

УДК 621.51-251

Аль Аззави Аус, М. Ю. Перухин, Т. Н. Мустафин

ПОСТРОЕНИЕ СЕТКИ РОТОРОВ ВИНТОВОГО КОМПРЕССОРА

Ключевые слова: винтовой компрессор, построение сетки.

В статье приведено описание построения сетки роторов винтового компрессора, а так же рассмотрены аспекты определения метрических коэффициентов для дальнейшего математического моделирования. Проанализированы методы решения систем линейных уравнений на ЭВМ и выбран наиболее оптимальный.

Keywords: screw compressor, building grids.

This article describes the Grid generation of screw compressor and also deals with aspects for the definitions of the metric coefficients for advanced mathematical modeling. The methods of solving systems of linear equations on the computer and choose the best

Одним из первых шагов в процессе численных решений дифференциальных уравнений с частными производными, описывающих физический процесс, является построение сетки. Сеткой называется процесс замены пространственной области с помощью системы узловых точек [1]. Физическую область необходимо покрыть сеткой, так чтобы обозначить все дискретные объемы или элементы, где могут быть применены законы сохранения. Хорошо построенная сетка значительно улучшает качество расчетов, и, наоборот, плохо построенная сетка является одной из основных причин плохого результата. Во многих приложениях, трудности с численным моделированием можно отнести к плохому качеству сетки. Существует два метода создания сетки: структурированный и неструктурированный подходы [2].

Для задачи построения сетки вала винтового компрессора был применен структурированный метод построения. Однако стоит заметить, что построение таким методом сетки в 3-D связано с большими трудностями. Существует три основных математических метода построения сетки:

1. метод комплексной переменной;
2. алгебраический метод;
3. метод, связанный с решением дифференциальных уравнений частных производных.

Метод комплексной переменной имеет преимущество, так как используются аналитические или частично аналитические преобразования, в отличие от других методов, которые полностью численные. К сожалению, данный метод не может быть использован в трехмерном пространстве [2]. В отличие от метода комплексной переменной, алгебраические и дифференциальные методы могут быть использованы в сложных трехмерных (3-D) задачах.

Алгебраическая сетка часто основывается на трансфинитной интерполяции. Она может представлять собой как процедуру многомерной интерполяции, так и логическую сумму одномерных интерполяций вдоль каждой вычислительной координаты. Метод широко используется для построения расчетных сеток в областях с гладкими границами, которые не сильно деформированы или в качестве на-

чального приближения для итерационного процесса построения эллиптической сетки. Наиболее подходящий метод численного построения сетки винта – трансфинитная интерполяция, в сочетании с процедурой адаптации и граничной ортогонализации.

После того как определены граничные условия для физического объекта, они могут быть пересчитаны и для координат сетки в расчетной (компьютерной) системе координат [1].

На рис.1 изображены исходные профили ведомого (а) и ведущего (б) валов.

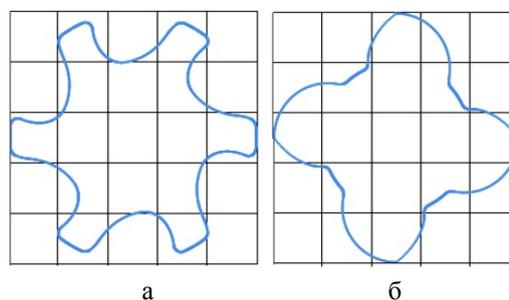


Рис. 1 - Исходные профили ведомого (а) и ведущего (б) валов

Для построения положения сетки данных валов координаты профиля r_1 и координаты окружности r_2 были представлены в виде уравнения сплайн аппроксимации координат. В качестве аргумента использовалась длина кривой. В этом случае сетка строится постоянным шагом по координатам x и y и вращением по оси z .

Физические координаты можно написать в виде:

$$\begin{cases} x(\xi, \eta, \zeta) = +x_c * \cos(\theta * \zeta) + y_c * \sin(\theta * \zeta) \\ y(\xi, \eta, \zeta) = -x_c * \sin(\theta * \zeta) + y_c * \cos(\theta * \zeta) \\ z(\xi, \eta, \zeta) = l_r * \zeta \end{cases} \quad (1)$$

где θ, ζ, ξ – компьютерные координаты; l_r – длина ротора; x_c, y_c – координаты двумерной сетки, ограниченной профилем ротора, которые могут быть восстановлены из компьютерных координат по формуле:

$$x_\alpha = \begin{cases} a_1(\eta) \cdot r(\zeta) \cdot \cos(2\pi\xi) + \\ a_2(\eta) \cdot x_1(l_r, \xi) + a_3(\eta) \cdot f_1(\xi, \zeta) \cdot \\ 2\pi r(\zeta) \cdot \cos(2\pi\xi) + a_4(\eta) \cdot \\ \cdot f_2(\xi, \zeta) \cdot l_r \cdot \frac{\partial y_1}{\partial \xi}(l, \xi), \quad \eta \geq 1; \\ a_1(\eta + 1) \cdot r_0 \cdot \cos(2\pi\xi) + a_2(\eta + 1) \cdot \\ \cdot r(\zeta) \cos(2\pi\xi) + a_3(\eta + 1) \cdot r_0 \cdot \\ \cdot 2\pi \cdot \cos(2\pi\xi) + a_4(\eta + 1) \cdot \\ \cdot r(\zeta) \cdot 2\pi \cdot f_1(\xi, \zeta) \cos(2\pi\xi), \quad \eta < 1; \end{cases}$$

$$y_\alpha = \begin{cases} a_1(\eta) \cdot r(\zeta) \cdot \sin(2\pi\xi) + \\ + a_2(\eta) \cdot y_1(l_r, \xi) + a_3(\eta) \cdot f_1(\xi, \zeta) \cdot \\ \cdot 2\pi r(\zeta) \cdot \sin(2\pi\xi) - a_4(\eta) \cdot \\ \cdot f_2(\xi, \zeta) \cdot l_r \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \xi}(l, \xi), \quad \eta \geq 1; \\ a_1(\eta + 1) \cdot r_0 \cdot \sin(2\pi\xi) + a_2(\eta + 1) \cdot \\ \cdot r(\zeta) \sin(2\pi\xi) + a_3(\eta + 1) \cdot r_0 \cdot \\ \cdot 2\pi \cdot \sin(2\pi\xi) + a_4(\eta + 1) \cdot \\ \cdot r(\zeta) \cdot 2\pi \cdot f_1(\xi, \zeta) \sin(2\pi\xi), \quad \eta < 1; \end{cases}$$

где a_1, a_2, a_3, a_4 – функции перехода Эрмита, которые включают производные в конечных точках кривой для обеспечения ортогональности на границах; $f_1(\xi, \zeta), f_2(\xi, \zeta)$ – коэффициенты (положительные числа меньше единицы), которые определяются путем проб и ошибок; x_1 – координата внутренней окружности.

Уравнение (1), после ряда преобразований, позволит определить необходимые метрические коэффициенты, которые, в свою очередь, позволят перевести исходные дифференциальные уравнения, записанные в физической системе координат, в новую компьютерную. Метрические коэффициенты имеют вид:

$$\xi_x = J \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) = J \cdot l_r \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta};$$

$$\xi_{xx} = \xi_x l_r \left[\frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi} \cdot J + \frac{\partial J}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \right] + \eta_x \cdot l_r \left[\frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \cdot J + \frac{\partial J}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \right] +$$

$$+ \xi_x \cdot l_r \left[\frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi} \cdot J + \frac{\partial J}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \right];$$

$$\xi_y = -J \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) = -J \cdot l_r \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta};$$

$$\xi_{yy} = -\xi_y l_r \left[\frac{\partial^2 x}{\partial \eta \partial \xi} \cdot J + \frac{\partial J}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} \right] - \eta_y \cdot l_r \left[\frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \cdot J + \frac{\partial J}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} \right] +$$

$$+ \xi_y \cdot l_r \left[\frac{\partial^2 x}{\partial \eta \partial \xi} \cdot J + \frac{\partial J}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} \right];$$

$$\xi_z = J \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \right);$$

$$\xi_{zz} = \xi_z J \left[\frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \xi} \right] +$$

$$+ \frac{\partial J}{\partial \xi} \xi_z \left[\frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \right] +$$

$$+ \eta_z J \left[\frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \eta \partial \xi} \right] +$$

$$+ \frac{\partial J}{\partial \eta} \eta_z \left[\frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \right] +$$

$$+ \xi_z J \left[\frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \eta \partial \xi} \right] +$$

$$+ \xi_z \cdot \frac{\partial J}{\partial \xi} \left[\frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \right] +$$

$$+ \xi_z J \left[\frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \right] +$$

$$+ \xi_z \cdot \frac{\partial J}{\partial \xi} \left[\frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \right];$$

$$\eta_x = -J \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) = -J \cdot l_r \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi};$$

$$\eta_{xx} = -\xi_x l_r \left[\frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \cdot J + \frac{\partial J}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \right] - \eta_x \cdot l_r \left[\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \cdot J + \frac{\partial J}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \right] -$$

$$- \xi_x \cdot l_r \left[\frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \xi} \cdot J + \frac{\partial J}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \right];$$

$$\eta_y = J \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) = J \cdot l_r \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi};$$

$$\eta_{yy} = \xi_y l_r \left[\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \cdot J + \frac{\partial J}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} \right] + \eta_y \cdot l_r \left[\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \cdot J + \frac{\partial J}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} \right] +$$

$$+ \xi_y \cdot l_r \left[\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \xi} \cdot J + \frac{\partial J}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} \right];$$

$$\eta_z = -J \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \right);$$

$$\eta_{zz} = -\xi_z J \left[\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \right] -$$

$$\frac{\partial J}{\partial \xi} \xi_z \left[\frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \right]$$

$$- \eta_z J \left[\frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \right] -$$

$$- \frac{\partial J}{\partial \eta} \eta_z \left[\frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \right] -$$

$$- \xi_z J \left[\frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \right] -$$

$$- \xi_z \cdot \frac{\partial J}{\partial \xi} \left[\frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \right];$$

$$\xi_x = J \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) = 0; \quad \xi_{xx} = 0;$$

$$\xi_y = -J \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) = 0; \quad \xi_{yy} = 0;$$

$$\xi_z = J \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \right);$$

$$\xi_{zz} = \xi_z J \left[\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \right] +$$

$$+ \frac{\partial J}{\partial \xi} \xi_z \left[\frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \right] +$$

$$+ \eta_z J \left[\frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \right] +$$

$$+ \frac{\partial J}{\partial \eta} \eta_z \left[\frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \right] +$$

$$+ \xi_z J \left[\frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \eta \partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial \eta \partial \xi} \right] +$$

$$+ \xi_z \cdot \frac{\partial J}{\partial \xi} \left[\frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \right];$$

где J – якобиан матрицы, который определяется по формуле:

$$J = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot l_r}$$

По полученным формулам метрические коэффициенты определяются в каждой точке. Данный расчет связан с большим количеством одинаковых итераций. Такие расчеты при последовательном их решении могут занимать много времени. Решением этой проблемы может стать использование параллельного метода обработки данных. В этом случае задача делится на сотни и тысячи частей и решается параллельно. Для увеличения скорости расчетов также применяются ГПУ вычисления.

Для выбора наиболее оптимального подхода расчета коэффициентов на ЭВМ было использовано три метода расчета линейных алгебраических уравнений:

- 1) Линейный, в котором итерации происходят последовательно;
- 2) Параллельный, в котором несколько расчетов проходят параллельно;
- 3) CUDA – это параллельный метод с использованием ГПУ.

Программа написана на языке C++, и представляет собой Windows – оболочку. Изначально программа запрашивает все начальные параметры расчета и количество рассчитываемых точек. Затем производит расчет и выводит на экране 3D сетку.

Для определения оптимального метода расчета для данной определенной задачи были смоделированы все три метода и в дальнейшем определено время их работы [3-4]. На рисунке 2 представлены

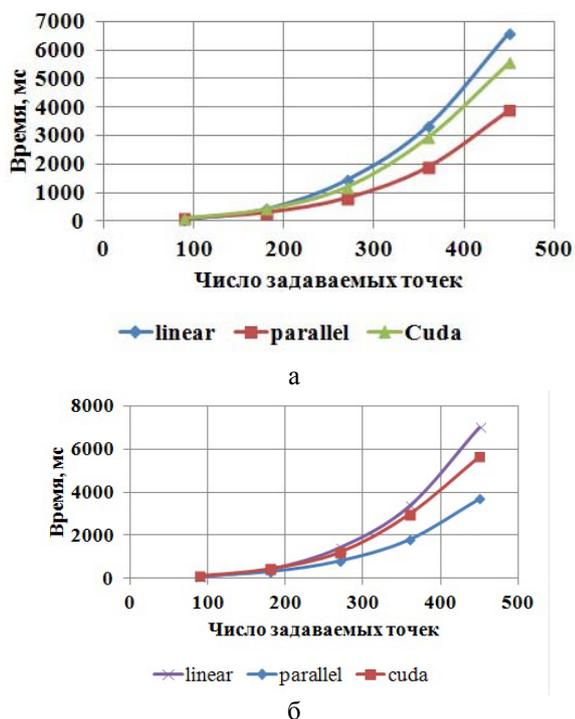


Рис. 2 - Графики зависимости времени работы программы от количества расчетных точек для ведомого (а) и ведущего (б) валов (-х- линейный метод, -◇- параллельный метод, -■- метод CUDA)

зависимости времени от количества расчетных точек для всех методов для ведомого и ведущего валов. Из рисунка видно, что наиболее оптимальным по времени работы программы является классический параллельный метод.

При осуществлении расчета линейным методом задействуется только одно ядро многоядерного процессора, и программа занимает большее время, так как рассчитывается каждая точка последовательно. Параллельный метод вычисляет сразу несколько потоков в одно и то же время, такой расчет будет наоборот требовать не одно ядро, но займет меньше времени. Это наиболее эффективный метод, однако, в нашем случае он показал средний результат. Такой результат объясняется тем, что операция копирования и вставки информации в памяти и файлы занимает больше времени [3]. При более загруженном расчете, скорее всего он показал бы лучший результат.

Подытожив результаты можно сказать, что в процессе описанной в статье работы были смоделированы расчетные сетки роторов винтового компрессора, а так же определены все метрические коэффициенты для дальнейшего решения различных задач. Также к решению данной проблемы были применены различные методы решения систем линейных уравнений на ЭВМ и выбран наиболее оптимальный [3].

Литература

1. Three Dimensional Computational Fluid Dynamics and Solid Fluid Interaction Screw Compressors - Nikola Stosic, Ian Smith, Ahmed Kovacevic. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York.
2. Computational fluid mechanics and head transfer. John C. Tannehill, Dale A. Anderson, Richard H. Pletcher. Taylor & Francis, USA, 1997.
3. Аль Аззави Аус, Перухин М.Ю., Мустафин Т.Н. Анализ вычислительных возможностей различных алгоритмов применительно к построению расчетных сеток. Вестник Казанского технологического университета. 2014. Т. 17. №8. С. 306-307.
4. Мустафин Т.Н., Якупов Р.Р., Акшинская В.В., Хамидуллин М.С., Хисамеев И.Г. Геометрический анализ зацепления роторов винтового компрессора. вестник Казанского технологического университета. 2013. Т. 16. №19. С. 273-277.

© Аль Аззави Аус – магистрант каф. АССОИ КНИТУ, awsawskee@yahoo.com; М. Ю. Перухин – доцент той же кафедры, perukhin@gmail.com; Т. Н. Мустафин – к.т.н. каф. холодильной техники КНИТУ, mustimur@rambler.ru.

© Al Azzawi Aws - the masters degree candidate KNRTU, awsawskee@yahoo.com; M. Yu. Perukhin - associate professor, KNRTU, perukhin@gmail.com; T. N. Mustafin - associate professor, KNRTU, perukhin@gmail.com.