*УДК 539.3*

**М. Н. Серазутдинов, М. Н. Убайдуллоев, М. К. Сагдатуллин**

# ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

*Ключевые слова: тонкостенные стержневые системы, напряженно-деформированное состояние, принцип Лагранжа, вариационный метод.*

*В данной статье излагается вариационный метод расчета тонкостенных стержневых систем открытого профиля. На основе изложенного метода создана компьютерная программа, позволяющая определять напряженно-деформированное состояние тонкостенных стержневых конструкций открытого профиля. Для оценки достоверности предлагаемой методики приведены результаты решения тестовых задач.*

*Keywords: thin-walled beams systems, stress-strain state, Lagrange principle, variational method.*

*In this article presents the variation method of calculation of the of thin-walled open profile beams systems. On the basis of the stated method the computer program, allowing to define stress-strain state of thin-walled open profile beams systems, is made. For an assessment of reliability of an offered technique results of the solution of test tasks are given.*

В настоящее время при строительстве быстровозводимых зданий и сооружений, а также при реконструкции и усилении существующих сооружений широкое применение получили легкие стальные тонкостенные конструкции. Как известно [1, 2] теории расчета обычных конструкций не применимы для стержней тонкостенного профиля.

Вопросам напряженно-деформированного состояния и устойчивости тонкостенных конструкций посвящены исследования [1 – 6].

В работах [4, 5] рассмотрены новые тонкостенные конечные элементы, отличающиеся количеством степеней свободы, зависящим от степени аппроксимации функций деформаций. В статье [4] реализована алгоритм расчета тонкостенных стержневых систем по полусдвиговой и бессдвиговой теориям методом конечных элементов.

Численный метод анализа напряженно-деформированного состояния тонкостенных стержневых систем открытого и замкнутого профиля рассмотрено в работе [5]. В данной работе используется полусдвиговая теория В.И. Сливкера, где учитывается только часть деформации сдвига, возникающая при кручении.

В данной статье излагается вариационный метод расчета тонкостенных стержневых систем открытого профиля. Для определения напряженно-деформированного состояния стержневой системы используется вариационный принцип Лагранжа и его реализация, описанная в работах [7 - 10]. Отличительной особенностью предлагаемого метода заключается в том, что он основан на простейших деформационных соотношениях для прямолинейного стержня и позволяет рассчитывать сложные стержневые системы, элементами которых могут быть и криволинейные естественно закрученные стержни.

При определении напряженно-деформированного состояния стержней при изгибе и при кручении применяются следующие основные гипотезы теории Тимошенко и гипотезы, принятые в теории тонкостенных стержней с учетом сдвигов [2]:

- гипотеза неизменяемости контура, в соответствии с которой профиль стержня в плоскости поперечного сечения перемещается как абсолютно твердое тело;
- гипотеза ненадавливания, согласно которой продольные волокна тонкостенного стержня не взаимодействуют друг с другом в перпендикулярных к ним направлениях;
- гипотеза безмоментности оболочки, согласно которой, составляющие касательных напряжений, перпендикулярные к профилю поперечного сечения стержня (к срединной поверхности) равны нулю;
- гипотеза плоских сечений, согласно которой, поперечные сечения стержня, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации;
- изгибные напряжения, возникающие в плоскости проходящей через главную ось поперечного сечения стержня, постоянны по ширине сечения;
- гипотеза о линейном законе распределения напряжений по толщине оболочки.

Напряженно-деформированное состояние тонкостенной стержневой системы определяется вариационным методом. Для определения перемещений в элементах используется вариационное соотношение:

$$\delta U - \delta W = 0\,, \qquad (1)$$

где $\delta U$ - вариация потенциальной энергии деформации стержневой системы; $\delta W$ - вариация работы внешних нагрузок.

При определении деформаций и напряжений, вводится декартовая система координат $0xyz$, с осью $Ox$, перпендикулярной к плоскости поперечного сечения (рис. 1).

Входящую в условие (1) вариацию потенциальной энергии деформаций тонкостенной стержневой системы, в соответствии с [3], записываем в виде:

$$\delta U = \int_{l_c} \iint_{A} \left[ E\varepsilon_x \, \delta\varepsilon_x + G\gamma^*_{xy_t} \, \delta\gamma^*_{xy_t} \right] dA \, dl \, . \qquad (2)$$

Здесь $l_c$, $A$ – длина и площади сечений элементов стержневой системы; $E$, $G$ - соответственно, модули упругости и сдвига материала; $\varepsilon_x$, $\gamma^*_{xy_t}$ - деформации, определяемые в фиксированной точке $M$, в локальной системе координат, с осями $My_t$, $Mz_t$, направленные по касательной и по нормали к профилю стержня (рис. 1).

Особенностью выражения для потенциальной энергии деформации (2) является то, что в нем входит деформация $\gamma^*_{xy_t}$, выражение для которой отличается от выражения $\gamma_{xy}$, известного в теории тонкостенных стержней [2].

При решении задачи входящие в (2) деформации $\varepsilon_x$, $\gamma^*_{xy_t}$ вычисляются на основе методики, которая изложена в статье [7].

Если деформации, возникающие в материале, упругие, то напряжения определяются по закону Гука:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \, , \qquad \tau^*_{xy_t} = G\gamma^*_{xy_t} \, . \qquad (3)$$

где

$$\gamma^*_{xy_t} = \gamma \ + \gamma^k_{xy_t} \qquad (4)$$

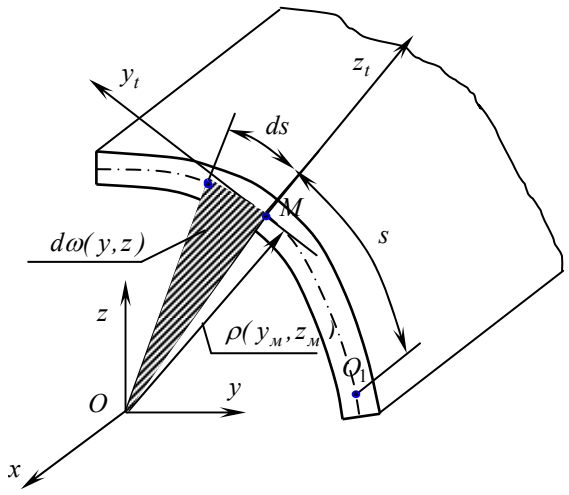


**Рис. 1**

В выражениях (3) и (4) $\gamma$ - постоянное по толщине стенки усредненный сдвиг; $\gamma^k_{xy_t}$ - сдвиг при чистом кручении, распределенное по толщине стенки по линейному закону.

Деформации $\varepsilon_x$, $\gamma$, $\gamma^k_{xy_t}$ определяются по соотношениям

$$\varepsilon_x = \frac{du_1(x)}{dx} + z\frac{d\varphi_2(x)}{dx} - y\frac{d\varphi_3(x)}{dx} - \frac{d\beta(x)}{dx}\,\omega(s)$$

$$\gamma = \frac{du_2(x)}{dx}t_y + \frac{du_3(x)}{dx}\,t_z + \frac{d\varphi_1(x)}{dx}\,\rho(y_м, z_м) +$$

$$+\varphi_2(x)t_z - \varphi_3(x)t_y - \beta(x)\rho(y_м, z_м) \, , \qquad (5)$$

$$\gamma^k_{xy_t} = k^* \frac{d\varphi_1(x)}{dx} z_t \, .$$

Здесь

$$y = y_м + y_t\, t_y + z_t\, t_z \, , \qquad z = z_м + y_t\, t_z - z_t\, t_y \, ,$$

$$t_y = \frac{dy}{ds} \, , \qquad t_z = \frac{dz}{ds} \, .$$

$u_1(x), u_2(x), u_3(x)$, $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$ - перемещения и углы поворота поперечных сечений стержня относительно осей $Ox$, $Oy$, $Oz$; $\beta(x)$ - функция меры депланации; $y, z$ - главные центральные оси инерции поперечного сечения стержня; $\rho(y_м, z_м) = y_м\, t_z - z_м\, t_y$ – длина перпендикуляра, проведенного из начала координат $Oxyz$ к касательной к линии $O_1M$ в точке $M$; $\omega(y,z) = \omega(s) = \int_o^s \rho\, ds$ – секториальная площадь профиля; $t_y$, $t_z$ - направляющие косинусы осей $My_t$, $Mz_t$; $k^*$ - поправочный коэффициент.

Введение поправочного коэффициента $k^*$ в выражение для $\gamma^k_{xy_t}$ объясняется тем, что в соответствии с [2], при чистом кручении узкой полосы, касательные напряжения $\tau_{xy_t}$ и $\tau_{xz_t}$ вносят одинаковый вклад в величину момента чистого кручения $H$. Следовательно

$$H = \iint_A (\tau^k_{xy_t}\, z_{ti})dA + \iint_A (\tau^k_{xz_t} y_{ti})\, dA \, , \qquad (6)$$

причем

$$\iint_A (\tau^k_{xy_t}\, z_{ti})dA = \iint_A (\tau^k_{xz_t} y_{ti})\, dA$$

Так как принята гипотезе о безмоментности, и полагается $\tau_{xz_t} = 0$, то получается, что момент чистого кручения в теории тонкостенных стержней будет создаваться только напряжением $\tau_{xy_t}$ и справедливо равенство

$$\iint_A (\tau^k_{xy_t}\, z_{ti})dA = \frac{1}{2} H \, .$$

Для компенсации отсутствия напряжения $\tau_{xz_t}$ в выражениях для потенциальной энергии деформации (2) и для момента чистого кручения, в формуле (5) для $\gamma^k_{xy_t}$ вводится коэффициент $k^* = 2$.

При решении задачи, вводится глобальная ортогональная система координат $0\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ в котором определяются векторы перемещений $\tilde{u} = \{\tilde{u}_1(x), \tilde{u}_2(x), \tilde{u}_3(x)\}^{\mathrm{T}}$, углов поворота $\tilde{\varphi} = \{\tilde{\varphi}_1(x), \tilde{\varphi}_2(x), \tilde{\varphi}_3(x)\}^{\mathrm{T}}$ и меры депланации $\tilde{\beta} = \{-\tilde{\beta}(x), \ 0, \ 0\}^{\mathrm{T}}$ поперечных сечений стержня.

Перемещения, углы поворота, мера депланации в локальной и глобальной системах координат связаны соотношениями

$$u_j = \sum_{k=1}^{3} z_{jk}\widetilde{u}_k\ , \qquad \varphi_j = \sum_{k=1}^{3} z_{jk}\widetilde{\varphi}_k\ ,$$

$$\beta_j = \sum_{k=1}^{3} z_{jk}\widetilde{\beta}_k\ , \quad j = 1, 2, 3\ , \tag{7}$$

где $z_{jk}$ – направляющие косинусы локальной системы координат.

Вариация работы распределенных и сосредоточенных внешних сил имеет вид:

$$\delta W = \int_{l_C} \Big[\widetilde{q}_1(x)\delta\widetilde{u}_1(x) + \widetilde{q}_2(x)\delta\widetilde{u}_2(x) + \widetilde{q}_3(x)\delta\widetilde{u}_3(x) + \\ + \widetilde{m}_1(x)\delta\widetilde{\varphi}_1(x) + \widetilde{m}_2(x)\delta\widetilde{\varphi}_2(x) + \widetilde{m}_3(x)\delta\widetilde{\varphi}_3(x) - \\ \widetilde{m}_B(x)\delta\widetilde{\beta}(x)\Big]dl + \sum_{k=1}^{K}\Big[\widetilde{F}_{1k}\delta\widetilde{u}_1(x_k) + \widetilde{F}_{2k}\delta\widetilde{u}_2(x_k) + \\ + \widetilde{F}_{3k}\delta\widetilde{u}_3(x_k)\Big] + \sum_{j=1}^{J}\Big[\widetilde{M}_{1j}\delta\widetilde{\varphi}_1(x_j) + \widetilde{M}_{2j}\delta\widetilde{\varphi}_2(x_j) + \\ + \widetilde{M}_{3j}\widetilde{\varphi}_3(x_j) + \widetilde{M}_{Bj}\delta\widetilde{\beta}(x_j)\Big], \tag{8}$$

где $\widetilde{q}_1(x)$, $\widetilde{q}_2(x)$, $\widetilde{q}_3(x)$, $\widetilde{m}_1(x)$, $\widetilde{m}_2(x)$, $\widetilde{m}_3(x)$ – проекции на оси $\widetilde{O}\widetilde{x}, \widetilde{O}\widetilde{y}, \widetilde{O}\widetilde{z}$ глобальной системы координат распределенных по длине стержня сил и моментов, $\widetilde{m}_B(x)$ – поекция бимоментной распределенной нагрузки на ось; $\widetilde{F}_{1k}, \widetilde{F}_{2k}, \widetilde{F}_{3k}$ – проекции сосредоточенных сил, приложенных в точках продольной оси стержня с координатой $x_k$; $\widetilde{M}_{1j}, \widetilde{M}_{2j}, \widetilde{M}_{3j}, \widetilde{M}_{Bj}$ – то же, моментов, действующих в точках с координатой $x_j$.

Компоненты вектора перемещений $\widetilde{u}$, углов поворота $\widetilde{\varphi}$ и меры депланации $\widetilde{\beta}$ на каждом участке стержневой системы представляются в виде следующих рядов:

$$\widetilde{u}_k = \widetilde{u}_k^i = \sum_{m=1}^{M} C_{km}^i f_m(t),$$

$$\widetilde{\varphi}_k = \widetilde{\varphi}_k^i = \sum_{m=1}^{M} D_{km}^i f_m(t), \quad \widetilde{\beta}_k = \widetilde{\beta}_k^i = \sum_{m=1}^{M} B_{km}^i f_m(t). \tag{9}$$

Здесь $f_m(t)$ – функция формы, определяемая выражениями

$$f_1(t) = 1 - 3t^2 + 2t^3, \qquad f_3(t) = t\left(1 - t^2\right)l\ ,$$

$$f_4(t) = \left(t^3 - t^2\right)l\ , \qquad f_m(t) = (1-t)^2\, t^{(m-3)}\ ,$$

где $m = \overline{5, M}$, $t = x / l_i$ $(0 \le t \le 1)$; $x$ – длина продольной оси стержня, отсчитываемая, от начала участка до рассматриваемой точки; $l_i$ – длина участка стержня; $k = 1, 2, 3$; $i = \overline{1, N}$.

После подстановки в условие (1) выражений вариации потенциальной энергии (2), вариации работы внешних сил (8), с учетом соотношений (7), (9) получим систему алгебраических уравнений

$$[K]\{C\} = \{F\}, \tag{10}$$

где $[K]$- матрица жесткости стержневой конструкции; $\{C\}$- вектор неизвестных коэффициентов $C_{km}^i$, $D_{km}^i$, $B_{km}^i$ где $C_{km}^i = \left\{C_{k1}^i, C_{k2}^i, C_{k3}^i\right\}^{\mathrm{T}}$; $D_{km}^i = \left\{D_{k1}^i, D_{k2}^i, D_{k3}^i\right\}^{\mathrm{T}}$; $B_{km}^i = \left\{B_{k1}^i, 0, 0\right\}^{\mathrm{T}}$; $\{F\}$ - вектор, зависящий от внешних нагрузок.

При вычислении интегралов, входящих в вариационное уравнение (1), используется численное интегрирование с использованием формулы Гаусса. Интегрирование проводится по длине стержней и по площади их поперечных сечений, согласно методике, описанное в [10].

Решая систему уравнений (8) находим неизвестные коэффициенты $C_{km}^i$, $B_{km}^i$ и $D_{km}^i$. Затем, по формулам (7), (9) определяются перемещения и с использованием соотношений (3) и (5) вычисляются деформации и напряжения.

Внутренние усилия и моменты, возникающие в поперечных сечениях тонкостенного стержня, вычисляются по формулам:

$$N = \iint_A \sigma_x\ dA\ , \quad Q_y = \iint_A \tau\ t_y dA, \quad Q_z = \iint_A \tau\ t_z dA,$$

$$M_y = \iint_A \sigma_x\, z\, dA\ , \qquad M_z = \iint_A \sigma_x\, y\, dA$$

$$H = k^* \iint_A \tau^*_{xy_t} z_t dA\ , \quad M_\omega = \iint_A (\tau\ t_z y - \tau\ t_y z) dA\ ,$$

$$B_\omega = \iint_A \sigma_x\, \omega\, dA\ . \tag{11}$$

В соотношениях (11) касательные напряжения $\tau$ определяется по формуле, которое получено на основе уравнений равновесии отсеченной части стержня

$$\tau(s) = \frac{d^2u_1(x)}{dx^2}\, A_o(s) + \frac{d\varphi_2(x)}{dx^2}\, S_{oy}(s) + \\ - \frac{d^2\varphi_3(x)}{dx^2}\, S_{oz}(s) - \frac{d^2\beta(x)}{dx^2}\, S_{o\omega}(s)$$

Здесь

$$S_{oy} = \iint_{A_o} z\, dA, \quad S_{oz} = \iint_{A_o} y\, dA, \quad S_{o\omega} = \iint_{A_o} \omega\, dA\ ,$$

где $A_o$ - площадь отсеченной части сечения.

Для оценки достоверности предлагаемой методики приведем нижеследующие тестовые примеры.

Представим данные расчетов статически определимого и статически неопределимого стержней, представленных на рис. 2,а,б. Сечение стержней и геометрические характеристики сечения приведены на рис. 2,в и в таблице 1. Характеристики материала стержней: $E = 2.1 \cdot 10^5$ *мПа*, $G = 8.1 \cdot 10^4$ *мПа*. Интенсивность

распределенной нагрузки $q = 0{,}01\ кН/м$, эксцентриситет приложения распределенных нагрузок $e = 0{,}0335\ м$.

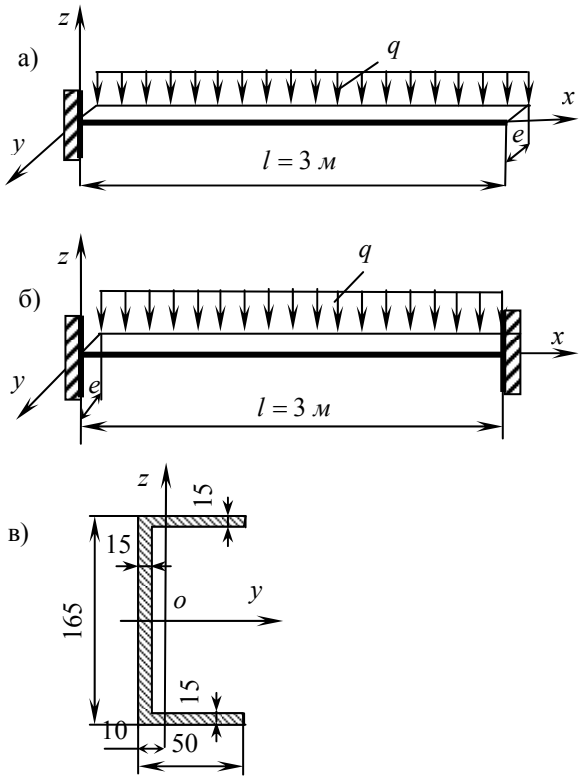


**Рис. 2 - Расчетная схема статически определимого (а) и неопределимого (б) стержней; сечение стержней (в)**

**Таблица 1**

| | | |
|---|---|---|
| Момент инерции при свободном кручении | $J_d$, $м^4$ | $0{,}028125 \cdot 10^{-8}$ |
| Секториальный момент инерции | $J_\omega$, $м^6$ | $351{,}5625 \cdot 10^{-12}$ |
| Осевой момент инерции | $J_x$, $м^4$ | $126{,}5625 \cdot 10^{-8}$ |

Результаты расчета статически определимого и неопределимого стержней приведены в таблице 2. Для сравнения в таблице также приведены результаты расчетов указанных стержней по методике, изложенное в [4], и по технической теории З.В. Власова [6]. Из сравнения приведенных результатов видно, что данные, полученные по предлагаемой методике совпадают с результатами расчетов, полученные в работе [4] и с результатами, полученными по теории З.В. Власова (наибольшее расхождение результатов не превышает 4 %).

**Таблица 2**

| Статически определимый стержень | | | |
|---|---|---|---|
| Определяемые параметры | $\varphi_{x,\max}$ $рад.$ | $\beta_{max}$ $1/м$ | $B_{\omega,max}$ $кН \cdot м^2$ |
| По предлагаемому методу | 0,0226 | 0,00857 | 0,000993 |
| По технической теории В.З. Власова | 0,0225 | 0,00856 | 0,000993 |
| Статически неопределимый стержень | | | |
| Координаты сечения стержня | При $l = 0$ | При $l = 0.75\ м$ | При $l = 1.5\ м$ |
| Определяемые параметры | $B_\omega$ $кН \cdot м^2$ | $\beta$ $1/м$ | $B_\omega$ $кН \cdot м^2$ |
| По предлагаемому методу | -0,00024 | 0,000897 | 0,000116 |
| По методике, изложенное в [4] | -0,00023 | 0,00091 | 0,0001165 |
| По технической теории В.З. Власова | -0,00024 | 0,000917 | 0,000115 |

Выполнен расчет консольного криволинейного стержня (рис. 3,а), загруженного сосредоточенным моментом $M = 10\ кН \cdot м$. Форма сечения стержня, её геометрические характеристики и характеристики материала стержня приведены на рис. 3,б и в таблице 3.

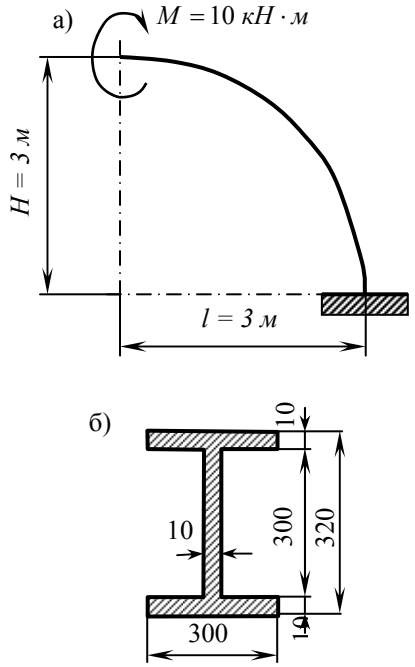


**Рис. 3 - Расчетная схема (а) и размеры сечения криволинейного стержня (б)**

**Таблица 3**

| | | |
|---|---|---|
| Модуль упругости материала | $E$, *мПа* | $2.1\cdot10^{5}$ |
| Модуль сдвига | $G$, *мПа* | $8.1\cdot10^{4}$ |
| Момент инерции при свободном кручении | $J_d$, $м^4$ | $0{,}336\cdot10^{-6}$ |
| Секториальный момент инерции | $J_\omega$, $м^6$ | $1{,}081\cdot10^{-6}$ |
| Осевой момент инерции | $J_x$, $м^4$ | $1{,}667\cdot10^{-4}$ |

Результаты расчетов приведены в таблице 4. В этой таблице приведены максимальные значения угла закручивания, крутящего момента и бимомента в сечениях рассматриваемого стержня. Для сопоставления в указанной таблице также приведены результаты расчета заданного стержня по программе ANSYS. Наибольшее расхождение результатов, как это видно из таблицы, находится в пределах 1,5% .

**Таблица 4**

| Определяемые параметры | $\varphi_{x,\max}$ *рад.* | $M_{к,max}$ $кН\cdot м$ | $B_{\omega,max}$ $кН\cdot м^2$ |
|---|---|---|---|
| По предлагаемому методу | 0,4938 | 10,0 | 15,0 |
| По программе ANSYS | 0,4984 | 10,0 | 15,179 |

## Выводы

- Полученные расчетные данные по предлагаемой методике совпадают с результатами расчетов по технической теории З.В.Власова и с результатами, полученными с помощью программы ANSYS;
- Результаты расчетов показывают, что изложенное в [7] метод расчета криволинейных, естественно-закрученных стержней, основанного на простейших деформационных соотношениях для прямолинейного стержня, можно распространить и для тонкостенных стержней, поперечное сечение которых составлено как из прямолинейных, так и криволинейных участков.

## Литература


1. *Власов В.З.* Тонкостенные упругие стержни. М.: Физматгиз, 1959. 566 с.
2. *Сливкер В.И.* Строительная механика. Вариационные основы. Учебное пособие. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2005. – 736 с.
3. *Серазутдинов М.Н.* Вариационные соотношения теории тонкостенных стержней открытого профиля / М.Н. Серазутдинов // Вестник Казанского Технологического Университета, Казань. 2013. № 5. - С. 216-223.
4. *Лалин В.В.* Исследование конечных элементов для расчета тонкостенных стержневых систем / В.В. Лалин, В.А. Рыбаков, С.А. Морозов // Инженерно-строительный журнал. 2012. № 1(27). С. 53-73.
5. *Рыбаков В.А.* Применение полусдвиговой теории В.И. Сливкера для анализа напряженно-деформированного состояния систем тонкостенных стержней / Дисс. канд. техн. наук : 01.02.04. Санкт-Петербург, 2012. 184 с.
6. *Смирнов А.Ф.* Сопротивление материалов. Учебник для вузов. / Под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Высшая школа, 1989. – 600 с.
7. *Серазутдинов М.Н.* Метод расчета криволинейных стержней. / М.Н. Серазутдинов, Ф.С. Хайруллин // Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1991. № 5. С. 104 – 108.
8. *Серазутдинов М.Н.* Расчет усиливаемых нагруженных конструкций вариационным методом /М.Н. Серазутдинов, М.Н. Убайдуллоев, Х.А. Абрагим // Изв. вузов. Строительство. 2010. № 7. С. 118 – 123.
9. *М.Н. Серазутдинов,* Влияние монтажных сил на несущую способность усиливаемых стержневых систем. / М.Н. Серазутдинов., М.Н. Убайдуллоев, А.Х. Абрагим // Вестник Казанского технологического университета. 2011 г. № 10. С. 116 – 124 .
10. *М.Н. Серазутдинов.* Повышение несущей способности усиливаемых нагруженных конструкций / М.Н. Серазутдинов, М.Н. Убайдуллоев, Х.А. Абрагим // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений: обзорно-аналит. и научно-технич. журн. – М.: - РУДН, 2011. – № 3. – С. 23-30.



**© М. Н. Серазутдинов -** д-р физ. мат. наук, проф. зав. каф. теоретической механики и сопротивления материалов КНИТУ, serazmn@mail.ru; **М. Н. Убайдуллоев -** канд. техн. наук, доцент той же кафедры, madgidpwn@rambler.ru; **М. К. Сагдатуллин -** канд. техн. наук, доцент той же кафедры.