

А. В. Чупаев, Р. Р. Галямов, А. А. Гайнуллина,
В. В. Кузьмин

АНАЛИЗ ТУРБУЛЕНТНОГО ЗАКРУЧЕННОГО ПОТОКА НА НАЧАЛЬНОМ УЧАСТКЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО КАНАЛА

Ключевые слова: закрученный поток, цилиндрический канал, пограничный слой.

Проведен анализ турбулентного течения несжимаемой жидкости в длинной цилиндрической трубе за местным закручивающим устройством с позиции представления теории пограничного слоя и гипотезы Л.Прандтля о длине пути перемешивания.

Keywords: swirling flow, cylindrical channel, the boundary layer.

The analysis of the turbulent flow of an incompressible fluid in a long cylindrical tube for local swirling device with position representation of boundary layer theory and hypotheses about L.Prandtya mixing length.

Исходя из теоретических предпосылок, подтвержденных результатами ряда исследователей [1-6] для расчета принята схема течения, представленная на рис. 1.

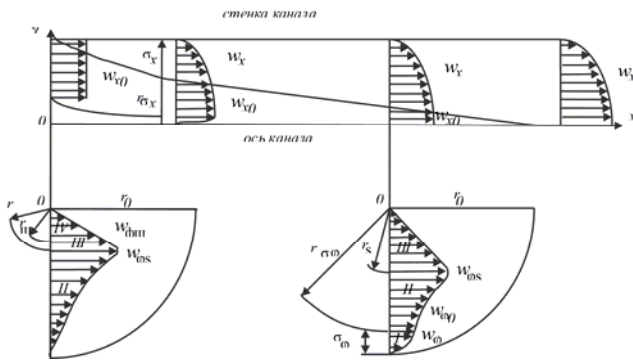


Рис. 1 - Расчетная схема течения, принятая для аналитического исследования

За пределами пограничного слоя поток делится на две зоны с индивидуальными законами распределения тангенциальной компоненты вектора скорости: в области поперечного сечения от оси до некоторого радиуса r_s , соответствующего координате максимума профиля скоростей, вращательное движение принято происходящим по закону:

$$\frac{w_y}{r} = \text{const},$$

а в области, заключенной между r_s и внешней границей пограничного слоя

$$w_y \cdot r = \text{const},$$

При этом допускалось, что перераспределение окружных скоростей от одной закономерности к другой осуществляется в тонком слое, толщиной которого можно пренебречь.

Для рассматриваемой разновидности течения уравнения движения имеет вид:

$$\frac{dR_x^{**}}{dx} = \frac{\frac{C_{fx}}{2} \cdot w_a \psi_{xy} R_{x1} - \frac{R_x^{**}}{w_0} (1+H) \times}{1 + \frac{R_x^{**}}{w_0} (1+H) \frac{4H}{R_{x1}}} \times \frac{4R_x^{**}}{R_{x1}} \frac{dH}{dx} + \frac{1}{w_0 w_{x0} \mu r_0} \frac{d}{dx} \int_0^{r_0} \left(-\frac{\rho w_y^2}{2} \right) r dr \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dR_x^{**}}{dx} = & -R_y^{**} \frac{d}{dx} (\ln w_{y0}) - \frac{d}{dx} (R_x^{**} H) - \\ & - H R_x^{**} \frac{d}{dx} (\ln w_{y0}) + \frac{d}{dx} \frac{w_{x0} \delta_y (1 - \frac{\delta_y}{2r_0})}{\nu} + \\ & + \frac{w_{x0} \delta_y (1 - \frac{\delta_y}{2r_0})}{\nu} \frac{d}{dx} (\ln w_{y0}) + \frac{C_{fx}}{2} R_{x1} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{dw_0}{d\bar{x}} = & \frac{w_0}{R_x^{**} (1+H)} \left[\frac{C_{fx}}{2} R_{x1} - \frac{dR_x^{**}}{d\bar{x}} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{w_{x0} \mu r_0} \frac{d}{dx} \int_0^{r_0} \left(-\frac{\rho w_y^2}{2} \right) r dr \right] \end{aligned} \quad (3)$$

$$1 - \frac{4H_1 R_x^{**}}{R_{x1}} = \int_0^{r_0} \frac{4\rho w_{x0} r dr}{\mu g r_0 R_{x1}} - 4H \frac{R_x^{**}}{R_{x1}} \quad (4)$$

Следуя гипотезе Л.Прандтля, выражение для касательного напряжения в рассматриваемом случае можно представить выражением:

$$\tau_\Sigma = \rho l^2 \left(\frac{\partial w_\Sigma}{\partial y} \right)^2$$

Учитывая, что $w_\Sigma = \sqrt{w_x^2 + w_y^2}$ и

$$\tau_\Sigma = \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2},$$

С учетом $\frac{\tau_y}{\tau_x} = \frac{w_y}{w_x}$ из (4) получаем:

$$\tau_x = \rho l^2 \sqrt{1 + \left(\frac{w_y}{w_x}\right)^2} \left(\frac{dw_x}{dy}\right)^2 \quad (5)$$

$$\tau_y = \sqrt{1 + \left(\frac{w_x}{w_y}\right)^2} \left(\frac{1}{r} \frac{dw_y}{dr}\right)^2 \quad (6)$$

Коэффициенты трения в осевом и закрученном потоках связаны со своими значениями касательных напряжений и скоростей в потенциальной части течения зависимостями:

$$\frac{C_{fx}}{2} = \frac{\tau_x}{\rho w_{x0}^2}, \quad \frac{C_{fy}}{2} = \frac{\tau_y}{\rho w_{x0} w_{y0}} \quad (7)$$

В работе [7] на базе прямых измерений профилей скорости показано, что отношение величин осевой и тангенциальной составляющих скоростей остаются постоянными по сечению пограничного слоя и равными своему значению на внешней границе пограничного слоя, т.е.:

$$\frac{w_y}{w_x} = \frac{w_{y0}}{w_{x0}} \quad (8)$$

Принимая двухслойную модель пограничного слоя из (5), (6) с учетом (7) и (8) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{C_{fx}}{2} &= \left[\frac{\int_{\xi_1}^1 \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} dw}{\int_{\xi_1}^1 \sqrt{\frac{\tau_x}{\tau_0}} \frac{d\xi_x}{\chi \xi_x}} \right]^2 \sqrt{1 + \left(\frac{w_{y0}}{w_{x0}}\right)^2}, \\ \frac{C_{fy}}{2} &= \left[\frac{\int_{r_1}^1 \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}} dr}{\int_{\xi_1}^1 \sqrt{\frac{\tau_y}{\tau_0}} \frac{d\xi_y}{\chi \xi_y}} \right]^2 \frac{w_{y0}}{w_{x0}} \sqrt{1 + \left(\frac{w_{x0}}{w_{y0}}\right)^2} \quad (9) \end{aligned}$$

Следовательно:

$$\begin{aligned} \frac{C_{fx}}{2} &= \frac{C_{fx0}}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{w_{y0}}{w_{x0}}\right)^2}, \\ \frac{C_{fy}}{2} &= \frac{C_{fy0}}{2} \frac{w_{y0}}{w_{x0}} \sqrt{1 + \left(\frac{w_{x0}}{w_{y0}}\right)^2} \quad (10) \end{aligned}$$

Замечая, что коэффициенты трения в стандартных условиях обратно пропорциональны корню четвертой степени из числа Рейнольдса, приближенно можно допустить, что:

$$\frac{C_{fy0}}{C_{fx0}} = \left(\frac{w_{x0}}{w_{y0}}\right)^{0.25}$$

Интегрируя (9) в пределах от 0 до δ , получаем выражения, определяющие распределение осевой составляющей скорости по сечению турбулентного ядра пограничного слоя, а также циркуляции в его тангенциальном аналоге:

$$w = 1 + \frac{1}{\chi} \sqrt{\frac{C_{fx0}}{2}} \ln \xi_x,$$

$$r = 1 + \frac{1}{\chi} \sqrt{\frac{C_{fy0}}{2}} \ln \xi_y \quad (11)$$

Справедливость, которых в рассматриваемом случае подтверждается сравнением с экспериментальными результатами [8], [9] и авторов на рис. 2 и 3.

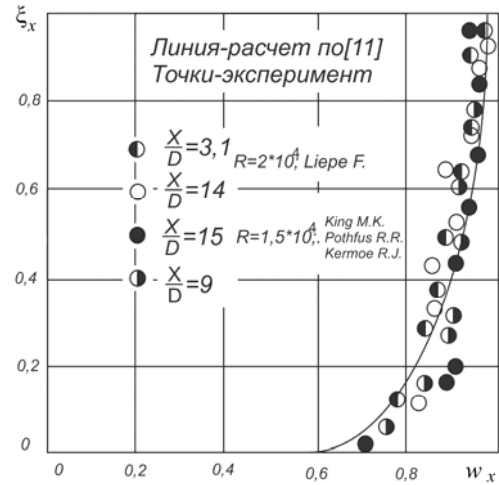


Рис. 2 - Профиль осевой составляющей скорости в пограничном слое

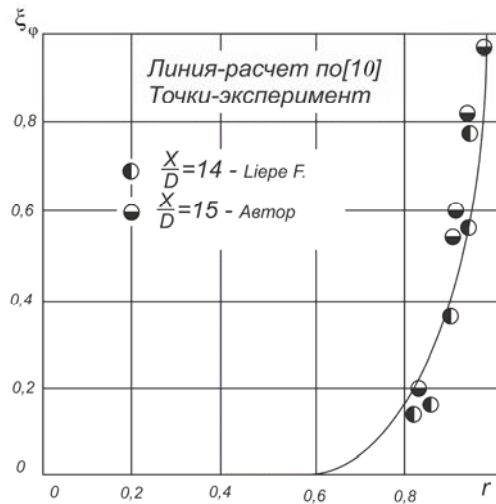


Рис. 3 - Профиль циркуляции в пограничном слое

Закон трения для пограничного слоя представим в виде:

$$\frac{C_{f\Sigma}}{2} = \frac{C_{f0}}{2} \Psi_{\Sigma y} = \frac{C_{f0}}{2} \psi_{xy} \psi'_y \quad (12)$$

$$\text{где } \frac{C_{f0}}{2} = \left(\frac{1}{\eta - \frac{1}{\chi} \ln \xi_1} \right)^2 - \text{локальный коэффициент}$$

трения на участке гидродинамической стабилизации невозмущенного турбулентного потока в осесимметричном канале, а функции:

$$\Psi_{\Sigma y} = \frac{C_{f\Sigma}}{C_{f0}};$$

$$\Psi_{xy} = \frac{C_{fx}}{C_{fx0}} = \sqrt{1 + \left(\frac{w_{y0}}{w_{x0}}\right)^2};$$

$$\Psi'_y = \frac{C_{fy}}{C_{fx0}} = \sqrt{1 + \left(\frac{w_{y0}}{w_{x0}}\right)^2} \quad (13)$$

учитывают индивидуальный и совокупный вклад осевой и окружной составляющих движения на величину локального коэффициента трения $C_{f\Sigma}$ в закрученном потоке.

Зависимость значений Ψ_{XY} , Ψ'_y и $\Psi_{\Sigma y}$ от степени закрученности потока иллюстрируется графиками на рис. 4. для решения системы (1) – (9) необходимо знать характеристики пограничного слоя.

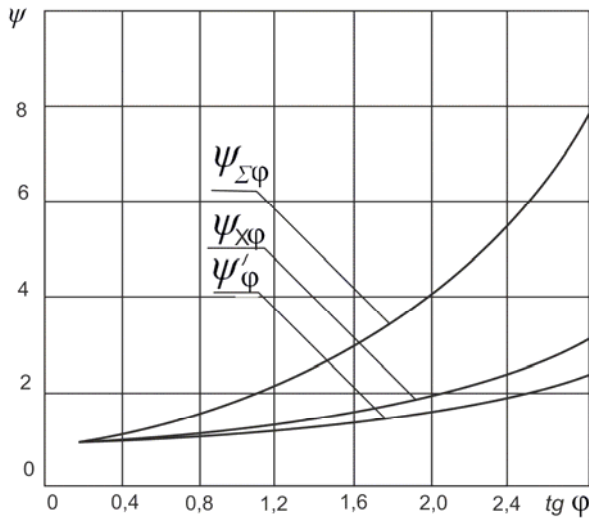


Рис. 4 - Результаты расчета знаменателя в выражении (20) по опытным данным [8], [9] и автора

Представив толщину потери импульса в закрученном потоке соотношением:

$$\frac{\delta^{**}y}{\delta y} = \int_0^1 \frac{w_x}{w_{x0}} (1 - \tilde{A}) \left(1 - \frac{y}{\delta y}\right) d\xi_y \quad (14)$$

и интегрируя его с учетом (11) получаем:

$$\left(\frac{\delta^{**}}{\delta}\right)_y = z_y(1 - z_x) - z_y z_x +$$

$$+ z_y z_x \ln \frac{\delta y}{\delta x} - \frac{\delta y}{r_0} \times$$

$$\div \left[\frac{z_y}{4} (1 - z_x) + \frac{z_y}{4} z_x \ln \frac{\delta y}{\delta x} \right] \quad (15)$$

$$\text{где } z_y = \frac{1}{\chi} \sqrt{\frac{C_{fy0}}{2}}; \quad z_x = \frac{1}{\chi} \sqrt{\frac{C_{fx0}}{2}}.$$

Выражение (14) позволяет найти связь между толщиной тангенциального пограничного слоя и числами Рейнольдса, определяющими гидрогазомеханическую картину течения в целом. Если ввести обозначения:

$$A = z_y(1 - z_x) - z_y z_x + z_y z_x \ln \frac{\delta y}{\delta x},$$

$$B = \frac{z_y}{4} (1 - z_x) + \frac{z_y}{4} z_x \ln \frac{\delta y}{\delta x}.$$

то из (15) следует:

$$\frac{\delta y}{r_0} = \frac{A}{2B} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{4B}{A^2}\right) \left(\frac{\delta^{**}}{r_0}\right)_y} \right] \quad (16)$$

$$\frac{\delta y}{r_0} = \frac{A}{2B} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{8B}{A^2}\right) \left(\frac{R_y^{**}}{R}\right)_y} \right] \quad (17)$$

$$\text{где } R_y^{**} = \frac{w_{y0} \delta_y^{**}}{\nu}; \quad R = \frac{w_{x0} d}{\nu}.$$

Особенностью развитого в настоящей работе метода является то, что он позволяет производить расчет локальных гидродинамических характеристик турбулентного потока во всей области существования закрутки: от выхода из направляющего аппарата до сечения, в котором вращательное движение полностью вырождается.

Максимальное значение тангенциальной составляющей скорости изменяется по длине трубопровода благодаря действию диссипативных сил. Это изменение может быть найдено из уравнения:

$$M_0 - \int_0^{r_0} 2\pi \rho_0 w_x w_y r dr = \int_0^x \tau_{wx} 2\pi r_0^2 dx \quad (18)$$

Полученного исходя из теоремы об изменении количества движения. Здесь $\dot{I}_0$ - значение моменты количества движения на входе в канал:

$$M_0 = \int_0^{r_0} 2\pi r^2 \rho_0 w_x w_y dr \Big|_{x=0} \quad (19)$$

Вводя в (14) и (15) величину максимальной тангенциальной скорости и замечая, что:

$$\frac{d}{dx} \int_0^{r_0} 2\pi r^2 \rho_0 w_x \frac{w_y}{w_{ys}} dr = 0 \quad (20)$$

Выражение (16) позволяет оценить затухание закрутки по мере продвижения потока по каналу.

На рис.5 показаны результаты расчета знаменателя в выражении (20), проведенного с использованием собственных экспериментальных данных, а также данных из работ [8], [9].

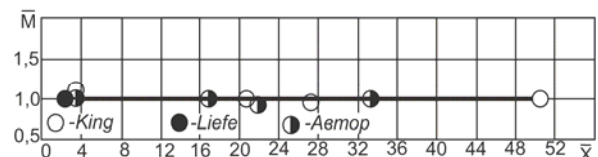


Рис. 5 - Результаты расчета знаменателя в выражении (20) по опытным данным [8], [9] и автора

Как видно из графика, относительное изменение функции f:

$$f = \left[\int_0^{r_0} r^2 \rho_0 w_x \frac{w_y}{w_{ys}} dr \right]_{X=0} \left[\int_0^{r_0} r^2 \rho_0 w_x \frac{w_y}{w_{ys}} dr \right]_{X_l}^{-1}$$

по длине канала невелико и их можно пренебречь.

Тогда, представляя знаменатель выражения (20) в форме:

$$\int_0^{r_0} \frac{w_y}{w_{ys}} \frac{r}{2\pi} dG = C \quad (21)$$

Находим, что изменение максимальной скорости по длине канала прямо пропорционально тангенциальной составляющей касательного напряжения, т.е.:

$$\frac{dw_{ys}}{dx} = -Cr_0^2 \tau_{wy} \quad (22)$$

Зависимость (22) непосредственно определяет путь нахождения тангенциальной составляющей касательного напряжения. Измеряя в процессе опыта [11] градиент максимальной окружной скорости [12], а также постоянную, определяемую зависимостью (21), находим величину τ_{wy} в функции продольной координаты и параметров, характеризующих процесс. Из (22) также следует, что с удалением от входа закрутка потока затухает тем быстрее, чем больше величина касательного напряжения. А последнее в сильной степени зависит от состояния поверхности от закрутки, что непосредственно следует из (21).

На рис.6 показано изменение максимального значения тангенциальной составляющей вектора скорости w_{ys} по длине цилиндрического канала.

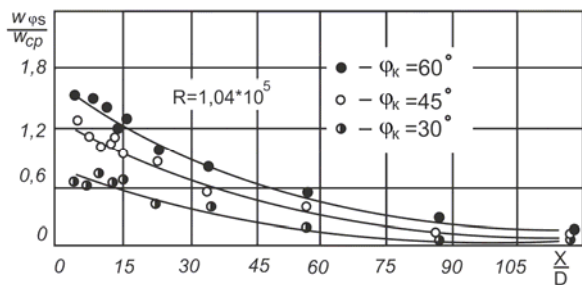


Рис. 6 - Изменение максимальной тангенциальной компоненты вектора скорости по длине цилиндрического канала

Линиями представлены результаты расчета по предлагаемой методике точками собственные экспериментальные данные. Наблюдается удовлетворительное согласование расчетных данных с экспериментальными. Расстояние, на котором запас кинетической энергии, имеющей место на входе в канал, полностью расходуется на преодоление диссипативных сил, может быть найдено из соотношения (18). Действительно, в искомом сечении второе слагаемое левой части обращается в нуль и из (18) следует:

$$M_0 = \int_0^{x_l} \tau_{wy} 2\pi r_0^2 dx \quad (23)$$

Зная изменение касательного напряжения τ_{wy} по длине трубопровода из (23) можно найти для начального участка.

Распределение давления по сечению канала подчиняется уравнению:

$$\frac{dP}{dr} = \rho \frac{w_y^2}{r} \quad (24)$$

Интегрируя (24) по радиусу канала, получаем распределение статического давления по поперечному сечению потока.

Зона 1, где r меняется от r_0 до $r_{\delta y}$:

$$P = P_{ct}$$

P_{ct} - давление на стенку канала.

Давление по толщине пограничного слоя можно считать постоянным, так как в начале канала в области наиболее интенсивной закрутки, где толщина пограничного слоя мала, а там где эта толщина существенно возрастает, ослабевает закрутка. Зона 2, где r меняется от $r_{\delta y}$ до r_s :

$$P = P_{no} - \frac{\rho w_{ys}^2}{2} \left(\frac{1}{r_{\delta y}^2} - \frac{1}{r^2} \right)$$

Зона 3, где r меняется от r_s до r_o :

$$P = P_s - \frac{\rho w_{ys}^2}{2} (r_s^2 - r^2)$$

$$\text{Здесь } P_s = P_c - \frac{\rho w_{ys}^2}{2} \left(\frac{1}{r_{\delta y}^2} - \frac{1}{r_s^2} \right)$$

Зона 4, где r меняется от r_o до D :

$$P = P_o - \frac{\rho w_{ys}^2}{2 r_s^2} (r_s^2 - r^2)$$

Здесь P_o - давление на границе вихревого шнура, образующегося в потоке при его интенсивной закрутке; оно равно давлению насыщенных паров жидкости.

Литература

1. Филиппов Г.В. и др. Турбулентный пограничный слой начальных участков осесимметричных каналов при наличии закрутки потока на входе / Г.В. Филиппов, В.Г. Шахов. ИФЖ – 1968. - Том XVII, №11.
2. Алимов Р.З. Турбулентные течения вязкого несжимаемого газа в осесимметричном канале в условиях предварительной закрутки на входе / Р.З. Алимов. «Авиационная техника» - 1971. - №4.
3. Мигай В.К. и др. Трение и теплообмен в турбулентном закрученном потоке с переменной закруткой по длине / В.К. Мигай, Л.К. Голубев. «Энергетика и транспорт» - 1969. - №6.
4. Волтанник В.В. и др. О движении закрученного потока жидкости в трубе / В.В. Волтанник, В.В. Казеннов. Труды МИСИ им. Куйбышева – 1968. – Вып. 2, №55.
5. Халатов А.А. и др. Некоторые особенности гидродинамики турбулентных воздушных потоков,

- закрученных лопаточным завихрителем / А.А. Халатов, В.К. Щукин, В.Г. Летягин. ИФЖ – 1973. – Т. XXV, №5.
6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. М: «Наука». - 1969.
 7. Бекшель и др. Распределение жидкости в пограничном слое для турбулентного закрученного потока / Бекшель, Лендж // Труды Американского общества инженеров. – Серия Теоретические основы инженерных расчетов – 1969. - №4.
 8. King M.K., Rothfus R.R., Kermode R.G. “Static pressure and velocity profiles in swirling incompressible tube flow”. AICHE journal, vol.15, №6, 1969.
 9. Liepe F. “Untersuchungen uber das verhalten von drallstromungen in kedeldiffusoren”. Maschinen – bautechnik. B12, №5, 1963.
 10. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа / Л.Г. Лойцянский. Гостехиздат, 1950.
 11. Кузьмин В.В. и др. Установка для метрологического обслуживания, динамических испытаний и газодинамических исследований преобразователей расхода / В.В. Кузьмин, А.А. Гайнуллина, А.Н. Ахмерова. Вестник КНИТУ. -2013. № 10. - с. 289-292.
 12. Кузьмин В.В. и др. Бесконтактные методы диагностики кинематической структуры потоков жидкостных и газовых сред / В.В. Кузьмин, А.А. Гайнуллина, А.Н. Ахмерова. Вестник КНИТУ. -2013. № 11. - с. 75-79.

© **А. В. Чупаев** – канд. техн. наук, доц. каф. САУТП КНИТУ, sautp@yandex.ru; **Р. Р. Галямов** – ст. препод. той же кафедры; **А. А. Гайнуллина** – асс. той же кафедры; **В. В. Кузьмин** – канд. техн. наук, доц. той же кафедры.