

Д. В. Бережной, М. К. Сагдатуллин, Л. У. Султанов

РАСЧЕТ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДЕФОРМИРУЕМЫХ КОНСТРУКЦИЙ С УЧЕТОМ ТРЕНИЯ В ЗОНЕ КОНТАКТА НА ОСНОВЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Ключевые слова: метод конечных элементов, контакт, трение.

На основе метода конечных элементов реализована «master-slave» методика контактного взаимодействия упругих деформируемых тел с учетом трения в зоне контакта. Использовался обоснованный с точки зрения решения экстремальных задач с ограничениями типа неравенств, проекционный алгоритм, получивший название «алгоритм проекции ближайшей точки». Решена модельная задача контактного взаимодействия двух деформируемых подконструкций, проведено сравнение результатов с данными, полученными другими авторами.

Keywords: a method of finite elements, contact, frictions.

Based on the finite element method is implemented «master-slave» method of contact interaction of elastic deformable bodies with friction in the contact zone. Use valid in terms of solving optimization problems with inequality constraints, the projection algorithm, called "projection algorithm nearest point". Solved the model problem of contact interaction of two deformable substructure, results were compared with data obtained by other authors.

Введение

Контактная задача при конечно-элементной реализации достаточно подробно исследовалась. Наиболее современное состояние проблем, возникающих при конечно-элементной реализации, приведено в книгах Wriggers P. (2002) и Laursen P. (2002). Для выполнения условий контакта при конечно-элементной реализации широкое распространение получили метод множителей Лагранжа, метод штрафа (penalty method), обобщенный метод множителей Лагранжа (Augmented Lagrange Method), прямое решение вариационной задачи ограничениями типа неравенств методами квадратичного программирования. Метод множителей Лагранжа основан на введении на неизвестной границе контакта дополнительных неизвестных, являющимися с механической точки зрения контактными усилиями. Основным неудобством является необходимость решения итерационной задачи с дополнительными неизвестными на контактной границе, что приводит к изменению глобальной матрицы жесткости и операциями с ней на глобальном уровне. Метод штрафа заключается в определении контактных усилий из дополнительно определяемых гипотез, включающих обычно параметр штрафа, при стремлении которого к бесконечности контактные условия выполняются асимптотически точно. Преимущество метода штрафа заключается в том, что дополнительные условия для контактных условий вводятся локально на элементе, что приводит к возможности построения, так называемых, контактных элементов локально. К недостаткам метода можно отнести сложность сходимости при больших значениях параметра штрафа. При этом возникает дилемма: как удовлетворить контактные условия с заданной точностью при сохранении условий сходимости. Проблему сходимости удается улучшить применением обобщенного метода Лагранжа, но проблема удовлетворения контактных условий с заданной точностью, особенно в случае задачи с трением требует дополнительного исследования. Объединяющим началом всех трех алгоритмов является алгоритм поиска зоны контакта. Таким стал, обоснованный с точки зрения решения экстремальных за-

дач с ограничениями типа неравенств проекционный алгоритм, получивший название «алгоритм проекции ближайшей точки» (the closest point projection algorithm). Данный алгоритм позволяет построить контактные элементы, основанные на подходе, получившим название «мастер-слуга» («master-slave»).

Сформулированная в вариационной постановке с применением данных подходов контактная задача является нелинейной и для решения применяются итерационные методы решения. Данные методы решения в большинстве случаев требуют первой производной от всей получаемой системы нелинейных уравнений, так называемой согласованной касательной матрицы системы. Это требуется в первую очередь для получения квадратичной скорости сходимости, а в ряде случаев хотя бы и линейной скорости сходимости итерационного процесса.

При решении контактной задачи методом конечных элементов основная сложность заключается в выполнении условий не проникновения, а также дополнительных кинематических условий в случае задачи с трением на общей неизвестной границе.

Рассмотрим контакт двух тел A и B , обладающих поверхностью с гладкостью C^1 , т.е. тех тел нормаль к поверхности, которых является непрерывной. Будем считать, что два тела A и B находятся в контакте, если существует общая точка C для двух поверхностей и общая нормаль. Множество этих точек называется зоной контакта S_C . Зона контакта, а также напряжения в ней не известны и должны быть определены из решения задачи.

Вариационная постановка контактной задачи основана на удовлетворении взаимного не проникновения тел. Для этого рассмотрим функцию проникновения для контактирующих тел A и B . На теле B выбираем точку S и проецируем ее на поверхность тела A . Расстояние CS , являющееся кратчайшим расстоянием между телами, и определяет функцию проникновения. Определим на теле A (рис. 1) нормаль \bar{n} . Пусть:

$$p = (\bar{r}_s - \bar{r}) \cdot \bar{n}.$$

Определенная таким образом функция позволяет судить о контакте тел: если $p > 0$, то проникновения нет (тела не контактируют), если $p \leq 0$, то тело B проникает в тело A , равенство $p = 0$ является условием непроникновения одного тела в другое.

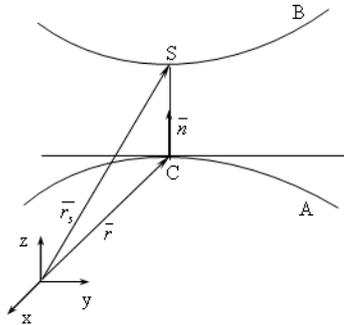


Рис. 1

Тело B , точки которого мы будем проверять на проникновение, называется «slave» тело, а точка S – «slave» точкой. Тело A , на поверхность которого мы проецируем «slave» точку, называется «master» тело, а его поверхность – «master» поверхность. Методика решения контактных задач, основанная на задании «slave» точек и определении величины проникновения p в «master» поверхность, получила название «master-slave» алгоритм. Роль «slave» точки играет обычно узел конечно-элементной сетки, а «master» точки C определяются из алгоритма проекции ближайшей точки. Рассмотрим разбиение двумерных областей на конечные элементы с линейной аппроксимацией (рис. 2).

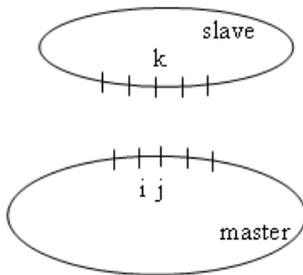


Рис. 2

На контактной линии «master» тела выбираем сегмент i, j , любой из узлов k «slave» тела является третьим узлом контактного элемента, т.к. тройка узлов i, j, k определяет контактный элемент.

В случае учета геометрической нелинейности в соотношении для деформаций используются компоненты симметричного тензора ε_{ij} :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (e_{ij} + e_{ji} + e_{ik} e_{jk}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^j}{\partial x^i} + \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \frac{\partial u^k}{\partial x^j} \right), \text{ н}$$

азываются компонентами тензора деформаций Коши-Грина.

Глобальная схема решения контактной задачи с учетом геометрической и физической нелинейности состоит в следующем. Записывается общее вариационное уравнение:

$$\delta W + \delta W_c + \delta W_g + \delta W_p = 0,$$

где часть δW относится ко всей конструкции, часть δW_c описывает контактное взаимодействие, часть δW_g описывает геометрически нелинейное деформирование, а часть δW_p – физически нелинейное деформирование. Далее производится сборка глобальной матрицы жесткости, после сборки которой вариационное уравнение примет вид:

$$\{\delta q\}^T \cdot (\{R\} + \{R_c\} + \{R_g\} + \{R_p\}) = 0.$$

В итоге для решения получаемого нелинейного уравнения используется метод Ньютона для вектор-функции F :

$$F = \{R\} + \{R_c\} + \{R_g\} + \{R_p\},$$

$F = F(\{q\})$, $\{q\}$ – глобальный вектор узловых перемещений.

Соответственно, задавая начальное приближение $\{q^{(0)}\}$, построим итерационную процедуру:

$$\{\Delta q\} = -F'(\{q\})^{-1} \cdot F(\{q\}),$$

$$\{q\}^{(n+1)} = \{q\}^{(n)} + \{\Delta q\}^{(n)}.$$

Производные функции невязки дают касательную матрицу жесткости:

$$F'(u) = \frac{dF}{d\{u\}} = [K] = [K_{ep}] + [K_c] + [K_g],$$

где $[K]$ – глобальная матрица жесткости конструкции, $[K_c] = [K_c^T] + [K_c^N]$ – глобальная контактная матрица жесткости, собираемая из локальных матриц на контактных элементах, включающая части нормального $[K_c^N]$ и касательного контакта $[K_c^T]$, $[K_{ep}]$ – «упругопластическая» матрица жесткости, $[K_g]$ – матрица геометрической жесткости.

Переход от вариационной задачи к алгебраической производится посредством дискретизации методом конечных элементов [8].

Рассмотрим взаимодействие упругих тел с учетом трения в зоне контакта [6,7,9,10] и сравним его с решением, приведенным в работе [3]. Исследуемая конструкция рис. 3 состояла из двух однородных изотропных подобластей S_1, S_2 , контактирующих по границе $r = 1,3 \text{ м}$ и находилась под действием сосредоточенной силы $P = 1200 \text{ Н}$, приложенной в центре. На участках контактного взаимодействия принимались условия проскальзывания либо сухого Кулонового трения с коэффициентом $f_{mp} = 0,3 - 0,4$.

На отрезке ($r = 0; 0 \leq z \leq 200$) подобласть жестко закреплена в недеформируемом основании: $u_r = 0; u_z = 0$, а на границе ($z = 0; 0 \leq r \leq 210$) ставились условия симметрии: $u_z = 0; \sigma_{rz} = 0$. Остальные участки контура полагались свободными. Условия идеального проскальзывания $\sigma_{rz}|_{r=130} = 0$ моделировались приближенно путем введения ма-

лого коэффициента трения $f_{mp} = 0,002$. Для обеих составляющих конструкции принималось: модуль Юнга $E = 95 \text{ МПа}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$.

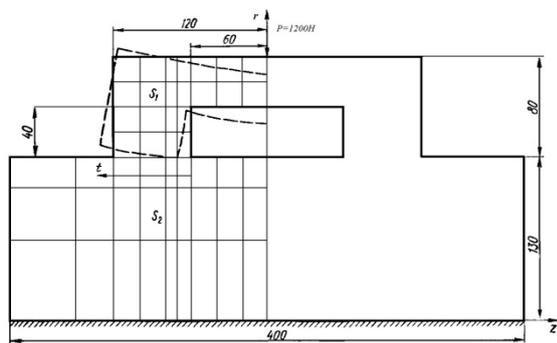


Рис. 3

Решения задачи, полученные в [3], представлены графиками приведенного контактного давления на рис. 4. Коэффициентом приведения являлась величина номинального давления P_n , которая имеет место при условии равномерного распределения общей нагрузки P по опорным площадкам. Кривые приведенного контактного давления, полученные в настоящей работе, отмечены на рис. 4 кружочками.

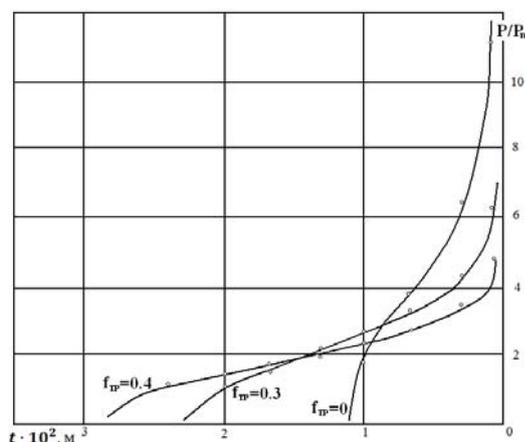


Рис. 4

Давления при подходе к угловой точке неограниченно возрастают, что качественно согласуется с поведением решений в задачах о внедрении штампов в упругие тела [4, 5]. Получено достаточно хорошее согласование размеров участков контакта и отрыва при решении задачи с учетом трения. Деформированное состояние конструкции показано штриховой линией в левой части рис. 3.

Отметим, что в расчетах, проведенных с различной степенью дискретизации рассматриваемой конструкции, зафиксированы близкие результаты, что свидетельствует о правильности и устойчивости полученных решений.

На основе полученных результатов можно сделать вывод, что МКЭ является эффективным средством для решения контактных задач. Он позволяет в рамках единой программной реализации рассматривать довольно обширный класс задач с различными условиями контактных взаимодействий. Метод являет-

ся индифферентным по отношению к геометрии контактирующих деталей, сложным граничным условиям и объемной нагрузке. Свойства материала могут быть неоднородными и анизотропными, а связь напряжений с деформациями нелинейной. Все перечисленные факторы несущественно усложняют алгоритмы и трудоемкость решения задачи

Сравнение результатов ряда задач с точными и приближенными методами свидетельствует о достоверности и высокой точности получаемых результатов при относительно невысокой трудоемкости и далеко не полном исчерпании возможностей программы.

Ценным является тот факт, что в результате расчета получаем не только контактные давления, но и НДС рассматриваемых деталей по всему объему. Использование метода и программы не требует высокой квалификации и легко осваивается инженерным персоналом промышленных предприятий. Метод обладает хорошей наглядностью и позволяет оценить качество решения путем исследования внутренней сходимости. Следует отметить эффективность использованного в программе типа конечного элемента и метода дискретизации.

В заключение отметим, что сгущение сетки конечных элементов в районах больших градиентов напряжений и особых точек, которые имеются в изобилии при решении контактных задач, является мощным инструментом для получения удовлетворительных решений.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов № 12-01-00955, № 12-01-97026, № 12-01-31212, № 13-97057, № 13-01-97058.

Литература

1. *Wriggers P.* Computational Contact Mechanics / P. Wriggers, John Wiley&Sons: Chichester, West Sussex, England, 2002. – 442 p.
2. *Laurson, Tod A.* Computational contact and impact mechanics: fundamentals of modeling interfacial phenomena in non-linear finite element analysis / Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Hong Kong; Springer. – 2002. – 454 p.
3. *Подгорный А.Н., Гонтаровский П.П., Киркач Б.Н. и др.* Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций / Отв. ред. Рвачев В.Л.; АН УССР. Ин-т проблем машиностроения. – Киев: Наук. думка, 1989. – 232 с.
4. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. – М.: Наука, 1974. – 456 с.
5. *Галин Л.А.* Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
6. *Бережной Д.В., Карамов А.В., Сагдатуллин М.К.* Моделирование деформирования поэтапной выемки грунта при строительстве подземных сооружений // Вестник Казанского государственного технологического университета. – 2012. – №17. – С.137-145.
7. *Бережной Д.В., Сагдатуллин М.К., Султанов Л.У.* Моделирование деформирования обделки тоннеля метрополитена, расположенной в грунте сложной физической природы // Вестник Казанского технологического университета. 2013. Т. 16. № 9. С. 250-255.
8. *Голованов А.И., Бережной Д.В.* Метод конечных элементов в механике деформируемых твердых тел. Казань, 2001, 300 с.

9. *Бережной Д.В., Сагдатуллин М.К., Саченков А.А.* Универсальный конечный элемент для расчета комбинированных конструкций // Вестник Казанского государственного технологического университета. – 2012. – №17. – С.150-157.

10. *Зайцева Т.А., Коноплев Ю.Г., Митряйкин В.И., Саченков О.А.* Математическое моделирование установки ацетабулярного компонента с недопокрытием // Научно-технический вестник Поволжья. 2014. № 4. С. 22-25.

© **Д. В. Бережной** - канд. физ.-мат. наук, доц. каф. теоретической механики КП(Ф)У, berezhnoi.dmitri@mail.ru **М. К. Сагдатуллин** - канд. физ.-мат. наук, доц. каф. теоретической механики и сопротивления материалов КНИТУ, ssmarat@mail.ru; **Л. У. Султанов** - канд. физ.-мат. наук, доц. каф. теоретической механики КП(Ф)У

© **D. V. Berezhnoi** - candidate of physico-mathematical sciences, associate professor, KFU, department of theoretical mechanics, berezhnoi.dmitri@mail.ru; **M. K. Sagdatullin** candidate of physico-mathematical sciences, associate professor, KNRTU, department of theoretical mechanics and strength of materials, ssmarat@mail.ru; **L. U. Sultanov** - candidate of physico-mathematical sciences, associate professor, KFU, department of theoretical mechanics.