

В. В. Плотников, С. А. Лившиц, А. А. Хисматуллин,
Ю. С. Сидорова

ИССЛЕДОВАНИЕ СТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ РЕОЛОГИЧЕСКИ СЛОЖНОЙ ЖИДКОСТИ В БЕСКОНЕЧНОЙ КРУГЛОЙ ТРУБЕ

Ключевые слова: стационарного течения реологически сложной жидкости, ламинарный режим, граничные первого и третьего родов.

В работе проведено исследование стационарного течения реологически сложной жидкости в бесконечной круглой трубе. Получены характеристические уравнения для ламинарного течения ньютоновской, дельтатантной и псевдопластичной жидкостей в бесконечной круглой трубе. В качестве граничных условий приняты условия прилипания жидкости на стенке трубы, а в качестве тепловых граничных условий рассматривались граничные условия первого и третьего родов.

Keywords: Steady flow of rheologically complex fluids, laminar, the boundary of the first and third types.

In this article, the research of steady flow of rheologically complex fluids in an infinite circular pipe was carried out. The characteristic equations for laminar flow of Newtonian, pseudoplastic and dilatant fluids in an infinite circular pipe are obtained. As the boundary conditions we adopted the conditions of the fluid slip on the channel wall, and as the thermal boundary conditions we considered the first and third types boundary conditions.

Введение

При течении вязких жидкостей возможны режимы, при которых тепло не успевает отводиться через стенку канала*. При этом в потоке возникает высокая плотность энергии, приводящая к резкому нарастанию температуры жидкости, т.е. к явлению называемому тепловым взрывом. Данное явление может происходить как в случае течения химически активной жидкости, так и при течении химически инертных жидкостей. Картина теплового взрыва при этом остается неизменной.

Очевидно, и это подтверждено численными исследованиями [1,2], тепловой взрыв возникает на длинах каналов, превышающих гидродинамический и тепловой начальный участки. Так как при их прохождении вся тепловая энергия тратится на формирование скоростного и температурного полей. И лишь после прохождения потоком вязкой жидкости начального участка становится возможной ситуация возникновения теплового взрыва.

В еще в 1965 году в работе [3] были получены базовые уравнения, позволяющие говорить о возникновении явления теплового взрыва при течении вязких жидкостей. Обзор работ, посвященных явлению теплового взрыва представлен в [4,5]. Особого внимания заслуживает работа [6,7,8] в которой предлагается методика исследования уравнения теплопроводности с использованием аппарата разложения искомых функций в ряды. Однако, анализ известных работ показал, что на сегодняшний день в полной мере не решена задача исследования течения обобщенно-вязкой жидкости по трубам и каналам.

Теоретическое исследование

В представленной работе рассмотрено ламинарное течение обобщенно-вязкой жидкости в бесконечной круглой трубе при следующих допущениях:

1. Теплофизические характеристики вязкой жидкости постоянны.
2. Массовые силы пренебрежимо малы.
3. Течение жидкости предполагается ламинарное и осесимметричное.
4. Перенос тепла вдоль направления движения значительно меньше вынужденного.

При исследовании течения вязкой жидкости в круглой трубе целесообразно все уравнения и формулы и расчеты проводить в цилиндрических координатах (r, φ, z)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$$

$$z = z$$

Для исследования течения обобщенно-вязкой жидкости мы использовали систему уравнений движения и сохранения энергии записанную в цилиндрических координатах:

$$\frac{d\tau}{dr} + \frac{\tau}{r} = \frac{dP}{dz} = \text{const}, \quad r \in (0, r_1), \quad (1)$$

$$\lambda \left(\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} \right) + \mu I_2 + Q_0 \cdot k_0 \cdot \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) = 0, \quad r \in (0, r_1) \quad (2)$$

Для исследуемой задачи на границе взяты условия прилипания. В качестве тепловых граничных условий были рассмотрены тепловые граничные условия первого и третьего рода.

Тепловые граничные условия первого рода:

$$r = r_1 \quad v = 0, \quad T = T_1 = \text{const}, \quad (3)$$

Тепловые граничные условия третьего рода:

* Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президиума РАН П-09 "Исследование вещества в экстремальных условиях"

$$r = r_1 \quad v = 0, \quad \lambda \cdot \left(\frac{dT}{dr} \right) = -\alpha_1 (T - T_1), \quad (4)$$

здесь r, z – текущие координаты; r_1 – радиус трубы; v – скорость; T – температура жидкости; τ – напряжение сдвига; λ, μ – коэффициенты теплопроводности и динамической вязкости; I_2 – второй инвариант тензора скоростей деформации; Q_0 – тепловой эффект; k_0 – константа скорости; E – энергия активации химической реакции; R – газовая постоянная.

Следует отметить, что в силу того, что нами рассматривается течение со сформировавшимся профилем вектора скорости в бесконечной круглой трубе, т.е. в условиях абсолютной симметрии то в центре трубы имеется экстремум по температуре:

$$r = 0 \quad \tau = 0, \quad \frac{dT}{dr} = 0, \quad (5)$$

В качестве реологической модели воспользуемся уравнением Кутателадзе-Хабахпашевой для структурно вязкой жидкости.

$$\varphi^* = \text{Exp}(-\tau^*), \quad (6)$$

$$\text{где } \varphi^* = \frac{\varphi_\infty - \varphi}{\varphi_\infty - \varphi_0}, \quad \tau^* = \theta \frac{|\tau - \tau_0|}{\varphi_\infty - \varphi_0}.$$

Таким образом

$$\varphi = \varphi_\infty - (\varphi_\infty - \varphi_0) \cdot \text{Exp} \left(-\tilde{\theta} \cdot \frac{|\tau - \tau_0|}{\varphi_\infty - \varphi_0} \right)$$

Температурные зависимости параметров реологической модели представим в аррениусовом виде:

$$\varphi_0 = A_0 \cdot \text{Exp} \left(-B_0 / RT \right)$$

$$\varphi_\infty = A_\infty \cdot \text{Exp} \left(-B_\infty / RT \right)$$

$$\tilde{\theta} = \tilde{\theta}_0 \cdot \text{Exp} \left(-B_0 / RT \right)$$

$$\tau_0 = a_0 \cdot \text{Exp} \left(-b_0 / RT \right)$$

здесь $\tilde{\theta}$ – мера структурной стабильности жидкости, а B – энергия активации вязкого течения.

Таким образом:

$$\varphi = \text{Exp} \left(-B / RT \right) \cdot \left[A_\infty - (A_\infty - A_0) \cdot \text{Exp} \left(-\tilde{\theta}_0 \cdot \frac{|\tau - \tau_0|}{A_\infty - A_0} \right) \right]$$

В силу того, что коэффициент динамической вязкости обратно пропорционален текучести, то мы имеем:

$$\mu = \text{Exp} \left(B / RT \right) \cdot \frac{1}{A_\infty - (A_\infty - A_0) \cdot \text{Exp} \left(-\tilde{\theta}_0 \cdot \frac{|\tau - \tau_0|}{A_\infty - A_0} \right)} \quad (7)$$

Отметим, что реологическая модель Кутателадзе-Хабахпашевой для структурно-вязкой жидкости предполагает возможность рассмотрения различных типов жидкости:

$$\text{ньютоновской жидкости} \left(\frac{\partial \mu}{\partial I_2} = 0 \right),$$

$$\text{псевдопластичной жидкости} \left(\frac{\partial \mu}{\partial I_2} < 0 \right),$$

$$\text{делатантной жидкости} \left(\frac{\partial \mu}{\partial I_2} > 0 \right).$$

Уравнение движения (1) в нашем случае, представляет из себя, обыкновенное, линейное дифференциальное уравнение первого порядка и его решение представимо в виде:

$$\tau = e^{-\int \frac{dr}{r}} \cdot \left(\int \frac{dP}{dz} \cdot e^{\int \frac{dr}{r}} dr + c_1 \right) = \frac{r}{2} \frac{dP}{dz} + \frac{c_1}{r}$$

Учитывая допущение о том, что профиль вектора скорости мгновенно подстраивается под изменение температуры и условие симметрии движущегося по трубе потока (5), получаем $c_1 = 0$.

$$\text{Таким образом: } \tau = \frac{r}{2} \frac{dP}{dz}.$$

Так как напряжение сдвига выражается формулой $\tau = \mu \frac{dV}{dr}$, то имеем:

$$\mu \frac{dV}{dr} = \frac{r}{2} \frac{dP}{dz} \quad (8)$$

Учитывая тот факт, что второй инвариант тензора скоростей деформации I_2 в цилиндрических координатах выражается соотношением

$$I_2 = \left(\frac{dV}{dr} \right)^2 \quad \text{мы можем записать:}$$

$$\mu I_2 = \left(\frac{dP}{dz} \right)^2 \frac{r^2}{4} \frac{1}{\mu} \quad (9)$$

Таким образом, из рассмотрения системы уравнений движения и сохранения энергии (1)-(2) мы получаем следующее соотношение:

$$\lambda \left(\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} \right) + \left(\frac{dP}{dz} \right)^2 \frac{r^2}{4} \frac{1}{\mu} + Q_0 \cdot k_0 \cdot \text{Exp} \left(-E / RT \right) = 0, \quad r \in (0, r_1) \quad (10)$$

Его в дальнейшем мы и будем исследовать.

Для решения данного уравнения необходимо представить его в безразмерном виде, для этого введем некоторые новые обозначения:

$$x = \frac{r}{r_1} \quad \text{– безразмерная функция координаты;}$$

$$\theta = \frac{E}{RT_0^2} (T - T_0) \quad \text{– безразмерная функция температуры.}$$

С учетом этих переобозначений отметим:

$$\begin{aligned}
\frac{dT}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT}{dr} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \cdot \frac{dT}{dr} \right) = \frac{1}{x\eta} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \frac{d}{dx} \left(x\eta \cdot \frac{dT}{dr} \right) = \\
&= \frac{1}{x\eta^2} \cdot \frac{d}{dx} \left(x\eta \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \frac{dT}{dx} \right) = \frac{1}{x\eta^2} \cdot \frac{d}{dx} \left(x \cdot \frac{dT}{dx} \right) \\
&= \frac{R \cdot T_0^2}{E \cdot \eta^2} \left(\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d\theta}{dx} \right) \\
\left(\frac{dP}{dz} \right)^2 \frac{r^2}{4} \frac{1}{\mu} &= \left(\frac{dP}{dz} \right)^2 \frac{x^2 \eta^2}{4} \cdot \\
&\cdot \left[A_\infty - (A_\infty - A_0) \exp \left(-\tilde{\theta}_0 \frac{|\tau - \tau_0|}{A_\infty - A_0} \right) \right] \exp \left(-B/R\tau \right) = \\
&= \left(\frac{dP}{dz} \right)^2 \cdot \frac{x^2 \cdot \eta^2}{4} \cdot [A_\infty - (A_\infty - A_0) \cdot \\
&\exp \left(-\tilde{\theta}_0 \cdot \frac{\left| \tau - a_0 \cdot \exp \left(-b_0 \frac{\theta \cdot R \cdot T_0^2}{E} \right) \right|}{A_\infty - A_0} \right)] = \\
&= \left(\frac{dP}{dz} \right)^2 \cdot \frac{x^2 \cdot \eta^2}{4} \cdot [A_\infty - (A_\infty - A_0) \cdot \\
&\cdot \exp \left(-\tilde{\theta}_0 \cdot \frac{\left| \tau - a_0 \cdot \exp \left(-b_0 \frac{\theta \cdot R \cdot T_0^2}{E} \right) \right|}{A_\infty - A_0} \right)] = \\
&\times \exp \left(-\frac{B}{\theta \cdot R^2 \cdot T_0^2 + R \cdot T_0} \right) = \\
&= \left(\frac{dP}{dz} \right)^2 \cdot \frac{x^2 \cdot \eta^2}{4} \cdot \exp \left(\theta \cdot B / (\theta \cdot R \cdot T_0 + E) \right) \times \\
&\times \exp \left(-B/R \cdot T_0 \right) \cdot [A_\infty - (A_\infty - A_0) \cdot \\
&\cdot \exp \left(-\tilde{\theta}_0 \cdot \frac{\left| \tau - a_0 \cdot \exp \left(-b_0 \frac{\theta \cdot R \cdot T_0^2}{E} \right) \right|}{A_\infty - A_0} \right)] \quad (12)
\end{aligned}$$

Так как:

$$-\frac{B}{\frac{\theta \cdot R^2 \cdot T_0^2}{E} + R \cdot T_0} = \frac{\theta \cdot B}{\theta \cdot R \cdot T_0 + E} - \frac{B}{R \cdot T_0}$$

$$\begin{aligned}
Q_0 \cdot k_0 \cdot \exp \left(-\frac{E}{R\tau} \right) &= Q_0 \cdot k_0 \cdot \\
&\cdot \exp \left(-\frac{E}{\frac{\theta \cdot R^2 \cdot T_0^2}{E} + R \cdot T_0} \right) = \\
&= Q_0 \cdot k_0 \cdot \exp \left(\frac{E \cdot \theta}{\theta \cdot R \cdot T_0 + E} \right) \cdot \exp \left(-\frac{E}{R \cdot T_0} \right) \\
(13) \quad \text{Так как:} \\
&-\frac{E}{\frac{\theta \cdot R^2 \cdot T_0^2}{E} + R \cdot T_0} = \frac{\theta \cdot E}{\theta \cdot R \cdot T_0 + E} - \frac{E}{R \cdot T_0} \\
&\text{С учетом проделанных преобразований исследуемое выражение принимает вид:} \\
&\lambda \cdot \frac{R \cdot T_0^2}{E \cdot \eta^2} \left(\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d\theta}{dx} \right) + \left(\frac{dP}{dz} \right)^2 \cdot \\
&\cdot \frac{x^2 \cdot \eta^2}{4} \cdot \exp \left(\theta \cdot B / (\theta \cdot R \cdot T_0 + E) \right) \times \\
&\times \left[A_\infty - (A_\infty - A_0) \cdot \exp \left(-\tilde{\theta}_0 \cdot \frac{\left| \tau - a_0 \exp \left(-b_0 \frac{\theta R T_0^2}{E} \right) \right|}{A_\infty - A_0} \right) \right] \cdot \\
&\exp \left(-B/R \cdot T_0 \right) + Q_0 \cdot k_0 \cdot \exp \left(\frac{E \cdot \theta}{\theta \cdot R \cdot T_0 + E} \right) \cdot \\
&\cdot \exp \left(-\frac{E}{R \cdot T_0} \right) = 0 \quad (14)
\end{aligned}$$

Разделив соотношение (14) на $\lambda \frac{R \cdot T_0^2}{E \cdot \eta^2}$ имеем:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d\theta}{dx} + \left(\frac{dP}{dz} \right)^2 \cdot \frac{x^2 \cdot \eta^4 \cdot E \cdot A_0}{4 \cdot \lambda \cdot R \cdot T_0^2} \cdot \\
&\cdot \exp \left(\theta \cdot B / (\theta \cdot R \cdot T_0 + E) \right) \times \\
&\times \left[\frac{A_\infty}{A_0} - \left(\frac{A_\infty}{A_0} - 1 \right) \cdot \exp \left(-\tilde{\theta}_0 \cdot \frac{\left| \frac{dP}{dz} \frac{x\eta}{2} - a_0 \exp \left(-b_0 \frac{\theta R T_0^2}{E} \right) \right|}{A_\infty - A_0} \right) \right] \cdot \\
&\cdot \exp \left(-B/R \cdot T_0 \right) + \frac{Q_0 \cdot k_0 \cdot \eta^2 \cdot E}{\lambda \cdot R \cdot T_0^2} \cdot \exp \left(\frac{E \cdot \theta}{\theta \cdot R \cdot T_0 + E} \right) \cdot \\
&\cdot \exp \left(-\frac{E}{R \cdot T_0} \right) = 0 \quad (15)
\end{aligned}$$

Для сокращения записи введем некоторые новые обозначения:

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{R \cdot T_0}{E}; & \alpha &= \frac{B}{E}; \\ c_0 &= \frac{A_\infty}{A_0}; & c_1 &= \frac{\tilde{\theta}_0 \cdot \frac{dP}{dz} \cdot \eta}{2(A_\infty - A_0)}; \\ c_2 &= \frac{2a_0}{\frac{dP}{dz} \cdot \eta}; & \beta_1 &= b_0 \cdot T_0; \\ \chi &= \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)^2 \frac{\eta^4 \cdot A_0 \cdot E}{4 \cdot \lambda \cdot R \cdot T_0} \exp\left(-\frac{B}{RT_0}\right) \\ \delta &= \frac{\eta^2 \cdot Q_0 \cdot k_0 \cdot E}{\lambda \cdot R \cdot T_0} \exp\left(-\frac{E}{RT_0}\right)\end{aligned}$$

После введения этих обозначений соотношение (15) принимает вид:

$$\begin{aligned}& \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d\theta}{dx} + \chi \cdot x^2 \cdot \\ & \cdot [c_0 - (c_0 - 1) \cdot \exp(-c_1 \cdot (x - c_2 \cdot \exp(-\beta_1 \cdot \beta \cdot \theta)))] \times \\ & \times \exp\left(\frac{\alpha \cdot \theta}{(1 + \beta \cdot \theta)}\right) + \delta \cdot \exp\left(\frac{\theta}{(1 + \beta \cdot \theta)}\right) = 0 \quad (16)\end{aligned}$$

В данной работе мы ограничимся рассмотрением структурно-вязкой жидкости без предела текучести, т.е. с вырожденной областью ядра $a_0 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$.

С учетом этого ограничения соотношение (16) примет вид:

$$\begin{aligned}& \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\theta}{dx} + \chi x^2 [c_0 - (c_0 - 1) e^{-c_1 x}] \times \\ & \times \exp\left(\frac{\alpha \theta}{(1 + \beta \theta)}\right) + \delta \exp\left(\frac{\theta}{(1 + \beta \theta)}\right) = 0 \quad (17)\end{aligned}$$

Обозначив $W = \exp\left(\frac{\alpha \cdot \theta}{(1 + \beta \cdot \theta)}\right)$ и

$\tilde{W} = \exp\left(\frac{\theta}{(1 + \beta \cdot \theta)}\right)$, получим выражение удобное для исследований.

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\theta}{dx} + \chi x^2 [c_0 - (c_0 - 1) e^{-c_1 x}] W + \delta \tilde{W} = 0 \quad (18)$$

Отметим, что если c_1 всегда больше нуля то в случае $c_0 < 1$ рассматривается делатантная жидкость, $c_0 = 1$ рассматривается ньютоновская жидкость и в случае $c_0 > 1$ рассматривается псевдопластичная жидкость.

Решать неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами (18) будем, используя разложение функции θ , а также функций W и $\tilde{W}$ в ряды Тейлора в окрестности точки ноль.

Отметим:

$$W' = W \cdot \frac{\alpha \cdot \theta'}{(\theta \cdot \beta + 1)^2}$$

$$\begin{aligned}W'' &= W \cdot \left[\frac{\alpha^2 \cdot (\theta')^2}{(\theta \cdot \beta + 1)^4} - \frac{2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot (\theta')^2}{(\theta \cdot \beta + 1)^3} + \frac{\alpha \cdot \theta''}{(\theta \cdot \beta + 1)^2} \right] \\ W''' &= W \cdot \left[\frac{\alpha^3 (\theta')^3}{(\theta \beta + 1)^6} - \frac{6 \alpha^2 \beta (\theta')^3}{(\theta \beta + 1)^5} + \frac{3 \alpha^2 \theta' \theta'' + 6 \alpha \beta^2 (\theta')^3}{(\theta \beta + 1)^4} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{6 \alpha \beta \theta' \theta''}{(\theta \beta + 1)^3} + \frac{\alpha \theta'''}{(\theta \beta + 1)^2} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W^{(4)} &= W \cdot \left[\frac{\alpha^4 \cdot (\theta')^4}{(\theta \cdot \beta + 1)^8} - \frac{12 \alpha^3 \cdot \beta \cdot (\theta')^4}{(\theta \cdot \beta + 1)^7} + \right. \\ & \quad + \frac{6 \alpha^3 \cdot (\theta')^2 \cdot \theta'' + 36 \alpha^2 \cdot \beta^2 \cdot (\theta')^4}{(\theta \cdot \beta + 1)^6} - \\ & \quad - \frac{18 \alpha^2 \beta (\theta')^2 \theta'' + 24 \alpha \beta^3 (\theta')^4}{(\theta \beta + 1)^5} + \\ & \quad + \frac{4 \alpha^2 \theta''' \theta' + 3 \alpha (\theta'')^2 + 18 \alpha \beta^2 \theta'' (\theta')^2}{(\theta \beta + 1)^4} - \\ & \quad \left. - \frac{8 \alpha \beta \theta''' \theta' + 6 \alpha \beta (\theta'')^2}{(\theta \beta + 1)^3} + \frac{\alpha \theta^{(4)}}{(\theta \beta + 1)^2} \right]\end{aligned}$$

$$\tilde{W}' = \tilde{W} \cdot \frac{\theta'}{(\theta \cdot \beta + 1)^2}$$

$$\begin{aligned}\tilde{W}'' &= \tilde{W} \cdot \left[\frac{(\theta')^2}{(\theta \cdot \beta + 1)^4} - \frac{2 \cdot \beta \cdot (\theta')^2}{(\theta \cdot \beta + 1)^3} + \frac{\theta''}{(\theta \cdot \beta + 1)^2} \right] \\ \tilde{W}''' &= \tilde{W} \cdot \left[\frac{(\theta')^3}{(\theta \beta + 1)^6} - \frac{6 \beta (\theta')^3}{(\theta \beta + 1)^5} + \frac{3 \theta' \theta'' + 6 \beta^2 (\theta')^3}{(\theta \beta + 1)^4} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{6 \beta \theta' \theta''}{(\theta \beta + 1)^3} + \frac{\theta'''}{(\theta \beta + 1)^2} \right] \\ \tilde{W}^{(4)} &= \tilde{W} \cdot \left[\frac{(\theta')^4}{(\theta \beta + 1)^8} - \frac{12 \beta (\theta')^4}{(\theta \beta + 1)^7} + \frac{6 (\theta')^2 \theta'' + 36 \beta^2 (\theta')^4}{(\theta \beta + 1)^6} - \right. \\ & \quad - \frac{18 \beta (\theta')^2 \theta'' + 24 \beta^3 (\theta')^4}{(\theta \beta + 1)^5} + \\ & \quad + \frac{4 \alpha^2 \theta''' \theta' + 3 \alpha (\theta'')^2 + 18 \alpha \beta^2 \theta'' (\theta')^2}{(\theta \beta + 1)^4} - \\ & \quad \left. - \frac{8 \beta \theta''' \theta' + 6 \beta (\theta'')^2}{(\theta \beta + 1)^3} + \frac{\theta^{(4)}}{(\theta \beta + 1)^2} \right]\end{aligned}$$

Обозначив: $\theta|_{x=0} = \theta_0$; $W|_{x=0} = W_0$;

$\tilde{W}|_{x=0} = \tilde{W}_0$; $\theta'|_{x=0} = \theta'_0$ $W'|_{x=0} = W'_0$;

$\tilde{W}'|_{x=0} = \tilde{W}'_0$... и учитывая тот факт, что в силу

абсолютной симметрии круглой трубы функция θ является четной мы получим:

$$W'_0 = 0$$

$$\begin{aligned}
W_0'' &= W_0 \cdot \frac{\alpha \cdot \theta_0''}{(\theta_0 \cdot \beta + 1)^2} \\
W_0''' &= 0 \\
W_0^{(4)} &= W_0 \cdot \left[\frac{3\alpha(\theta_0'')^2}{(\theta_0\beta + 1)^4} - \frac{6\alpha\beta(\theta_0'')^2}{(\theta_0\beta + 1)^3} + \frac{\alpha\theta_0^{(4)}}{(\theta_0\beta + 1)^2} \right] \\
\tilde{W}_0' &= 0 \\
\tilde{W}_0'' &= \tilde{W}_0 \cdot \frac{\theta_0''}{(\theta_0 \cdot \beta + 1)^2} \\
\tilde{W}_0''' &= 0 \\
\tilde{W}_0^{(4)} &= \tilde{W}_0 \cdot \left[\frac{3(\theta_0'')^2}{(\theta_0\beta + 1)^4} - \frac{6\beta(\theta_0'')^2}{(\theta_0\beta + 1)^3} + \frac{\theta_0^{(4)}}{(\theta_0\beta + 1)^2} \right]
\end{aligned}$$

Таким образом, мы получили разложение функций θ , W и $\tilde{W}$ в ряды Тейлора в окрестности точки ноль.

$$\begin{aligned}
\theta &= \theta_0 + \frac{\theta_0''}{2} x^2 + \frac{\theta_0^{(4)}}{24} x^4 + \frac{\theta_0^{(6)}}{720} x^6 \\
W &= W_0 + \frac{W_0''}{2} x^2 + \frac{W_0^{(4)}}{24} x^4 \\
\tilde{W} &= \tilde{W}_0 + \frac{\tilde{W}_0''}{2} x^2 + \frac{\tilde{W}_0^{(4)}}{24} x^4
\end{aligned}$$

Подставив полученные разложения в выражение (18) и аппроксимируя функцию $\text{Exp}(-c_1 \cdot x)$ полиномом второй степени

$$\begin{aligned}
\text{Exp}(-c_1 \cdot x) &= 1 - (1 - \text{Exp}(-c_1)) \cdot x^2 \\
\text{Тогда:} \\
2 \cdot \theta_0'' + \frac{2}{3} \cdot \theta_0^{(4)} \cdot x^2 + \frac{1}{20} \cdot \theta_0^{(6)} \cdot x^4 + \chi \cdot x^2 \cdot \\
\cdot \left[1 + (c_0 - 1)(1 - \text{Exp}(-c_1)) \cdot x^2 \right] \times \\
\times W_0 \cdot \left[1 + \frac{\alpha \cdot \theta_0''}{2(\theta_0\beta + 1)^2} \cdot x^2 + \left(\frac{\alpha(\theta_0'')^2}{8(\theta_0\beta + 1)^4} - \frac{\alpha\beta(\theta_0'')^2}{4(\theta_0\beta + 1)^3} + \frac{\alpha\theta_0^{(4)}}{24(\theta_0\beta + 1)^2} \right) \cdot x^4 \right] + \\
+ \delta \tilde{W}_0 \cdot \left[1 + \frac{\theta_0''}{2(\theta_0\beta + 1)^2} x^2 + \left(\frac{(\theta_0'')^2}{8(\theta_0\beta + 1)^4} - \frac{\beta(\theta_0'')^2}{4(\theta_0\beta + 1)^3} + \frac{\theta_0^{(4)}}{24(\theta_0\beta + 1)^2} \right) x^4 \right] = 0
\end{aligned} \quad (19)$$

Рассмотрим коэффициенты при x^0 , x^2 , x^4

$$x^0: \quad 2 \cdot \theta_0'' + \delta \cdot \tilde{W}_0 = 0 \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
x^2: \quad & \frac{2}{3} \cdot \theta_0^{(4)} + \chi \cdot W_0 + \\
& + \delta \cdot \tilde{W}_0 \cdot \frac{\theta_0''}{2(\theta_0\beta + 1)^2} = 0
\end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned}
x^4: \quad & \frac{1}{20} \cdot \theta_0^{(6)} + \chi \cdot W_0 \cdot \left[\frac{(c_0 - 1) \cdot (1 - \text{Exp}(-c_1))}{2(\theta_0\beta + 1)^2} + \right. \\
& \left. + \delta \cdot \tilde{W}_0 \cdot \left[\frac{(\theta_0'')^2}{8(\theta_0\beta + 1)^4} - \frac{\beta \cdot (\theta_0'')^2}{4(\theta_0\beta + 1)^3} + \frac{\theta_0^{(4)}}{24(\theta_0\beta + 1)^2} \right] \right] = 0
\end{aligned} \quad (22)$$

Из соотношений (20)-(22) получим:

$$\begin{aligned}
\theta_0'' &= -\frac{\delta \cdot \tilde{W}_0}{2} \\
\theta_0^{(4)} &= -\frac{3}{2} \cdot \chi \cdot W_0 + \frac{3}{8} \cdot \frac{\delta^2 \cdot \tilde{W}_0^2}{(\theta_0\beta + 1)^2} \\
\theta_0^{(6)} &= -20 \cdot \left\{ \chi \cdot W_0 \cdot \left[\frac{(c_0 - 1) \cdot (1 - \text{Exp}(-c_1))}{4(\theta_0\beta + 1)^2} - \frac{\alpha \cdot \delta \cdot \tilde{W}_0}{4(\theta_0\beta + 1)^2} \right] + \right. \\
& \left. + \delta \cdot \tilde{W}_0 \cdot \left[\frac{3 \cdot \delta^2 \cdot \tilde{W}_0^2}{64(\theta_0\beta + 1)^4} - \frac{\beta \cdot \delta^2 \cdot \tilde{W}_0^2}{16(\theta_0\beta + 1)^3} - \frac{\chi \cdot W_0}{16(\theta_0\beta + 1)^2} \right] \right\}
\end{aligned}$$

Подставив коэффициенты θ_0'' , $\theta_0^{(4)}$ и $\theta_0^{(6)}$ в разложение функции θ в ряд Тейлора получим:

$$\begin{aligned}
\theta &= \theta_0 - \frac{\delta \cdot \tilde{W}_0}{4} x^2 + \frac{1}{16} \left[-\chi \cdot W_0 + \frac{1}{4} \cdot \frac{\delta^2 \cdot \tilde{W}_0^2}{(\theta_0\beta + 1)^2} \right] x^4 - \\
& - \frac{1}{36} \left\{ \chi \cdot W_0 \cdot \left[\frac{(c_0 - 1) \cdot (1 - \text{Exp}(-c_1))}{4(\theta_0\beta + 1)^2} - \frac{\alpha \cdot \delta \cdot \tilde{W}_0}{4(\theta_0\beta + 1)^2} \right] + \right. \\
& \left. + \delta \cdot \tilde{W}_0 \cdot \left[\frac{3 \cdot \delta^2 \cdot \tilde{W}_0^2}{64(\theta_0\beta + 1)^4} - \frac{\beta \cdot \delta^2 \cdot \tilde{W}_0^2}{16(\theta_0\beta + 1)^3} - \frac{\chi \cdot W_0}{16(\theta_0\beta + 1)^2} \right] \right\} \cdot x^6 \quad (23)
\end{aligned}$$

В случае если на границе заданы тепловые граничные условия первого рода (3), то после перехода к безразмерным функциям координаты и температуры граничные условия примут вид:

$$x = 1 \Rightarrow \theta = \frac{E}{RT_0^2} (T_1 - T_0) = \theta_1 \quad (24)$$

В этом случае, подставляя граничные условия (24) в соотношение (23) и переобозначая θ_0 за h , получаем характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} \theta_1 = h - \frac{\delta \text{Exp}\left(\frac{h}{1+\beta h}\right)}{4} + \\ + \frac{1}{16} \left[-\chi \text{Exp}\left(\frac{\alpha h}{1+\beta h}\right) + \frac{\delta^2 \text{Exp}\left(\frac{2h}{1+\beta h}\right)}{4(\beta h + 1)^2} \right] - \\ - \frac{1}{36} \left\{ \left[\chi \text{Exp}\left(\frac{\alpha h}{1+\beta h}\right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \left[(c_0 - 1)(1 - \text{Exp}(-c_1)) - \frac{\alpha \delta \text{Exp}\left(\frac{h}{1+\beta h}\right)}{4(\beta h + 1)^2} \right] \right] + \right. \\ \left. + \frac{3\delta^3 \text{Exp}\left(\frac{3h}{1+\beta h}\right)}{64(1+\beta h)^4} - \frac{\beta \delta^3 \text{Exp}\left(\frac{3h}{1+\beta h}\right)}{16(1+\beta h)^3} - \right. \\ \left. - \frac{\chi \delta \text{Exp}\left(\frac{(\alpha+1)h}{1+\beta h}\right)}{16(1+\beta h)^2} \right\} \quad (25) \end{aligned}$$

В случае когда тепловой эффект химической реакции незначителен ($Q \approx 0$), при тепловых граничных условиях первого рода, уравнение энергии примет вид:

$$\begin{aligned} \theta_1 = h - \frac{\chi}{16} \text{Exp}\left(\frac{\alpha h}{1+\beta h}\right) - \frac{\chi}{36} (c_0 - 1) \times \\ \times (1 - \text{Exp}(-c_1)) \text{Exp}\left(\frac{\alpha h}{1+\beta h}\right) \quad (26) \end{aligned}$$

В случае же рассмотрения процессов с преобладающим химическим тепловыделением ($B \ll E$), при тепловых граничных условиях первого рода, уравнение энергии примет вид:

$$\begin{aligned} \theta_1 = h - \frac{\delta \text{Exp}\left(\frac{h}{1+\beta h}\right)}{4} + \\ + \frac{1}{16} \left[\frac{\delta^2 \text{Exp}\left(\frac{2h}{1+\beta h}\right)}{4(\beta h + 1)^2} - \chi \right] - \\ - \frac{1}{36} \left\{ \frac{3\delta^3 \text{Exp}\left(\frac{3h}{1+\beta h}\right)}{64(1+\beta h)^4} - \frac{\beta \delta^3 \text{Exp}\left(\frac{3h}{1+\beta h}\right)}{16(1+\beta h)^3} - \right. \\ \left. - \frac{\chi \delta \text{Exp}\left(\frac{h}{1+\beta h}\right)}{16(1+\beta h)^2} + \right. \\ \left. + \chi (c_0 - 1)(1 - \text{Exp}(-c_1)) \right\} \quad (27) \end{aligned}$$

В случае если на границе заданы тепловые граничные условия третьего рода (4), то после

перехода к безразмерным функциям координаты и температуры граничные условия примут вид:

$$x = 1 \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = -\text{Bi} \cdot (\theta - \theta_1) \quad (28)$$

$$\text{где } \text{Bi} = \frac{\alpha_1}{\lambda} \eta_1 \quad \theta_1 = \frac{E}{RT_0^2} (T_1 - T_0)$$

В этом случае, дифференцируя по x (23) мы получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dx} = -\frac{\delta \cdot \tilde{W}_0}{2} x + \frac{1}{4} \left[-\chi \cdot W_0 + \frac{1}{4} \cdot \frac{\delta^2 \cdot \tilde{W}_0^2}{(\theta_0 \beta + 1)^2} \right] x^3 - \\ - \frac{1}{6} \left\{ \chi \cdot W_0 \cdot \left[(c_0 - 1) \cdot (1 - \text{Exp}(-c_1)) - \frac{\alpha \cdot \delta \cdot \tilde{W}_0}{4(\theta_0 \beta + 1)^2} \right] + \right. \\ \left. + \delta \cdot \tilde{W}_0 \cdot \left[\frac{3 \cdot \delta^2 \cdot \tilde{W}_0^2}{64(\theta_0 \beta + 1)^4} - \frac{\beta \cdot \delta^2 \cdot \tilde{W}_0^2}{16(\theta_0 \beta + 1)^3} - \frac{\chi \cdot W_0}{16(\theta_0 \beta + 1)^2} \right] \right\} \cdot x^5 \quad (29) \end{aligned}$$

Используя (23), (28) и (29) после переобозначения θ_0 за h , мы получаем следующее характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} + \frac{3\delta^3 \text{Exp}\left(\frac{3h}{1+\beta h}\right)}{64(1+\beta h)^4} - \frac{\beta \delta^3 \text{Exp}\left(\frac{3h}{1+\beta h}\right)}{16(1+\beta h)^3} - \\ - \frac{\chi \delta \text{Exp}\left(\frac{(\alpha+1)h}{1+\beta h}\right)}{16(1+\beta h)^2} \left\{ \left(\frac{6}{\text{Bi}} + 1 \right) + \right. \\ \left. + 9 \cdot \left[\chi \text{Exp}\left(\frac{\alpha h}{1+\beta h}\right) - \frac{\delta^2 \text{Exp}\left(\frac{2h}{1+\beta h}\right)}{4(\beta h + 1)^2} \right] \left(\frac{4}{\text{Bi}} + 1 \right) + \right. \\ \left. + 36 \cdot \delta \text{Exp}\left(\frac{h}{1+\beta h}\right) \left(\frac{2}{\text{Bi}} + 1 \right) \right\} \quad (30) \end{aligned}$$

В случае когда тепловой эффект химической реакции незначителен ($Q \approx 0$), при тепловых граничных условиях третьего рода, уравнение энергии примет вид:

$$\begin{aligned} h - \theta_1 = \frac{\chi(6 + \text{Bi})(c_0 - 1)(1 - \text{Exp}(-c_1))}{36 \cdot \text{Bi}} \text{Exp}\left(\frac{\alpha h}{1+\beta h}\right) + \\ + \frac{\chi(4 + \text{Bi})}{16 \cdot \text{Bi}} \text{Exp}\left(\frac{\alpha h}{1+\beta h}\right) \quad (31) \end{aligned}$$

В случае же рассмотрения процессов с преобладающим химическим тепловыделением ($B \ll E$), при тепловых граничных условиях третьего рода, уравнение энергии примет вид:

$$\begin{aligned} 144(h - \theta_1) = 4 \cdot \left[\frac{3\delta^3 \text{Exp}\left(\frac{3h}{1+\beta h}\right)}{64(1+\beta h)^4} - \frac{\beta \delta^3 \text{Exp}\left(\frac{3h}{1+\beta h}\right)}{16(1+\beta h)^3} - \right. \\ \left. - \frac{\chi \delta \text{Exp}\left(\frac{(\alpha+1)h}{1+\beta h}\right)}{16(1+\beta h)^2} + \chi (c_0 - 1)(1 - \text{Exp}(-c_1)) \right] \left\{ \left(\frac{6}{\text{Bi}} + 1 \right) + \right. \end{aligned}$$

$$+ 9 \left[\chi - \frac{\delta^2 \text{Exp} \left(\frac{2h}{(1+\beta h)} \right)}{4(\beta h + 1)^2} \right] \left(\frac{4}{\text{Bi}} + 1 \right) + 36 \text{Exp} \left(\frac{h}{(1+\beta h)} \right) \left(\frac{2}{\text{Bi}} + 1 \right) \quad (32)$$

Выводы

Таким образом, вместо системы дифференциальных уравнений (1)-(2) получены характеристические уравнения для ламинарного течения реологически сложной жидкостей в круглой трубе, при тепловых граничных условиях первого и третьего. Отдельно рассмотрены случаи течения с преобладающим химическим тепловыделением (27), (32) и случай когда тепловой эффект химической реакции незначителен (26), (31).

Литература

1. Бостанджияна С.А., Мержанова А.Г., Пручкина Н.М. // ПМТФ, 1968, №5
 2. Мержанова А.Г., Посецельский А.П., Столин А.М., Штейнберг А.С. // ДАН СССР, 210, №1 1973
 3. Бостанджияна С.А., Мержанова А.Г., Худяева С.И. «О гидродинамическом тепловом взрыве» // Физическая химия 1965 т. 163 №1 с133- 136.
 4. Франк-Каменецкий Д.А. Теплопередача и диффузия в химической кинетике. Москва, изд-во Наука, 1987.
 5. Мержанов А.Г., Барзыкин В.В., Абрамов В.Г. «Теория теплового взрыва: от Н.Н. Семенова до наших дней» // Химическая физика. 1996, т.15 №6, с. 3-43.
 6. Назмеев Ю.Г., Малов К.М., Шарапов А.Р. «Бифуркационный анализ уравнения энергии движущихся вязких сред в бесконечной круглой трубе» // Вести академии наук БССР Минск, 1991. № 3 С. 115-122.
 7. Снигерев Б.А. Течение упроговязкой жидкости со свободной поверхностью/ Б.А. Снигерев, Ф.Х. Тазюков // Вестник Казан. технолог. ун-та. – 2007. - №1. С.85-92.
 8. Минибаева Л.Р. Численное моделирование гидродинамической структуры потока в аппарате с перемешивающими устройствами / Л.Р. Минибаева, А.Г. Мухаметзянова, А.В. Клинов // Вестник Казан. технолог. ун-та.-2008.- №6. – Ч.1. С. 191-198.
- © **В. В. Плотников** – канд. техн. наук, доцент каф. АСС и ОИ, КНИТУ, carpenter_wowa@mail.ru; **С. А. Лившиц** – канд. техн. наук, доцент каф. ЭОП, КГЭУ, semen19772004@mail.ru; **А. А. Хисматуллин** – асп. каф. «Экономика и организация производства», КГЭУ; **Ю. С. Сидорова** – асп. каф. «Автоматизация технологических процессов и производств», КГЭУ, yuliya-sid_87@mail.ru.
- © **V. V. Plotnikov** – k.t.n., docent, dep. ASS&OI, KNRTU, carpenter_wowa@mail.ru; **S. A. Livchiz** – k.t.n., docent, dep. EOI, KSPEU, semen19772004@mail.ru; **A. A. Hismatullin** – ass. dep. EOI, KSPEU; **Yu. S. Sidorova** – ass. dep. ATPP, KSPEU, yuliya-sid_87@mail.ru.