УДК 532.135

**В. В. Плотников, С. А. Лившиц, А. А. Хисматуллин, Ю. С. Сидорова**

# ИССЛЕДОВАНИЕ ЛАМИНАРНОГО РЕЖИМА ТЕЧЕНИЯ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В БЕСКОНЕЧНОЙ КРУГЛОЙ ТРУБЕ ПРИ ТЕПЛОВЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ТРЕТЬЕГО РОДА

*Ключевые слова: течение нелинейно-вязкой жидкости, ламинарный режим, граничные условия третьего рода.*

*В работе проведено исследование ламинарного режима течения нелинейно-вязкой жидкости в круглой трубе в окрестности точки теплового взрыва с учетом действия диссипативного и химического источников тепловыделения. В качестве граничных условий приняты условия прилипания жидкости на стенке канала и тепловые граничные условия третьего рода. Исследование уравнения энергии произведено при помощи метода основанного на разложении функций в ряды Тейлора.*

*Keywords: for nonlinear viscous fluid, laminar boundary conditions of the third type.*

*In this article, the research of the laminar flow regime of nonlinear-viscous fluid in a circular pipe in the vicinity of thermal explosion considering impact of dissipative and chemical sources of heat was carried out. As the boundary conditions we adopted the conditions of the fluid slip on the channel wall and the third type thermal boundary conditions. Research of the energy equation was made by the method based on functions decomposition in Taylor series.*

## Введение

При течении нелинейно-вязких жидкостей возможны режимы, при которых тепло не успевает отводиться через стенку канала. При этом происходит явление, которое получило название «явление теплового взрыва» *.

Для явления теплового взрыва характерно, выделение тепла, скорость которого экспоненциально возрастает с температурой и потери тепла, зависящие от разности температур в теле и в окружающей среде. Очевиден тот факт, что явление теплового взрыва возможно лишь после прохождения потоком вязкой жидкости теплового начального участка. Условия необходимые для его возникновения могут возникать как благодаря диссипации энергии внешних воздействий, так и за счет выделения энергии, запасенной в веществе. При этом картина теплового взрыва остается неизменной.

Задачей исследования явления теплового взрыва является нахождение нестационарных полей температур и концентраций при неизотермическом протекании реакции.

Обзор работ, посвященных математическому описанию явлению теплового взрыва представлен в [1,2]. Одной из первых работ в этом направлении при рассмотрении явления теплового взрыва в движущихся вязких жидкостях является работа [3]. И несмотря на то, что в работе [4] была предложена методика при помощи которой возможно аналитическое исследование уравнения теплопроводности, к сожалению, в большинстве работ, как например, в [5] или в [6,7,9,10] приведены лишь результаты численных исследований.

Таким образом, анализ известных работ показывает, что мало внимания уделяется аналитическим исследованиям в области рассмотрения явления теплового взрыва.

## Постановка задачи

В работе исследуются ламинарные режимы течения нелинейно-вязкой жидкости в круглой трубе с учетом действия диссипативного и химического источников тепловыделения.

При решении поставленной задачи были приняты следующие допущения: течение жидкости в трубе ламинарное, осесимметричное и стационарное; теплофизические характеристики меняются незначительно; массовые силы пренебрежимо малы; перенос тепла вдоль направления движения за счет теплопроводности много меньше вынужденного; присутствует химический источник теплоты в виде реакции нулевого порядка; в качестве граничных условий взяты условия прилипания жидкости на стенке канала и на стенке трубы выбраны тепловые граничные условия третьего рода.

## Теоретическое исследование

При данных допущениях нами рассматривалась следующая система уравнений движения и сохранения энергии:

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} + \frac{\tau}{r} = \frac{\partial P}{\partial z} = \mathrm{const}, \quad r \in (0, r_1), \tag{1}$$

$$\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \mu I_2 + Q_0 \cdot k_0 \cdot \cdot \mathrm{Exp}\left(-E/RT\right) = 0, \quad r \in (0, r_1) \tag{2}$$

с граничными условиями:

* Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президиума РАН П-09 "Исследование вещества в экстремальных условиях"

при $r = 0 \quad \tau = 0, \ \dfrac{\partial T}{\partial r} = 0$, (3)

при $r = r_1 \quad v = 0, \ \lambda \cdot \left(\dfrac{\partial T}{\partial r}\right) = -\alpha_1 (T - T_0)$, (4)

где $r$ , $z$ – текущие координаты; $r_1$ – радиус трубы; $v$ – скорость; $T$ – температура; $\tau$ –напряжение сдвига; $\lambda, \mu$ – коэффициенты теплопроводности и динамической вязкости; $I_2$ – второй инвариант тензора скоростей деформации; $Q_0$ – тепловой эффект; $k_0$ –константа скорости; $E$ – энергия активации химической реакции; $R$ – газовая постоянная; $\alpha_1$ – коэффициент теплопроводности в окружающую среду.

В качестве реологической модели была выбрана реологическая модель Кутателадзе-Хабахпашевой [8] для структурно-вязкой жидкости.

$$\varphi_* = \mathrm{Exp}(-\tau_*), \tag{5}$$

где $\varphi_* = \dfrac{\varphi_\infty - \varphi}{\varphi_\infty - \varphi_0}$, $\tau_* = \tilde{\theta} \dfrac{|\tau - \tau_*|}{\varphi_\infty - \varphi_0}$

Температурные зависимости параметров реологической модели представим в аррениусовком виде:

$$\varphi_0 = A_0 \cdot \mathrm{Exp}\left(-B/_{RT}\right)$$

$$\varphi_\infty = A_\infty \cdot \mathrm{Exp}\left(-B/_{RT}\right)$$

$$\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_0 \cdot \mathrm{Exp}\left(-B/_{RT}\right)$$

$$\tau_0 = a_0 \cdot \mathrm{Exp}\left(-b_0 (T - T_0)\right)$$

Таким образом, в силу того текучесть обратно пропорциональна динамической вязкости получим выражение для $\mu$:

$$\mu = \mathrm{Exp}\left(B/_{RT}\right) \Big/ \left(A_\infty - (A_\infty - A_0) \cdot \mathrm{Exp}\left(-\tilde{\theta}_0 |\tau - \tau_0| / (A_\infty - A_0)\right)\right), \tag{6}$$

Второй инвариант тензора скоростей деформации в случае использования цилиндрических координат представим в виде:

$$I_2 = \left(\frac{\partial v}{\partial r}\right)^2.$$

Учитывая тот факт, что известное решение уравнения (1) описывающее распределение касательных напряжений сдвига в потоке имеет вид $\tau = \mu \dfrac{\partial v}{\partial r} = \dfrac{\partial P}{\partial z} \dfrac{r}{2}$ и переходя к новым безразмерным функциям:

$x = \dfrac{r}{r_1}$ – безразмерная функция координаты;

$\theta = \dfrac{E}{RT_0^2}(T - T_0)$ – безразмерная функция температуры.

Имеем уравнение сохранения энергии преобразованное к виду:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \chi x^2 \left(c_0 - (c_0 - 1)\mathrm{Exp}\left(-c_1\left(x - c_2 \mathrm{Exp}(-\beta_1 \beta \theta)\right)\right)\right) *$$
$$* \mathrm{Exp}\left(\alpha\theta /_{1+\beta\theta}\right) + \delta \mathrm{Exp}\left(\theta /_{1+\beta\theta}\right) = 0$$

где вновь введенные коэффициенты определяются следующим образом:

$\beta = RT_0/_E$ ; $\quad \alpha = B/_E$ ; $\quad c_0 = A_\infty/_{A_0}$ ;

$c_1 = \dfrac{\tilde{\theta}_0 \dfrac{\partial P}{\partial z} r_1}{2(A_\infty - A_0)}$ ; $\quad c_2 = \dfrac{2a_0}{\dfrac{\partial P}{\partial z} r_1}$ ; $\quad \beta_1 = b_0 T_0$ ;

$$\delta = \frac{Q_0 k_0 r_1^2 E}{\lambda R T_0^2} \mathrm{Exp}\left(-E/_{RT_0}\right);$$

$$\chi = \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)^2 \frac{r_1^4 A_0 E}{4 \lambda R T_0^2} \mathrm{Exp}\left(-B/_{RT_0}\right).$$

Ограничимся рассмотрением структурно-вязкой жидкости без предела текучести, т.е. с вырожденной областью ядра $(a_0 = 0) \Rightarrow c_2 = 0$. В этом случае уравнение энергии примет вид:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \chi x^2 \left(c_0 - (c_0 - 1)\mathrm{Exp}(-c_1 x)\right) W + \delta \tilde{W} = 0, \tag{7}$$

где $W = \mathrm{Exp}\left(\alpha\theta /_{1+\beta\theta}\right)$; $\tilde{W} = \mathrm{Exp}\left(\theta /_{1+\beta\theta}\right)$

Граничные условия в свою очередь примут вид:

$$x = 0, \tau = 0 \ \Rightarrow \ \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \tag{8}$$

$$x = 1, v = 0 \ \Rightarrow \ \frac{\partial \theta}{\partial x} = -Bi \cdot \theta|_\Gamma. \tag{9}$$

Записав разложение функций $\theta$, $W$, $\tilde{W}$ и $\mathrm{Exp}(-c_1 x)$ в ряды Тейлора $\left(\theta_0 = \theta|_{x=0}, \ W_0 = W|_{x=0}, \ \tilde{W}_0 = \tilde{W}|_{x=0}\right)$ и учтя тот факт что функции $\theta$, $W$, $\tilde{W}$ являются четными (как следствие производные нечетных порядков от этих функций равны нулю) выражение (7) представляется в виде:

$$\begin{aligned} &\theta_0'' + \frac{\theta_0^{(4)}}{2} x^2 + \theta_0'' + \frac{\theta_0^{(4)}}{6} x^2 + \\ &+ \left(1 + \frac{\theta_0''}{2(\theta_0 \beta + 1)^2} x^2\right) \cdot \delta \tilde{W}_0 + \\ &+ \chi \cdot x^2 \left(1 + (c_0 - 1) \cdot \left(c_1 x - \frac{c_1^2 x^2}{2}\right)\right) \cdot \\ &\cdot \left(1 + \frac{\alpha \theta_0''}{2(\theta_0 \beta + 1)^2} x^2\right) \cdot W_0 = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Рассмотрение коэффициентов при различных степенях $x$ позволяет, выразив $\theta_0''$ и

$\theta_0^{(4)}$ и представить функцию безразмерной температуры в виде следующего соотношения:

$$\theta = \theta_0 - \frac{\delta \widetilde{W}_0}{4} x^2 + \\ + \left( \frac{3\delta^2 \widetilde{W}_0^2}{8(\theta_0 \beta + 1)^2} x - \frac{3}{2} \chi W_0 \right) \cdot \frac{x^4}{24} \tag{11}$$

Используя граничные условия, мы получили характеристическое уравнение (12) которое уже можно исследовать, т.е. находить точки бифуркации и выявлять области, в которых данное уравнение решается неоднозначно.

$$h = \frac{\delta \mathrm{Exp}\left( h \big/ 1 + \beta h \right)}{4} \left( 1 + \frac{2}{Bi} \right) - \\ - \frac{\delta^2 \mathrm{Exp}\left( 2h \big/ 1 + \beta h \right)}{64 (1 + \beta h)^2} \left( 1 + \frac{4}{Bi} \right) + \\ + \frac{\chi \mathrm{Exp}\left( \alpha h \big/ 1 + \beta h \right)}{16} \left( 1 + \frac{4}{Bi} \right) \tag{12}$$

Здесь $h = \theta_0$.

Рассмотрено также течение нелинейно-вязкой жидкости с преобладающим химическим тепловыделением $(B << E)$. При этом вычисления проводились аналогично, а в результате имеем следующее характеристическое уравнение:

$$h - \beta - \frac{\chi_1}{16} - \frac{\chi_1}{4Bi} = \frac{\delta_1 \mathrm{Exp}\left( -1 \big/ h \right)}{4} \left( 1 + \frac{2}{Bi} \right) - \\ - \frac{\delta_1^2 \mathrm{Exp}\left( -2 \big/ h \right)}{64 h^2} \left( 1 + \frac{4}{Bi} \right) \tag{13}$$

где $\chi_1 = \chi \cdot \beta^2$, $\delta_1 = \delta \cdot \beta^2 \cdot \mathrm{Exp}\left( 1 \big/ \beta \right)$

Отдельно следует отметить что даже в том случае, когда тепловой эффект химической реакции незначителен $(Q_0 \approx 0)$ при применении предложенной процедуры, в силу того что характеристическое уравнение имеет вид:

$$\frac{16}{\gamma} \frac{Bi}{Bi + 4} \left( h - \frac{\beta}{\alpha} \right) = \mathrm{Exp}\left( -1 \big/ h \right) \tag{14}$$

Из рис. 1 видно, что при определенных соотношениях входящих в уравнение параметров возможно, как и наличие одного решения (рис. 1), так и наличие нескольких (двух (рис. 2 и 3) или трех (рис. 4).

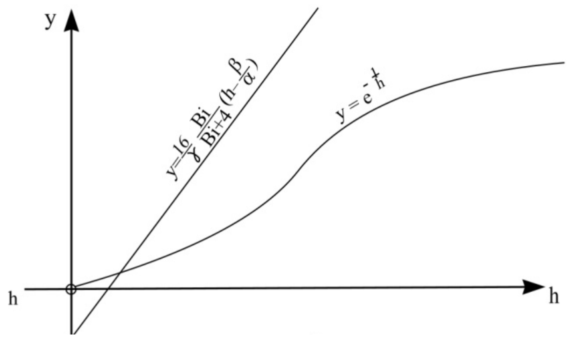


**Рис. 1 – Одно решение**

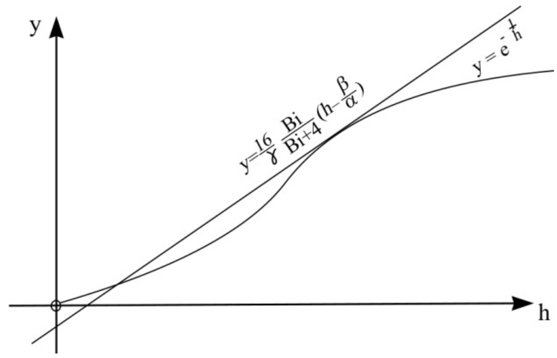


**Рис. 2 – Два решения**

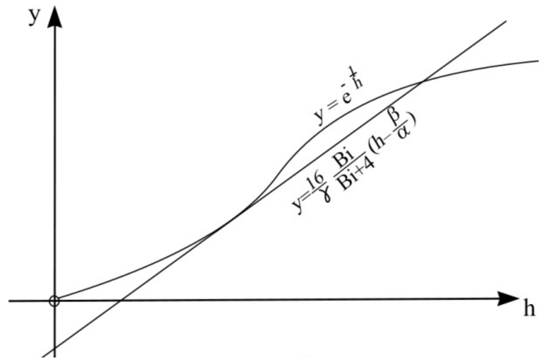


**Рис. 3 – Два решения**

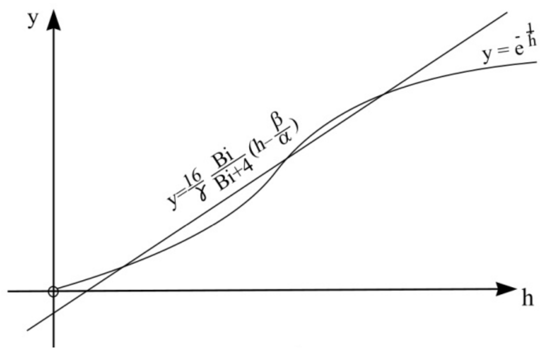


**Рис. 4 – Три решения**

## Выводы

Таким образом, при исследовании системы дифференциальных уравнений (1)-(2) с граничными условиями третьего рода (3)-(4) было получено алгебраическое уравнение (12) и отдельно рассмотрено два частных случая: движение с преобладающим химическим тепловыделением (13) и случай когда тепловой эффект химической реакции незначителен (14). Даже в случае когда тепловой эффект химической реакции незначителен существуют такие наборы параметров входящих в уравнение (14) при которых возможно наличие как одного так и нескольких решений.

## Литература


1. Франк-Каменецкий Д.А. Теплопередача и диффузия в химической кинетике. Москва, изд-во Наука, 1987.
2. Мержанов А.Г., Барзыкин В.В., Абрамов В.Г. «Теория теплового взрыва: от Н.Н. Семенова до наших дней» // Химическая физика. 1996, т.15 №6, с. 3-43.
3. Бостанджинян С.А., Мержанов А.Г., Худяев С.И.«О Гидродинамическом тепловом взрыве» // Доклады Академии наук СССР 1965, т. 163 №1 с. 133-136.
4. Назмеев Ю.Г., Малов К.М., Шарапов А.Р. «Бифуркационный анализ уравнения энергии движущихся вязких сред в бесконечной круглой трубе» //Вести академии наук БССР Минск, 1991. № 3 С. 115-122.
5. Назмеев Ю.Г., Миненков В.А., Мумладзе А.И. «Тепловой взрыв при течении нелинейно-вязких сред в круглой трубе». //ИФЖ Отдельный выпуск Минск 1988. т.55 №2.
6. Аликина О.Н., Тарунин Е.Л. «Подкритические движения жидкости в случае вязкости зависящей от температуры» //Изв. РАН Механика жидкости и газа 2001 №4 с. 55-62
7. Быков В.И., Цыбенова С.Б. «Параметрический анализ простейшей модели теории теплового взрыва модели Зельдовича-Семенова» //Физика горения и взрыва, 2001. т. 37 № 5 С. 36-47.
8. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена М., 1979.
9. Снигерев Б.А. Течение упроговязкой жидкости со свободной поверхностью/ Б.А. Снигерев, Ф.Х. Тазюков // Вестник Казан. технолог. ун-та. – 2007. - №1. С.85-92.
10. Минибаева Л.Р. Численное моделирование гидродинамической структуры потока в аппарате с перемешивающими устройствами / Л.Р. Минибаева, А.Г. Мухаметзянова, А.В. Клинов // Вестник Казан. технолог. ун-та.-2008.- №6. – Ч.1. С. 191-198.


---


© **В. В. Плотников** – канд. техн. наук, доцент каф. АСС и ОИ, КНИТУ, carpenter_wowa@mail.ru; **С. А. Лившиц** – канд. техн. наук, доцент каф. ЭОП, КГЭУ, semen19772004@mail.ru; **А. А. Хисматуллин** – асп. каф. «Экономика и организация производства», КГЭУ; **Ю. С. Сидорова** – асп. каф. «Автоматизация технологических процессов и производств», КГЭУ, yuliya-sid_87@mail.ru.

© **V. V. Plotnikov** – k.t.n., docent, dep. ASS&OI, KNRTU, carpenter_wowa@mail.ru; **S. A. Livchiz** – k.t.n., docent, dep. EOI, KSPEU, semen19772004@mail.ru; **A. A. Hismatullin** – ass. dep. EOI, KSPEU; **Yu. S. Sidorova** – ass. dep. ATPP, KSPEU, yuliya-sid_87@mail.ru.