbf{k},$$

где U_x, U_y, U_z - компоненты вектора перемещений $\mathbf{U}$ в прямоугольной декартовой системе координат, связанной с корневым сечением звена, с ортами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Тогда

$$U_i = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = \frac{\partial U_x}{\partial x_i} \mathbf{i} + \frac{\partial U_y}{\partial x_i} \mathbf{j} + \frac{\partial U_z}{\partial x_i} \mathbf{k} \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Будем полагать, что компоненты перемещения по толщине оболочки меняются по линейному закону (гипотеза типа Тимошенко), обжатие отсутствует: $U = U_0 + x_3 \gamma_1$; $V = V_0 + x_3 \gamma_2$; $W = W_0$,

(2) где U_0, V_0, W_0 - компоненты перемещений точек срединной поверхности, γ_1, γ_2 - компоненты угла поворота нормали.

Будем рассматривать пологие достаточно тонкие оболочки, у которых метрика по толщине не меняется, то есть будут справедливы соотношения

$$\mathbf{R}_\delta = \mathbf{r}_\delta; \mathbf{R}_\delta^* = \mathbf{r}_\delta^*; \mathbf{R}_3 = \mathbf{n}; \mathbf{R}_3^* = \mathbf{n}^*, \quad \delta = 1, 2. \quad (3)$$

Запишем нелинейные геометрические соотношения - нелинейную зависимость между тензором деформаций и вектором перемещений - в виде [4]:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{R}_i \mathbf{U}_j + \mathbf{R}_j \mathbf{U}_i + \mathbf{U}_i \mathbf{U}_j). \quad (4)$$

Представим ϵ_{ij} как сумму линейной ϵ_{ij}^e и собственно нелинейной частей $\Delta \epsilon_{ij}^i$:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \Delta \epsilon_{ij}^i,$$

где

$$\epsilon_{ij}^e = \frac{1}{2} (\mathbf{R}_i \mathbf{U}_j + \mathbf{R}_j \mathbf{U}_i); \quad (5)$$

$$\Delta \epsilon_{ij}^i = \frac{1}{2} \mathbf{U}_i \mathbf{U}_j. \quad (6)$$

Развернем (5) с учетом (1) и (3):

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta}^e &= \frac{1}{2} (a_{\alpha x} \frac{\partial U_x}{\partial x_\beta} + a_{\alpha y} \frac{\partial U_y}{\partial x_\beta} + a_{\alpha z} \frac{\partial U_z}{\partial x_\beta} + \\ &+ a_{\beta x} \frac{\partial U_x}{\partial x_\alpha} + a_{\beta y} \frac{\partial U_y}{\partial x_\alpha} + a_{\beta z} \frac{\partial U_z}{\partial x_\alpha}); \\ \epsilon_{\alpha 3}^e &= \frac{1}{2} (a_{\alpha x} \frac{\partial U_x}{\partial x_3} + a_{\alpha y} \frac{\partial U_y}{\partial x_3} + a_{\alpha z} \frac{\partial U_z}{\partial x_3} + \\ &+ a_{3x} \frac{\partial U_x}{\partial x_\alpha} + a_{3y} \frac{\partial U_y}{\partial x_\alpha} + a_{3z} \frac{\partial U_z}{\partial x_\alpha}), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$a_{\delta p} = \mathbf{R}_{\delta} \mathbf{r}_p, \quad \delta = \alpha, \beta; \quad \alpha, \beta = 1, 2;$$

$$p = x, y, z; \quad \mathbf{r}_x = \mathbf{i}; \quad \mathbf{r}_y = \mathbf{j}; \quad \mathbf{r}_z = \mathbf{k}.$$

В силу принятых ранее гипотез о распределении перемещений по толщине (2) выражения (7) примут вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}^{\varepsilon} &= \frac{1}{2} (a_{\alpha x} (\frac{\partial U_{x0}}{\partial x_{\beta}} + x_3 \frac{\partial \gamma_x}{\partial x_{\beta}}) + a_{\alpha y} (\frac{\partial U_{y0}}{\partial x_{\beta}} + x_3 \frac{\partial \gamma_y}{\partial x_{\beta}}) + \\ &+ a_{\alpha z} \frac{\partial U_z}{\partial x_{\beta}} + a_{\beta x} (\frac{\partial U_{x0}}{\partial x_{\alpha}} + x_3 \frac{\partial \gamma_x}{\partial x_{\alpha}}) + \\ &+ a_{\beta y} (\frac{\partial U_{y0}}{\partial x_{\alpha}} + x_3 \frac{\partial \gamma_y}{\partial x_{\alpha}}) + a_{\beta z} \frac{\partial U_z}{\partial x_{\alpha}}); \\ \varepsilon_{\alpha 3}^{\varepsilon} &= \frac{1}{2} (a_{\alpha x} \gamma_x + a_{\alpha y} \gamma_y + a_{\alpha z} (\frac{\partial U_{x0}}{\partial x_{\alpha}} + x_3 \frac{\partial \gamma_x}{\partial x_{\alpha}}) + \\ &+ a_{\alpha 3} (\frac{\partial U_{y0}}{\partial x_{\alpha}} + x_3 \frac{\partial \gamma_y}{\partial x_{\alpha}}) + a_{\alpha 3} \frac{\partial U_z}{\partial x_{\alpha}}). \end{aligned} \quad (8)$$

Сложность решения геометрически нелинейных задач заключается в определении нелинейной составляющей геометрических соотношений $\mathbf{U}_i \mathbf{U}_j$, так как коэффициенты перед компонентами перемещений и их производными сами являются перемещениями и их производными, меняющимися в процессе деформирования. Для определения этих коэффициентов будем использовать подход, приведенный в работе [5].

Прежде чем записать выражение для $\Delta \varepsilon_{ij}^i$, произведем некоторые преобразования. Представим $\mathbf{U}_i$ в виде

$$\mathbf{U}_i = \mathbf{R}_i^* - \mathbf{R}_i = \Delta \mathbf{R}_i. \quad (9)$$

Тогда

$$\Delta \varepsilon_{ij}^i = \frac{1}{2} (\mathbf{R}_i^* - \mathbf{R}_i) \mathbf{U}_j = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{R}_i \mathbf{U}_j. \quad (10)$$

Подставим (1) в (10) с учетом (2):

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{\alpha\beta}^i &= \frac{1}{2} \Delta \mathbf{R}_{\alpha} ((\frac{\partial U_{x0}}{\partial x_{\beta}} + x_3 \frac{\partial \gamma_x}{\partial x_{\beta}}) \mathbf{i} + \\ &+ (\frac{\partial U_{y0}}{\partial x_{\beta}} + x_3 \frac{\partial \gamma_y}{\partial x_{\beta}}) \mathbf{j} + \frac{\partial U_{z0}}{\partial x_{\beta}} \mathbf{k}); \end{aligned} \quad (11)$$

$$\Delta \varepsilon_{\alpha 3}^i = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{R}_{\alpha} (\gamma_x \mathbf{i} + \gamma_y \mathbf{j}).$$

$$\text{Обозначив} \quad \Delta a_{ip} = \Delta \mathbf{R}_i \mathbf{r}_p \quad (12)$$

получаем

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{\alpha\beta}^i &= \frac{1}{2} (\Delta a_{\alpha x} (\frac{\partial U_{x0}}{\partial x_{\beta}} + x_3 \frac{\partial \gamma_x}{\partial x_{\beta}}) + \\ &+ \Delta a_{\alpha y} (\frac{\partial U_{y0}}{\partial x_{\beta}} + x_3 \frac{\partial \gamma_y}{\partial x_{\beta}}) + \Delta a_{\alpha z} \frac{\partial U_{z0}}{\partial x_{\beta}}); \\ \Delta \varepsilon_{\alpha 3}^i &= \frac{1}{2} (\Delta a_{\alpha x} \gamma_x + \Delta a_{\alpha y} \gamma_y). \end{aligned} \quad (13)$$

Выражения для нелинейной составляющей тензора деформаций (13) по своей структуре аналогичны линейным (8). Основное отличие состоит в коэффициентах Δa_{ip} . Это достигается благодаря соотношениям (9) – (12). Без них выражения для $\Delta \varepsilon_{ij}^i$ были бы весьма громоздкими и неудобными.

Это также позволяет реализовать удобный алгоритм решения нелинейной задачи. По существу её решение сводится теперь к определению коэффициентов Δa_{ip} , зависящих только от геометрии деформированной и недеформированной поверхностей отсчета. Поскольку выражения для $\varepsilon_{ij}^{\varepsilon}$ и $\Delta \varepsilon_{ij}^i$ имеют теперь сходную структуру, то процедуры формирования линейной и нелинейной частей матрицы жесткости отличаются лишь тем, что для линейной части жесткостные коэффициенты известны и неизменны, а для нелинейной части определяются и уточняются в процессе расчета.

Для получения основных уравнений воспользуемся вариационным принципом возможных перемещений Лагранжа. Запишем полную энергию системы

$$\mathfrak{D} = \int_V (\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{u}^T \mathbf{P}) dv, \quad (14)$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{ij}\}$ - деформации, $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{ij}\}$ - напряжения, $\mathbf{u} = \{u_i\}$ - перемещения точек тела, $\mathbf{P} = \{P_i\}$ - внешние силы, $i, j = 1, 2, 3$; v - объем тела.

При конечно-элементной аппроксимации выражение (14) можно записать в виде

$$\mathfrak{D} = \Pi,$$

$$\text{где} \quad \Pi = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \mathbf{R},$$

$\mathbf{U}$ - вектор узловых перемещений, $\mathbf{K}$ - матрица жесткости, $\mathbf{R}$ - вектор узловых нагрузок.

Для моделирования связей воспользуемся методом множителей Лагранжа [6 - 8], рассматривая условия совместности перемещений в узлах соединения звеньев как наложенные на систему ограничения

$$C(\mathbf{U}) = 0. \quad (15)$$

Построим расширенный функционал полной энергии системы Π^p , добавив к исходному функционалу Π ограничения $C(\mathbf{U})$, умноженные на некоторую константу λ (множитель Лагранжа):

$$\Pi^p = \Pi + \lambda C(\mathbf{U}).$$

Определим необходимые условия экстремума функционала Π при ограничениях $C(\mathbf{U}) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi^p}{\partial \mathbf{U}} &= \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{U}} + \lambda \frac{\partial C}{\partial \mathbf{U}} = 0; \\ \frac{\partial \Pi^p}{\partial \lambda} &= C = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Запишем выражения для q связей системы с n степенями свободы в виде

$$\mathbf{G} \mathbf{U} = \mathbf{s},$$

где $\mathbf{G}$ - матрица размерностью $q \times n$ коэффициентов в уравнениях задающих ограничения, а $\mathbf{s}$ - вектор размерностью q , компоненты которого заданные константы. Уравнение (2) теперь примет вид

$$C(\mathbf{U}) = \mathbf{G} \mathbf{U} - \mathbf{s} = 0. \quad (17)$$

Рассмотрим построение матрицы $\mathbf{G}$ на конкретном примере. Допустим, что на систему наложено только одно ограничение - перемещение в точке i должно быть равно перемещению в точке j , т.е. $u_i = u_j$. Тогда уравнение (17) запишется в виде $u_i - u_j = 0$, матрица $\mathbf{G}$ будет иметь одну строку, в ко-

торой $G(1,i)=1$; $G(1,j)=-1$, а остальные элементы и вектор $\mathbf{S}$ равны 0:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & -1 & \dots & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}.$$

Введя обозначения $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$,

где λ_i - множители Лагранжа, запишем выражение для расширенного функционала Π^p системы

$$\Pi^p = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \mathbf{R} + \lambda^T \mathbf{G} \mathbf{U} - \lambda^T \mathbf{s}. \quad (18)$$

Подставив (17) и (18) в (16), получаем систему уравнений

$$\mathbf{K} \mathbf{U} + \mathbf{G}^T \lambda = \mathbf{R};$$

$$\mathbf{G} \mathbf{U} = \mathbf{s},$$

которую можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G}^T \\ \mathbf{G} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{s} \end{Bmatrix}. \quad (19)$$

Нижняя часть матричного соотношения (19) представляет собой систему ограничений. Она может быть решена отдельно. Из верхней части (19) получаем

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{R} - \mathbf{K}^{-1} \mathbf{G}^T \lambda,$$

что после подстановки в нижнюю часть (19) позволяет найти

$$\lambda = (\mathbf{G} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{G}^T)^{-1} (\mathbf{G} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{R} - \mathbf{s}).$$

В данном случае по своему физическому смыслу множители Лагранжа являются реакциями в узлах соединения составных частей.

По приведенной методике были проведены расчеты составной конструкции, состоящей из двух оболочек нулевой кривизны (пластин), одна из которых (несущая поверхность) консольно закреплена, а другая (управляющая поверхность) навешена на первой в трех точках. На рис. 1 и 2 приведены значения горизонтальных реакций R_x в среднем шарнире, возникающих от вертикальных сосредоточенных сил, приложенных на концах несущей и управляющей поверхностей, в линейной и геометрически нелинейной постановках в зависимости от угла отклонения управляющей поверхности θ^1 . Длина пластин $l = 4$ м, толщина $h = 0,1$ м и $h = 0,02$ м, ширина несущей поверхности $b_H = 1$ м, управляющей $b_y = 0,25$ м. Модуль упругости материала $E = 7,2 \cdot 10^{10}$ Па, коэффициент Пуассона $\mu = 0,3$.

Нагрузка была подобрана таким образом, что вертикальное перемещение концевой точки консоли при $\theta^1 = 0$ в обоих случаях была равна 15% от длины консоли. Для конструкции с толщиной 0,1 м нагрузка несущей поверхности 145300 Н, управляющей 50780 Н; с толщиной 0,02 м соответственно 1188 Н и 415 Н.

Как видно из рис. 1 и 2, расхождение между линейным и нелинейным решениями значитель-

но. Оно составляет десятки процентов у более толстых пластин (рис.1) и сотни процентов у более тонких (рис.2). Это ведет к существенному перераспределению внутренних усилий и изменению напряженно-деформированного состояния всей конструкции.

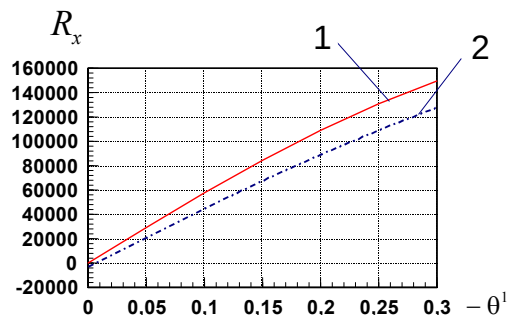


Рис. 1 – Изменение реакции в среднем шарнире в зависимости от θ^1 при $h = 0,1$ м; 1 – линейное решение, 2 – нелинейное решение

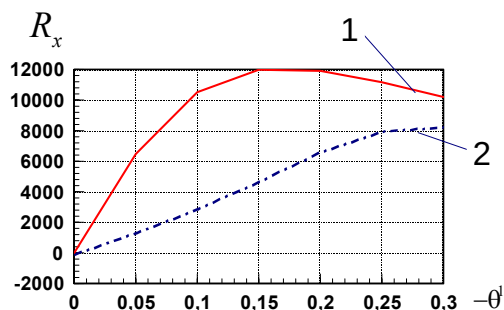


Рис. 2 – Изменение реакции в среднем шарнире в зависимости от θ^1 при $h = 0,02$ м; 1 – линейное решение, 2 – нелинейное решение

Литература

1. А.В. Ралаев, Н.Р. Батраков, А.А. Мухамадиев, А.Н. Сабирзянов, Экспериментальная установка для исследования процесса вытеснения нефти при термобарических условиях реальных пластов с использованием сверхкритических флюидных систем. Вестник технологического университета, 3, 96-102 (2009);
2. С.Г. Дьяконов, В.И. Елизаров. Оптимальное проектирование промышленных аппаратов химической технологии на основе сопряженного физического и математического моделирования. Вестник технологического университета, 4, 131 - 140 (2010);
3. И.Н. Векуа, Основы тензорного анализа и теории ковариантов. Наука, М., 1976. 296 с.
4. А.С. Вольмир, Нелинейная динамика пластинок и оболочек. Наука, М., 1972. 432 с.
5. М.К. Тлеулинов, О геометрически нелинейном расчете крыла методом конечных элементов. Деп. в ВИНТИ №1071- В2007 от 19.11.2007.
6. В.И. Ванько, О.В. Ермошина, Г.Н. Кувыркин, Вариационное исчисление и оптимальное управление. Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, М., 2001. 488 с.
7. В.И. Смирнов, Курс высшей математики. Т. 1. Гос. изд-во технико-теоретической лит-ры, М., 1953. 472 с.
8. Р. Галлагер, Метод конечных элементов. Основы. Мир, М., 1984. 428 с.