

С. П. Иванов, О. Г. Иванов, Р. А. Каюмов,
И. З. Мухамедова

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОБОЛОЧЕК С ЗАДЕЛАННЫМИ ТОРЦАМИ В НЕПОДВИЖНЫЕ МАССИВЫ, И ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ С УПРУГОЙ СРЕДОЙ

Ключевые слова: методика, упругая среда, пластинчатая система, интенсивность напряжений, деформация.

Рассматривается модель упругой среды как однослойное основание. Предполагается, что пластинчатые системы могут располагаться в упругой среде полностью или частично. Для вывода дифференциальных уравнений равновесия используется энергетический метод. Конечные уравнения реализуются численным методом Рунге-Кутты. Численные эксперименты показали, что упругая среда значительно может снижать напряженно-деформированное состояние оболочек. При учете физической нелинейности увеличиваются перемещения в призматической системе. Если учитывать одновременно упругую среду и нелинейное деформирование материала оболочки, то при определенных соотношениях степени физической нелинейности и модуля деформации упругой среды напряженно-деформированное состояние пластинчатой системы можно определять по линейной теории.

Keywords: method, elastic medium, plate system, the intensity of the stress, deformation.

A model of an elastic medium as a single-layer basis. It is assumed that the plate may be disposed of in an elastic medium is completely or partially. To derive the differential equations of equilibrium energy method is used. Finite equations implemented numerical method of Runge-Kutta method. Numerical experiments showed there that the elastic medium can greatly reduce the stress-strain state of shells. When taking into account the physical nonlinearity increase in displacement parallel system. If we consider both elastic medium and the nonlinear deformation of the shell material, under certain degree of physical nonlinearity ratios and modulus of deformation of an elastic medium stress-strain state of the plate can be determined by linear theory.

Введение

Поведению пластинчатых систем, контактирующих с упругой средой, посвящено достаточно большое число работ. Практически нет публикаций, связанных с расчетом таких систем в упругой среде с учетом нелинейной диаграммы деформирования материала оболочек. Здесь разрабатывается методика расчета физически нелинейных пластинчатых систем типа призматических оболочек, взаимодействующих с упругой средой. Как плиты находящиеся в упругой среде можно считать и ребристые плиты, т.к. влияние ребер на напряженно-деформированное состояние плиты можно учитывать в виде упругого основания по винклеровской модели. В настоящее время находят широкое применение пластинки и оболочки в различных областях – строительство, машиностроение, авиастроение, кораблестроение, приборостроение и т.д. Если подходить строго к диаграмме деформирования материалов, то практически все они обладают физической нелинейностью в той или иной степени. А такие материалы, как бетон, различные сплавы, пластмассы, композиты имеют достаточно сильную физическую нелинейность. В данной работе рассматривается упругая среда как однослойное основание.

Для вывода дифференциальных уравнений равновесия используется энергетический метод. Конечные уравнения реализуются численным методом Рунге-Кутты. В качестве примера рассмотрена П-образная система, контактирующая с упругой средой. Представлена оценка влияния упругой среды и физической нелинейности на напряженно-деформированное состояние пластинчатой системы.

1. Дифференциальные уравнения равновесия

Предполагаем, что пластинчатые системы могут располагаться в упругой среде полностью или частично. В данной статье в качестве расчетной модели упругой среды принята однослойная модель. Также в основу разрабатываемой методики расчета закладывается модель нелинейно-упругого материала пластинчатой системы. Экспериментальные данные таких материалов, как бетон, различные сплавы, композиты, показывают, что зависимость между интенсивностями напряжений σ_i и деформаций e_i можно принять в виде кубического полинома

$$\sigma_i = E \cdot e_i - E_1 e_i^3, \quad (1.1)$$

где E – начальный модуль упругости, E_1 – постоянная, учитывающая степень нелинейности материала (принимаются на основании экспериментальных данных).

Например, уравнением (1.1) достаточно хорошо описываются кривые деформирования бетона, композитов, сплавов, некоторых видов сталей. Так в зависимости от марки бетона и возраста [3, 4] указанные величины можно принять в следующих пределах: $E=2 \cdot 10^4 - 4,5 \cdot 10^4$ МПа., $E_1=1,5 \cdot 10^{10} - 6,5 \cdot 10^{10}$ МПа. Для композита марки ЭДФ -5-6 [5] в зависимости от укладки основы – $E=1,9 \cdot 10^4 - 2,7 \cdot 10^4$ МПа., $E_1=1,4 \cdot 10^7 - 2,6 \cdot 10^7$ МПа., а стали марки 20Н5А [6] – $E=2 \cdot 10^5$ МПа., $E_1=2 \cdot 10^{10}$ МПа.

Учитываем гипотезы Кирхгофа-Лява. Полагаем, что направляющие тензоров напряжений и деформаций совпадают. Используем известные соотношения между деформациями и перемещениями:

$$\varepsilon_x = e_x - z\chi_x; \quad \varepsilon_s = e_s - z\chi_s; \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_{xs} = e_{xs} - 2z\chi_{xs},$$

где

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad e_s = \frac{\partial v}{\partial s}; \quad e_{xs} = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\chi_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \chi_s = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}; \quad \chi_{xs} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s}.$$

Величины u , v и w – соответствуют компонентам вектора перемещений точки К срединной поверхности пластинчатой системы в продольном x , поперечном s и нормальном z направлениях (рис.1).

Двумерная задача сводится к одномерной. Перемещения выражаются по В.З.Власову [2] и принимаются в виде разложений:

$$\begin{aligned} u(x,s) &= \sum_i U_i(x)\varphi_i(s); \quad v(x,s) = \sum_k V_k(x)\psi_k(s); \\ w(x,s) &= \sum_d W_d(x)f_d(s), \end{aligned} \quad (1.3)$$

$(i=1,2,3,\dots,m; k,d=1,2,3,\dots,n).$

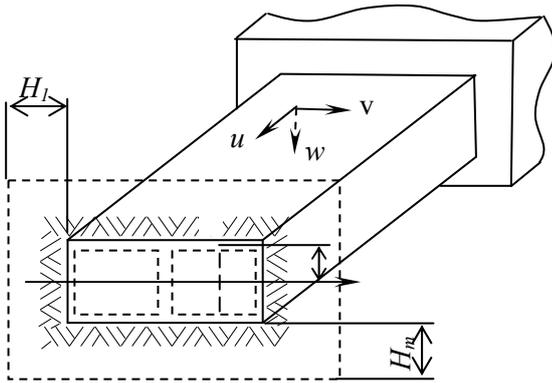


Рис. 1 - Схема оболочки в упругом деформируемом слое толщиной

Выражения интенсивности деформаций e_i и объемной деформации θ с учетом гипотез Кирхгофа-Лява и сжимаемости материала ($\sigma_z = 0$, $\varepsilon_{xz} = 0$, $\varepsilon_{sz} = 0$) можно записать следующим образом:

$$e_i = \frac{\sqrt{2}}{2(1+\nu)} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_s)^2 + (\varepsilon_s - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} \varepsilon_{xs}^2} \quad (1.4)$$

$$\theta = \frac{1-2\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_s), \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_s). \quad (1.6)$$

Учитывая соотношение (1.6), получим формулу для квадрата интенсивности деформаций

$$e_i^2 = \frac{3}{(1+\nu)^2} \left[\nu_1 (e_x^2 + e_s^2) + \nu_2 e_x e_s + \frac{1}{4} e_{xs}^2 \right], \quad (1.7)$$

где $\nu_1 = \frac{1}{3} \left[\frac{\nu}{(1+\nu)^2} + 1 \right]; \quad \nu_2 = \frac{1}{3} \left[\frac{2\nu}{(1-\nu)^2} - 1 \right];$

ν - коэффициент Пуассона.

Вводим следующие обозначения:

$$b_0 = \nu_1 (e_x^2 + e_s^2) + \nu_2 e_x e_s + \frac{1}{4} e_{xs}^2;$$

$$b_1 = 2\nu_1 (e_x \chi_x + e_s \chi_s) + \nu_2 (e_x \chi_s + e_s \chi_x) + e_{xs} \chi_{xs}; \quad (1.8)$$

$$b_2 = \nu_1 (\chi_x^2 + \chi_s^2) + \nu_2 \chi_x \chi_s + \chi_{xs}^2,$$

тогда формула (1.7) принимает более компактный вид:

$$e_i^2 = \frac{3}{(1+\nu)^2} (b_0 - z b_1 + z^2 b_2). \quad (1.9)$$

Составим удельную энергию изменения объема и формы [7]:

$$\Phi = \frac{1}{2} K \theta^2 + \frac{2}{3} \int_0^{\varepsilon_i} (1+\nu) \cdot \sigma_i \cdot de_i, \quad (1.10)$$

где $K = E / [3(1-2\nu)]$ – модуль объемного сжатия.

Подставляя в (1.10) соотношения (1.1–1.9), получим

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{E(1-2\nu)}{6(1-\nu)^2} [e_x + e_s - z(\chi_x + \chi_s)]^2 + \frac{E}{1+\nu} (b_0 + z b_1 + z^2 b_2) - \\ &\quad - \frac{3}{2(1+\nu)^3} E_1 (b_0 - z b_1 + z^2 b_2)^2. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Работа, отнесенная к единице площади поверхности оболочки равна

$$A = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \Phi dz, \quad (1.12)$$

где δ – толщина элемента пластинчатой системы.

Подставляя (1.11) в (1.12), получим

$$\begin{aligned} A &= \frac{E(1-2\nu)\delta}{6(1-\nu)^2} \left(d_0 + \frac{\delta^2}{12} d_1 \right) + \frac{E\delta}{1+\nu} \left(b_0 + \frac{\delta^2}{12} b_2 \right) - \\ &\quad - \frac{1}{4} [B_1 b_0^2 + D_2 (b_1^2 + 2b_0 b_2) + D_1 b_2^2], \end{aligned} \quad (1.13)$$

где

$$B_1 = 6\bar{E}_1 \delta; \quad D_1 = \frac{3}{40} \bar{E}_1 \delta^5; \quad D_2 = \frac{1}{2} \bar{E}_1 \delta^3; \quad \bar{E}_1 = E_1 / (1+\nu)^3;$$

$$d_0 = (e_x + e_s)^2; \quad d_1 = (\chi_x + \chi_s)^2.$$

Следуя В.З.Власову [2] пространственную пластинчатую систему принимаем дискретно-континуальной. Выбор координатных функций $\varphi_i(s)$, $\psi_k(s)$, $f_d(s)$ осуществляется по виду деформированного состояния системы. Искомые функции $U_i(x)$, $V_k(x)$ и $W_d(x)$ являются обобщенными перемещениями и подлежат определению из решения задачи. В дальнейших записях функций переменные, указанные в скобках опускаем.

Составляем полную энергию для системы

$$\Pi = \iint (A + q_x \sum_i U_i \varphi_i + q_s \sum_k V_k \psi_k + q_z \sum_d W_d f_d) dx ds, \quad (1.14)$$

где q_x , q_s , q_z – интенсивности нагрузок, действующих на систему в продольном, поперечном и нормальном направлениях.

Из условий совместности деформаций в местах соединений пластинчатой системы можно принять при $d = k$

$$W_d = V_k, \quad (1.15)$$

а углы между пластинами учитываются при выборе координатных функций.

Определим минимум функционала (1.14), используя уравнения Эйлера-Лагранжа [8]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial U_i'} - \frac{\partial F}{\partial U_i} &= 0; \\ -\frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial F}{\partial V_k''} + \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial V_k'} - \frac{\partial F}{\partial V_k} &= 0, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где F – подынтегральная функция (1.14), штрихи означают обычные производные от функций по переменной x .

Полагаем, что прогибы пластин системы совпадают с осадкой упругой среды. Развернув уравнения (1.16), и присоединив работу реактивных давлений $Q_j^{очн.}$, $Q_v^{очн.}$ упругой среды [2] соответственно в продольном и нормальном направлениях:

$$\begin{aligned} Q_j^{очн.} &= \sum_i a_{ji}^0 U_i; \\ Q_v^{очн.} &= 2 \sum_k \rho_{hk}^0 V_k'' - \sum_k s_{hk}^0 V_k, \end{aligned} \quad (1.17)$$

получим систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений равновесия пластинчатой системы в упругой среде:

$$\begin{aligned} \gamma_1 \sum_i a_{ji} U_i' - \sum_i \bar{b}_{ji} U_i - \sum_k c_{jk} V_k' + Q_j &= {}^1\Phi_j; \\ -\gamma_1 \sum_k e_{hk} V_k^{IV} + \sum_k \bar{r}_{hk} + \frac{2\gamma}{1+\nu} (m_{hk} - \frac{\nu}{1-\nu} \alpha_{hk}) V_k'' - \sum_k \bar{s}_{hk} V_k + \\ + \sum_i c_{hi} U_i' + Q_v &= {}^2\Phi_h, \end{aligned} \quad (1.18)$$

где

$$\begin{aligned} Q_j &= \frac{1}{G} \int_s q_x \varphi_j ds; \quad Q_v = \frac{1}{G} \int_s (q_h \psi_h + q_z f_h) ds; \\ \bar{b}_{ji} &= b_{ji} + \frac{1}{G} a_{ji}^0; \quad \bar{r}_{hk} = r_{hk} + \frac{1}{G} \rho_{hk}^0; \\ \bar{s}_{hk} &= \gamma_1 s_{hk} + \frac{1}{G} s_{hk}^0; \quad \gamma_1 = \frac{E}{G(1-\nu^2)}; \\ a_{ji}^0 &= \frac{E_0}{2(1+\nu_0)H_m} \int_s \varphi_j \varphi_i ds; \quad \rho_{hk}^0 = \frac{E_0 H_m}{12(1+\nu_0)} \int_s f_k f_h ds; \\ s_{hk}^0 &= \frac{E_0}{H_m(1-\nu_0^2)} \left\{ \int_s f_k f_h ds + \frac{H_m^2(1-\nu_0)}{6} \int_s f_k' f_h' ds \right\}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

В коэффициентах a_{ji}^0 , ρ_{hk}^0 , s_{hk}^0 под интегралами включаются координатные функции только тех пластин системы, которые взаимодействуют с упругой средой. Остальные коэффициенты линейной части уравнений (1.18) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} a_{ji} &= \int_s \varphi_j(s) \varphi_i(s) \delta ds; \quad b_{ji} = \int_s \varphi_j'(s) \varphi_i'(s) \delta ds; \\ m_{hk} &= \int_s J f_h'(s) f_k'(s) ds; \\ c_{jk} &= \int_s \varphi_j'(s) \psi_k(s) \delta ds; \quad c_{hi} = \int_s \psi_h(s) \varphi_i'(s) \delta ds; \\ \alpha_{hk} &= \int_s J f_h''(s) f_k(s) ds; \quad r_{hk} = \int_s \psi_h(s) \psi_k(s) \delta ds; \\ e_{hk} &= \int_s J f_h'(s) f_k(s) ds; \end{aligned} \quad (1.20)$$

$$s_{hk} = \int_s [J f_h''(s) f_k''(s) + \psi_k'(s) \psi_h'(s) \delta] ds; \quad J = \delta^3 / 12.$$

В уравнениях и в коэффициентах приняты следующие обозначения: E_0 , ν_0 – соответствуют модулю деформации и коэффициенту Пуассона упругой среды;

H_m – толщина деформируемого слоя упругой среды (индекс m показывает номера слоев, взаимодействующих с различными гранями системы см. рис. 1), которая может быть разной для различных граней; E , G , ν – соответствуют модулю упругости, модулю сдвига и коэффициенту Пуассона материала пластинчатой системы. Если толщина деформируемого слоя среды для всех граней пластинчатой системы одинакова, то принимаем $H_m = H$. Выражения ${}^1\Phi_j$ и ${}^2\Phi_h$ в (1.18) учитывают физическую нелинейность материала оболочки и имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} {}^1\Phi_j &= -\int_s (N_{1,x} \varphi_j + N_2 \varphi_{j,s}) ds; \\ {}^2\Phi_h &= -\int_s N_{3,x} \psi_h ds + \int_s N_2 \psi_h' ds - \int_s N_{6,x} f_t ds + \\ + \int_s (N_{4,xx} f_t ds + \int_s N_5 f_{t,ss} ds). \end{aligned} \quad (1.21)$$

В (1.21) индексы после запятой указывают на дифференцирование по данным переменным, а функции находящиеся под интегралами записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} N_1 &= -\bar{B}_1 b_0 (\nu_1 e_x + 0.5 \nu_2 e_s) - \bar{D}_2 [b_1 (\nu_1 \chi_x + \\ + 0.5 \chi_s) + b_2 (\nu_1 e_x - 0.5 \nu_2 e_s)]; \\ N_2 &= -\bar{B}_1 b_0 (\nu_1 e_s + 0.5 \nu_2 e_x) - \bar{D}_2 [b_1 (\nu_1 \chi_s + \\ + 0.5 \chi_x) + b_2 (\nu_1 e_s - 0.5 \nu_2 e_x)]; \\ N_3 &= -0.25 \bar{B}_1 b_0 e_{xs} - 0.5 \bar{D}_2 (b_1 \chi_{xs} + 0.5 b_2 e_{xs}); \\ N_4 &= \bar{D}_2 [b_0 (\nu_1 \chi_x + 0.5 \nu_2 \chi_s) + b_1 (\nu_1 e_x + 0.5 \nu_2 e_s)] + \\ + \bar{D}_1 b_2 (\nu_1 \chi_x + 0.5 \nu_2 \chi_s); \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$N_5 = \bar{D}_2 [b_0(v_1 \chi_s + 0.5v_2 \chi_x) + b_1(v_1 e_s + 0.5v_2 e_x)] + \bar{D}_1 b_2(v_1 \chi_s + 0.5v_2 \chi_x);$$

$$N_6 = \bar{D}_2 (b_0 \chi_{xs} + 0.5b_1 e_{xs}) + \bar{D}_1 b_2 \chi_{xs},$$

где $\bar{B}_1 = 12 E_2 \delta$; $\bar{D}_1 = 3 E_2 \delta^5/20$; $\bar{D}_2 = E_2 \delta^3$; $E_2 = E_1/E(1+\nu)^2$.

Выражения (1.21) и (1.22) полностью будут совпадать с [1], если решать задачу с учетом физической и геометрической нелинейностей. В оболочках средней длины можно пренебречь работой продольных изгибающих моментов M_x , и в системе уравнений (1.18) следует принять

$$e_{hk}=0, \quad (1.23)$$

что приводит к существенному понижению порядка системы.

2. Анализ результатов расчета

Конечная реализация нелинейных дифференциальных уравнений осуществляется на ПЭВМ численным методом Рунге-Кутты по программе, составленной на языке Фортран. На основании уравнений (1.18) рассчитывалась П-образная пластинчатая система, когда верхняя и правая пластины контактируют с упругой средой, а внешняя равномерно распределенная нагрузка q , расположенная в плоскости верхней грани (см. [2]) действует по левому верхнему краю в поперечном направлении по всей длине оболочки. Оболочка по торцам заделана в абсолютно жесткий неподвижный массив.

Геометрические параметры призматической системы принимались следующие: $\delta/a = 1/10$ – отношение толщины к поперечному размеру; $l/a = 5 - 9$ отношение длины к поперечному размеру; $H_1/a = H/a = 2.5$ – отношение толщины деформируемых слоев к поперечному размеру оболочки. Физические постоянные – $E_1/E = 10^5$, $\nu = 0$, $E_0/G = 0.004$, $\nu_0 = 0.3$. $Q = q/G\delta = 5 \cdot 10^{-5}$ – относительная величина нагрузки.

Согласно действующей нагрузке перемещения принимаем в виде следующих разложений [2]:

$$u(x,s) = U_1(x)\varphi_1(s); \quad v(x,s) = V_1(x)\psi_1(s); \quad (2.1)$$

$$w(x,s) = W_1(x)f_1(s).$$

При составлении функций $\varphi_1(s)$, $\psi_1(s)$ и $f_1(s)$ обходим контур по часовой стрелке, начиная с левой опоры. Продольные перемещения $u(x,s)$ двух точек, симметричных относительно оси y , сечения $x=\text{const}$ будут равны по величине, но противоположны по знаку. Учитывая, что нагрузку можно представить как обратно симметричную, то получаем один параметр обобщенного перемещения $U_1(x)$ и принимаем соответствующее ему продольное перемещение верхнего правого угла. Обобщенным контурным перемещениям пластин в своей плоскости $V_1(x)$ соответствует функция $\psi_1(s)$.

Дифференциальные уравнения типа (1.18) для данной системы с учетом (1.23) будут иметь следующий вид:

$$\gamma_1 a_{11} U_1'' - \bar{b}_{11} U_1 - c_{11} V_1' = {}^1\Phi_1; \quad (2.2)$$

$$c_{11} U_1' + [\bar{\gamma}_{11} + \frac{2\gamma}{1+\nu} (m_{11} - \frac{\nu}{1-\nu} \alpha_{11})] V_1'' - \bar{s}_{11} V_1 + Q_1 = {}^2\Phi_1.$$

При определении коэффициентов a_{11}^0 , ρ_{11}^0 , s_{11}^0 , входящих в состав коэффициентов \bar{b}_{11} , $\bar{\gamma}_{11}$, \bar{s}_{11} , будут входить под интегралы координатные функции ${}^2\varphi_1$, ${}^2\psi_1$, 2f_1 , ${}^3\varphi_1$, ${}^3\psi_1$, 3f_1 , т. к. с упругой средой взаимодействуют верхняя и правая боковая пластины. Для вычисления этих коэффициентов используем формулы (1.19). Граничные условия для пластинчатой системы с торцами, заделанными в абсолютно жесткий неподвижный массив, запишутся так:

$$\text{при } x=0 \text{ и } x=l: U_i(x)=0; \quad V_k(x)=0; \quad V_k'(x)=0. \quad (2.3)$$

На основании численного решения уравнений (2.2) совместно с граничными условиями (2.3) на рис. 2, 3 построены графики.

Заключение

Из графиков видно (рис. 2, 3), что упругая среда значительно может снижать напряженно-деформированное состояние оболочек. При учете физической нелинейности увеличиваются перемещения в призматической системе. Если учитывать одновременно упругую среду и нелинейное деформирование материала оболочки, то при определенных соотношениях степени физической нелинейности и модуля деформации упругой среды напряженно-деформированное состояние пластинчатой системы можно определять по линейной теории.

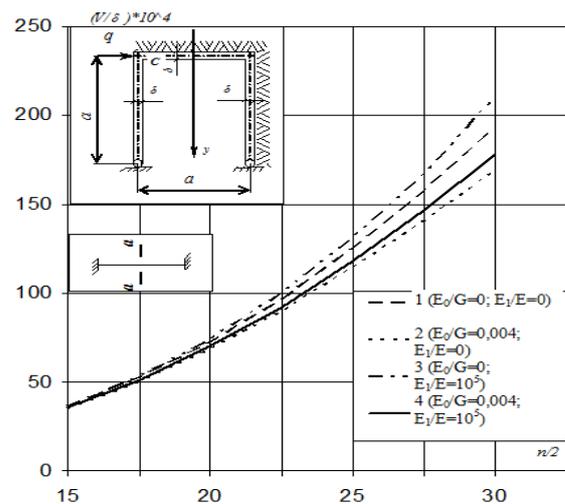


Рис. 2 - Графики изменения наибольшей относительной деформации контура в угловой точке С сечения $a-a$ в зависимости от изменения длины оболочки с учетом упругой среды $E_0/G=0,004$ и без учета $E_0/G=0$: 1 и 2 – по линейной теории, 3 и 4 – при учете физической нелинейности

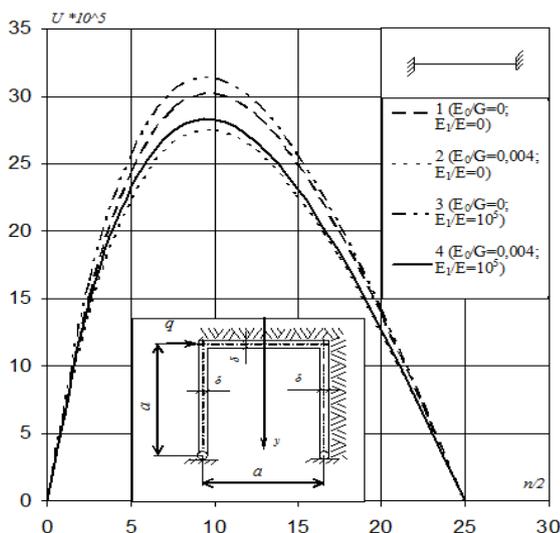


Рис. 3 - Графики изменения относительной деформации по длине оболочки с учетом упругой среды $E_0/G=0,004$ и без учета $E_0/G=0$: 1 и 2 – по линейной теории, 3 и 4 – при учете физической нелинейности

Таким образом, на основании изложенной методики можно исследовать физически нелинейные пластинчатые системы, взаимодействующие с упругой средой.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (соглашение 14.V37.21.2018).

Литература

1. Иванов С.П. Расчет пространственных пластинчатых систем с учетом физической и геометрической нелинейностей / С.П. Иванов // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – М., 2001. – Т.7, №4. – С. 526 – 532.
2. Власов В.З. Тонкостенные пространственные системы. – М.: Госстройиздат, 1958. – 502 с.
3. Карпенко Н.И. Общие модели механики железобетона. – М.: Стройиздат, 1996. – 416 с.
4. Залигер Р. Железобетон, его расчет и проектирование. – 4-е изд. – М. – Л., 1929. – 281 с.
5. Лукаш П.А. Основы нелинейной строительной механики. – М.: Стройиздат, 1978. – 204 с.
6. Смирнов В.И. Курс высшей математики. – М. – Л.: ГИТЛ, 1957. – 627 с.
7. Каюмов Р.А. Моделирование поведения пленочно-тканевого материала при воздействии эксплуатационных факторов/ Р.А. Каюмов, А.М.Сулейманов, И.З.Мухамедова // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2005. – т.11. – №4. – С.519-530.
8. Каюмов Р.А. Физически нелинейная модель тканевых материалов, обработанных в потоке высокочастотной плазма/ Р.А.Каюмов, И.Ш.Абдуллин, М.Н.Серзутдинов, В.В.Хамматова, И.З.Мухамедова, Е.В.Кумпан, А.М.Шакирова // *Вестник Казанского технологического университета*. № 6; Федеральное агентство по образованию, Казан. гос. технол. ун-т. – Казань: КГТУ, 2010. – С. 42 – 53.
9. Каюмов, Р.А. Математическое моделирование деформирования текстильных материалов с содержанием полимерных волокон /Р.А.Каюмов, В.В.Хамматова// *Вестник Казанского технологического университета*. № 14; Федеральное агентство по образованию, Казан. гос. технол. ун-т. – Казань: КГТУ, 2012. – С. 154 – 156.

© С. П. Иванов – д.т.н., проф., Поволжский государственный технологический университет; О. Г.Иванов – к.т.н., доцент, Поволжский государственный технологический университет, vizm.oleg@mail.ru; Р. А. Каюмов – проф., д.ф.-м.н., зав. каф. сопротивления материалов и основ теории упругости КГАСУ, проф. каф. дизайна КНИТУ, kayumov@rambler.ru; И. З. Мухамедова – к.ф.-м.н., доц. каф. сопротивления материалов и основ теории упругости КГАСУ, muhamedova-inzilija@mail.ru.