

М. К. Тлеулинов, Н. Н. Маряхин

СРАВНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ МЕТОДОВ ПРЯМОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ КОЛЕБАНИЙ С ДЕМПФИРОВАНИЕМ

Ключевые слова: естественное демпфирование, искусственное демпфирование, метод Ньюмарка, собственные формы, амплитуда колебаний, ускорения.

Приводятся результаты численного исследования изгибных колебаний с учетом демпфирования с использованием некоторых методов прямого интегрирования и разложения по собственным формам. Показано влияние демпфирования на перемещение, скорости и ускорения.

Keywords: natural damping, artificial damping, Newmark method, its own form, the amplitude, acceleration.

The results of numerical study of flexural vibrations damping considering using some of the methods of direct integration and expansion in their own forms. Shows the effect of damping on the displacement, velocity and acceleration.

При колебаниях реальных объектов наличие естественного демпфирования, скорее, правило, чем исключение. Но при изучении колебаний его часто не учитывают [1,2]. Предполагается, видимо, что оно только понижает амплитуду колебаний и не влияет существенно на другие параметры. Но исследования показывают, что на самом деле картина более сложная, и даже небольшое демпфирование может существенно изменить некоторые характеристики динамической реакции системы.

Многие методы прямого интегрирования уравнений движения обладают так называемым схемным демпфированием, которое называют еще искусственным демпфированием или схемной вязкостью. Оно выражается в том, что из-за особенностей вычислительной схемы самопроизвольно снижается амплитуда колебаний. Этот эффект можно использовать, и схемное демпфирование может в той или иной степени заменить естественное.

Сравним два метода прямого интегрирования, у одного из которых нет искусственного демпфирования, а у другого есть. Это метод Ньюмарка (метод 1) [3] и метод, изложенный в работе [4] (метод 2). Рассмотрим свободные изгибные колебания консольного стержня с постоянной по длине жесткостью и погонной массой. В качестве эталонного возьмем решение, полученное с помощью разложения по собственным формам, поскольку этим способом для указанной конструкции можно получить аналитически точное решение.

Запишем уравнения свободных колебаний стержня в виде

$$(K + aM)U_{k+1} - aM\Delta U_{k+1} = 0, \quad (1)$$

где K – матрица жесткости, M – матрица масс, U_{k+1} – вектор перемещений на $k+1$ -м шаге по времени. Величины a и ΔU_{k+1} определяются соотношениями выбранного метода. Для метода 1:

$$a = \frac{1}{\alpha\Delta t^2}; \quad \Delta U_{k+1} = \frac{1}{\alpha\Delta t^2}U_k + \frac{1}{\alpha\Delta t}\dot{U}_k + \left(\frac{1}{2\alpha} - 1\right)\ddot{U}_k;$$

$$\dot{U}_{k+1} = \frac{\delta}{\alpha\Delta t}(U_{k+1} - U_k) + \left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right)\dot{U}_k + \frac{\Delta t}{2}\left(2 - \frac{\delta}{\alpha}\right)\ddot{U}_k,$$

$$\ddot{U}_{k+1} = a(U_{k+1} - \Delta U_{k+1}),$$

где коэффициенты метода Ньюмарка имеют значения $\alpha = 0,25$, $\delta = 0,5$, при которых искусственное демпфирование отсутствует.

Для метода 2:

$$a = 13/[12\Delta t^2(\alpha_0/3 + \alpha_1 + \alpha_2)].$$

$$U_{k+1} = \frac{12}{13}\Delta t^2\left(\frac{\alpha_0}{3} + \alpha_1 + \alpha_2\right)\ddot{U}_{k+1} + \Delta U_{k+1};$$

$$\dot{U}_{k+1} = \frac{12}{13}\Delta t\left(\frac{\beta_0}{3} + \beta_1 + \beta_2\right)\dot{\ddot{U}}_{k+1} + \Delta\dot{U}_{k+1}.$$

$$\ddot{U}_{k+1} = a(U_{k+1} - \Delta U_{k+1}),$$

Здесь

$$\Delta U_{k+1} = U_k + \dot{U}_k\Delta t + \Delta t^2\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{11}{26}\alpha_0 - \frac{16}{13}\alpha_1 - \frac{42}{13}\alpha_2\right)\ddot{U}_k - \left(\frac{10}{13}\alpha_0 + \frac{4}{13}\alpha_1 - \frac{48}{13}\alpha_2\right)\ddot{\ddot{U}}_{k-1} + \left(\frac{1}{26}\alpha_0 + \frac{8}{13}\alpha_1 - \frac{18}{13}\alpha_2\right)\ddot{\ddot{U}}_{k-2}\right];$$

$$\Delta\dot{U}_{k+1} = \dot{U}_k + \Delta t\left[\left(1 + \frac{11}{26}\beta_0 - \frac{16}{13}\beta_1 - \frac{42}{13}\beta_2\right)\dot{\ddot{U}}_k - \left(\frac{10}{13}\beta_0 + \frac{4}{13}\beta_1 - \frac{48}{13}\beta_2\right)\dot{\ddot{\ddot{U}}}_{k-1} + \left(\frac{1}{26}\beta_0 + \frac{8}{13}\beta_1 - \frac{18}{13}\beta_2\right)\dot{\ddot{\ddot{U}}}_{k-2}\right];$$

$$\alpha_0 = 0,167; \quad \alpha_1 = 0,145;$$

$\alpha_2 = 0,115; \quad \beta_0 = 0,5; \quad \beta_1 = 0,38; \quad \beta_2 = 0,225$. У этого метода есть схемное демпфирование.

Аналитическое решение по i -му тону собственных колебаний с естественным демпфированием представим в виде

$$y_i = e^{-\delta_i v_i t} f_i(z) a_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) \quad (2)$$

Здесь δ_i – логарифмический декремент, v_i – частота, $f_i(z)$ – функция формы, a_i – амплитудный коэффициент, ω_i – круговая частота, φ_i – начальная фаза i -го тона собственных колебаний.

В качестве $f_i(z)$ возьмем функции формы изгибных колебаний консольно закрепленного стержня в пустоте [5]:

$$f_i(z) = (\text{sh } \alpha_i l + \sin \alpha_i l)(\text{ch } \alpha_i z - \cos \alpha_i z) - (\text{ch } \alpha_i l + \cos \alpha_i l)(\text{sh } \alpha_i z - \sin \alpha_i z)$$

где $\alpha_i = \sqrt[4]{\frac{m}{EI_x} \omega_i^2}$, а l - длина стержня.

Для первых трех тонов

$$\alpha_1 l = 1,875; \quad \alpha_2 l = 4,694; \quad \alpha_3 l = 7,855. \quad (3)$$

Общая динамическая реакция системы состоит из реакций, определяемых по уравнениям (2):

$$y(z, t) = \sum_{i=1}^n y_i(z, t) = \sum_{i=1}^n e^{-\delta_i v_i t} f_i(z) a_i \sin(\omega_i t + \varphi_i), \quad (4)$$

где n - число учитываемых форм колебаний.

Амплитудные коэффициенты i -го тона a_i можно определить из начальных условий. Запишем выражение (4) для произвольного сечения $z = z_k$ в начальный момент времени $t = 0$:

$$y_0(z_k) = \sum_{i=1}^n f_i(z_k) a_i \sin \varphi_i. \quad (5)$$

Здесь $y_0(z_k)$ - значения $y(z_k)$ в момент времени $t = 0$.

Для определения n амплитудных коэффициентов a_i необходимо записать уравнения (5) для n сечений. Полученную систему алгебраических уравнений можно представить в матричном виде

$$\mathbf{Y}_0 = \mathbf{F} \mathbf{A}, \quad (6)$$

где

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1(z_1) \sin \varphi_1 & f_2(z_1) \sin \varphi_2 & \dots & f_n(z_1) \sin \varphi_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1(z_n) \sin \varphi_1 & f_2(z_n) \sin \varphi_2 & \dots & f_n(z_n) \sin \varphi_n \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Y}_0 = \begin{bmatrix} y_0(z_1) \\ y_0(z_2) \\ \vdots \\ y_0(z_n) \end{bmatrix}$$

Решив систему (6), определяем амплитуду колебаний:

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{Y}_0 \quad (7)$$

Начальные условия можно задать различным образом, в частности выражением

$$y_0(z) = \frac{q l^4}{24 E I_x} \frac{z^2}{l^2} \left(6 - 4 \frac{z}{l} + \frac{z^2}{l^2} \right), \quad (8)$$

которое соответствует прогибам стержня длиной l , нагруженного постоянной погонной нагрузкой интенсивностью q .

В соответствии с соотношениями (2), скорости \dot{y}_i и ускорения \ddot{y}_i определяются выражениями

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= e^{-\delta_i v_i t} a_i f_i(z) (-\delta_i v_i \sin(\omega_i t + \varphi_i) + \\ &+ \omega_i \cos(\omega_i t + \varphi_i)); \\ \ddot{y}_i &= e^{-\delta_i v_i t} a_i f_i(z) ((\delta_i v_i)^2 - \omega_i^2) \sin(\omega_i t + \varphi_i) - \\ &- 2 \delta_i v_i \omega_i \cos(\omega_i t + \varphi_i). \end{aligned} \quad (9)$$

Поскольку n может быть любым, необходимо определиться с количеством учитываемых форм. Как следует из соотношения (7), для стержней с

постоянной жесткостью и погонной массой при заданных $f_i(z)$ и φ_i соотношение амплитудных коэффициентов a_i/a_j не зависит от конкретных значений $E I_x$ и m , а определяется только характером изменения $y_0(z)$ по длине. Для зависимости (8)

$$\frac{a_2}{a_1} = 0,0141; \quad \frac{a_3}{a_1} = 0,0012,$$

то есть амплитуда второго тона составляет 1,41%, а третьего - 0,12% от амплитуды первого тона. Таким образом, при начальных условиях (8) для определения перемещений с точностью до десятых долей процента достаточно учета первых двух - трех тонов. При рассмотрении соотношений скоростей и ускорений картина меняется. При отсутствии демпфирования, при $\delta_i = 0$, амплитуда скоростей i -го тона будет равна $\omega_i a_i$, а ускорений - $\omega_i^2 a_i$. Таким образом, соотношения амплитуд скоростей будут равны

$$\frac{\omega_2 a_2}{\omega_1 a_1} = 0,088; \quad \frac{\omega_3 a_3}{\omega_1 a_1} = 0,021, \quad (10)$$

а ускорений

$$\frac{\omega_2^2 a_2}{\omega_1^2 a_1} = 0,556; \quad \frac{\omega_3^2 a_3}{\omega_1^2 a_1} = 0,383. \quad (11)$$

Поскольку для стержня с постоянной жесткостью и массой соотношения частот не меняются и однозначно определяются выражениями (3), то выражения (10) и (11) справедливы для любого такого стержня при начальных условиях (8).

Из соотношений (11) видно, что значения ускорений второго тона составляет более половины ускорений первого тона, а третьего - почти 40% от первого. Из этого следует, что на суммарное ускорение в значительной степени влияет ускорение третьего тона. Таким образом, колебания третьего тона, имеющие амплитуду всего 0,12% от амплитуды первого тона, оказывают существенное влияние на величину общего ускорения, определяемого как сумма ускорений всех учитываемых частот.

При наличии демпфирования картина меняется. Проведенные численные исследования показали, что даже при очень небольшом демпфировании, с логарифмическим декрементом колебаний $\delta_i = 0,01$, высокочастотные гармоники подавляются.

На рис. 1 - 4 приведены некоторые результаты расчетов консольно закрепленного стержня с $l = 1$ м, $E I_x = 0,348 \cdot 10^6$ Нм², $m = 108$ кг/м, при начальном прогибе, определяемом выражением (8) при $q = 1$ Н/м. На графиках показаны перемещения, скорости и ускорения концевой точки стержня. Произведено нормирование перемещения относительно его амплитудных значений.

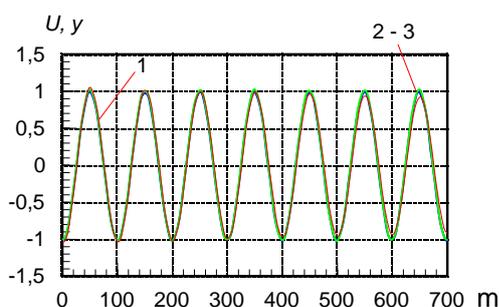


Рис. 1 - Изменение перемещения концевой точки по времени, m – число шагов по времени, величина шага по времени $\Delta t = 0,0003$ с: 1 – решение по собственным формам; 2 – решение по методу Ньюмарка; 3 – решение по методу 2

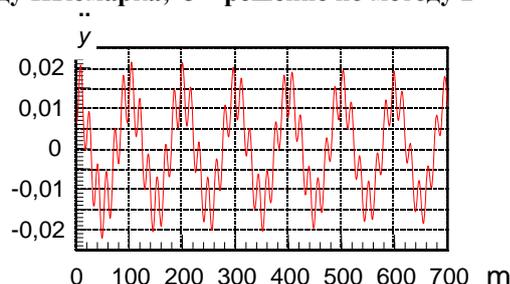


Рис. 2 - Изменение ускорения концевой точки по времени – решение по собственным формам, m – число шагов по времени, величина шага по времени $\Delta t = 0,0003$ с.

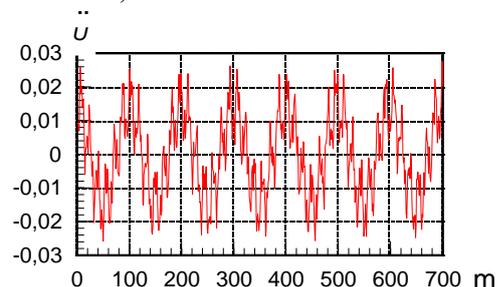


Рис. 3 - Изменение ускорения концевой точки по времени – решение по методу Ньюмарка, m – число шагов по времени, величина шага по времени $\Delta t = 0,0003$ с

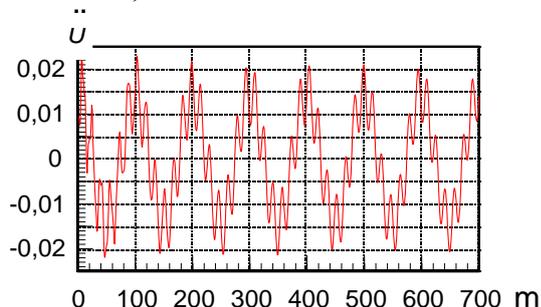


Рис. 4 - Изменение ускорения концевой точки по времени – решение по методу 2, m – число шагов по времени, величина шага по времени $\Delta t = 0,0003$ с

В аналитическом решении с помощью разложения по собственным формам использовались 3 формы, логарифмический декремент колебаний $\delta_i = 0,01$.

Кривые изменения перемещений (рис. 1) и скоростей по времени, полученные разными методами, почти совпадают. Небольшое отличие заключается в том, что у решения по собственным формам есть незначительное демпфирование, а у методов 1 и 2 нет.

В графиках ускорений есть отличия. У аналитического решения (рис.2) и решения по методу 2 (рис.4) заметно демпфирование, которое подавляет высокочастотные гармоники. Так как у метода Ньюмарка, при данных значениях коэффициентов, отсутствует схемное демпфирование, то высокочастотные составляющие спектра сохраняются (рис.3).

Таким образом, можно сделать вывод о том, что в определении перемещений и скоростей метод Ньюмарка и метод 2 идентичны и близки к решению по собственным формам, а при определении ускорений, решение, полученное по методу 2, гораздо ближе к аналитическому. И поскольку величина логарифмического декремента колебаний $\delta_i = 0,01$ соответствует минимальным значениям – в реальности крайне редко встречаются значения меньше – и уже при этом картина ускорений меняется заметно, то следует признать, что при определении ускорений необходимо учитывать демпфирование. Поэтому в этом случае метод 2 можно использовать, а решение по Ньюмарку в части ускорений нельзя признать удовлетворительным.

Литература

1. И.В. Ившин, Разработка виброакустического способа определения технического состояния изделий сложной формы с использованием результатов численного моделирования, Вестник технологического университета, 2, 125-129 (2009);
2. С.И. Вихарев, В.П. Сиваков, Е.Г. Сафронов, Ю.С. Вихарева, Динамические испытания машин – эффективный способ оценки их технического состояния, Вестник технологического университета, 16, 24, 102-104 (2013);
3. К. Бате, Е. Вилсон, Численные методы анализа и метод конечных элементов, Стройиздат, М., 1982. 448 с.
4. М.К. Тлеулинов, О методах прямого интегрирования в динамических задачах строительной механики // Изв. вузов. Авиационная техника. №2, 20-23 (2009).
5. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах, том 3, под редакцией И.А.Биргера и Я.Г. Пановко, Машиностроение, М., 1968. 568 с.