

УДК 682.1

Л. М. Котляр, Г. Ю. Шакирова, И. Х. Исафилов,
М. Ф. Шаехов

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДИСПЕРГИРОВАНИЯ МЕТАЛЛОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ РАЗРЯДЕ С ДВУМЯ ЭЛЕКТРОДАМИ – АНОДАМИ И ЖИДКИМ КАТОДОМ

Ключевые слова: катод, анод, электролит, диспергирование, плотность тока, потенциал, комплексный потенциал.

В работе предлагается математическая модель плоской задачи диспергирования одного и двух металлических стержней в электрическом разряде с жидким электролитом. При решении задачи используется аналогия с плоской задачей теории струйных течений идеальной жидкости, которая сводится к задаче определения аналитической функции в области с одним участком неизвестной границы. Получена приближенная формула для определения массы диспергированного порошка металла в предположении осесимметричности стержня в частном случае одного электрода.

Keywords: cathode, anode, electrolyte, dispersing the current density, potential, the potential of the complex.

In this paper a mathematical model of the plane problem of dispersion of one or two metal rods in an electric discharge with a liquid electrolyte has been proposed. In solving the problem, the analogy with the plane problem of the theory of jet flows of an ideal fluid, which is reduced to the definition of an analytic function in a region with one section of the unknown border was used. An approximate formula for determining the mass of dispersed metal powder, assuming axial symmetry of the rod in the special case of one electrode was derived.

В последние годы успешно развивается применение ферромагнитных порошков для изготовления деталей повышенной прочности. Композиционные порошки получают синтезом в режиме технологического горения с последующими операциями размола и классификации по фракциям. Одним из методов обработки металлических материалов являются разряды в жидкостях [1, 2], которым можно найти применение в диспергировании металлов и сплавов. Установка для синтеза ферромагнитного порошка состоит из источника постоянного тока, электролитической ванны с электролитом и токопроводящего стального электрода с различным содержанием углерода (от 0,2 % до 1 %). Результаты проведенных испытаний показали большую зависимость количества и качества (размер гранул) порошка от многих геометрических и физических параметров.

Для решения задачи отметим, прежде всего, что в процессе образования порошка зависимость выхода по току η от анодной плотности тока j_a идентична аналогичной зависимости $\eta(j_a)$ для электрохимической обработки металлов [3, 4]. Исходя из этого, будем считать, что скорость снятия металла V_m с поверхности анода на единицу массы, определяется по аналогии с законом Фарадея $V_m = j_a \eta \varepsilon$, где $\eta = \eta(j_a)$ – выход по току, равный доле энергии затраченной на образование порошка в электрическом разряде, j_a – плотность тока, ε – коэффициент, соответствующий электрохимическому эквиваленту металла и определяется экспериментально. Процесс диспергирования можно разделить на две стадии: на первой, нестационарной, происходит диспергирование на

участках анода, где максимальное значение плотности тока в угловых точках, затем поверхность анода выравнивается и приобретает криволинейную форму. Будем считать, что поверхность анода перемещается с постоянной скоростью V и линейная скорость точек на поверхности анода равна

$$V_a = v \cdot \cos \theta \quad (1)$$

где θ – угол между вектором скорости подачи анода и единичным вектором $\vec{n}_a$ внешней нормали к поверхности анода. В этом случае общая схема процесса не изменяется со временем и процесс можно считать установившемся или стационарным.

Из (1) установившееся распределение плотности тока j_a на стационарной границе анода определяется соотношением

$$\eta(j_a) j_a = \frac{\rho v}{\varepsilon} \cos \theta,$$

где ρ – плотность материала анода.

Зависимость выхода по току $\eta(j_a)$ можно аппроксимировать уравнением гиперболы и считать, что на границе анода выполняется соотношение [5]

$$j_a = \frac{\rho v}{\varepsilon} (a_0 + b_0 \cos \theta) \quad (2)$$

В работе [6] была решена задача о диспергировании стержня, расположенного в центре межэлектродного промежутка (МЭП).

Рассмотрим двумерную модель процесса с двумя электродами, расположенными симметрично относительно оси симметрии МЭП с жидким электродом (рис. 1).

В этом случае, в силу симметрии относительно оси A_1C , можно рассматривать только одну, например, правую половину течения. Эта

задача отличается от рассмотренной в работе [7] отсутствием симметрии течения в МЭП. Учитывая это, рассмотрим, следуя работе [7], более простую задачу о диспергировании одного электрода, расположенного симметрично в МЭП. Введём декартовую систему координат x_1, y_1 , связанную с анодом, который движется в направлении оси ординат.

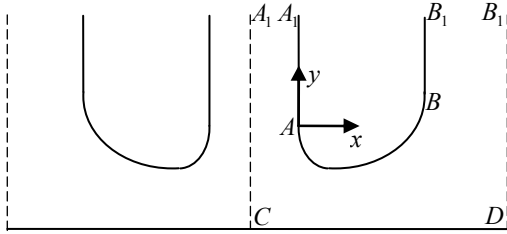


Рис. 1 – Область МЭП

Будем считать, пренебрегая приэлектродными явлениями, что в МЭП существует потенциал электрического поля ψ_1 , удовлетворяющий уравнению Лапласа

$$\Delta\psi_1 = 0 \quad (3)$$

и на границах электродов выполняется условие постоянства потенциалов $\psi_{1a} = u_a$, $\psi_{1k} = u_k$. В силу уравнения (3), существует функция ϕ_1 гармонически сопряжённая ψ_1 и можно ввести комплексный потенциал электростатического поля $W(x_1, y_1) = \phi_1(x_1, y_1) + i\psi_1(x_1, y_1)$, являющейся аналитической функцией в области $z_1 = x_1 + iy_1$

Введём характерные значения плотности тока $j_0 = \rho v / \epsilon$, длины $H = \kappa(u_a - u_k) / j_0$ (κ – удельная электропроводность среды) и перейдём к безразмерным переменным

$$x = \frac{x_1}{H}, \quad y = \frac{y_1}{H}, \quad z = x + iy,$$

$$W = \phi + i\psi = \frac{W_1 - iu_k}{u_a - u_k}$$

Тогда, с учётом (2), функция ψ удовлетворяет в межэлектродной области уравнению Лапласа и граничным условиям на поверхности электродов

$$\psi_a = 1, \quad \psi_k = 0, \quad \frac{\partial\psi_a}{\partial n} = \frac{j_a}{j_0} = a_0 + b_0 \cos \theta,$$

где a_0, b_0 – постоянные, учитывающие зависимость выхода по току от плотности тока.

Исходя из этого, задача моделируется плоскопараллельным потенциальным течением идеальной несжимаемой жидкости. При этом, аналогом напряжённости электрического поля $\vec{E}$ является скорость фиктивного течения $\vec{V}$ и векторы $\vec{E}$ и $\vec{V}$ – ортогональны. Вдоль линии $\psi = const$ выполняется равенство $\partial\psi/\partial n = V$, $V = |\vec{V}|$. На поверхности анода $V = a_0 + b_0 \cos \theta$.

На рис. 1, в плоскости $z = x + iy$, представлена область МЭП ограниченная линиями симметрии A_1C и B_1D , CD – граница катода, A_1ABB_1 – граница анода, A_1, B_1 – бесконечно удалённые точки. Граница анода разделена на две области: прямолинейные участки A_1A, B_1B , где $V_a = 0$ и участок AB на котором выполняется условие (2), аналогично симметричной задаче [7].

Функция ψ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\psi = 0$, на границах электродов выполняются условия: $\psi|_{CD} = 0$, $\psi|_{A_1ABB_1} = 1$, $\partial\psi/\partial n|_{AB} = a_0 + b_0 \cos \theta$, на линиях симметрии A_1C и B_1D – условия $\partial\psi/\partial n|_{A_1C} = 0$, $\partial\psi/\partial n|_{B_1D} = 0$.

Для рассматриваемой симметричной задачи, поток фиктивного течения создаётся системой непрерывно распределённых источников и стоков: источники – вдоль линии A_1C , стоки – вдоль линии B_1D . На неизвестной границе AB выполняется условие $V = a_0 + b_0 \cos \theta$.

Пусть в плоскости вспомогательного комплексного переменного $u = \xi + i\tau$ области течения D_z соответствует область $D_u = \{u | |u| \leq 1, \tau \geq 0\}$ (рис. 2) и функция $z(u)$ конформно отображает область D_u на область D_z с соответствием точек, указанном на рис. 1, 2.

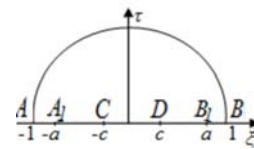


Рис. 2- Область D_u

Определим две функции: комплексный потенциал фиктивного течения $W(u) = \phi(u) + i\psi(u)$ и функцию Жуковского [5]

$$\chi(u) = \ln \left(\frac{V_0 dz}{dW} \right) = r(u) + i\theta(u) \quad (4)$$

где $r(u) = \ln(V_0/V)$, V – модуль скорости фиктивного течения, θ – угол наклона вектора скорости к оси x , $V_0 = a_0$ – значение скорости в точке A .

Комплексный потенциал $W(u)$ удовлетворяет граничным условиям

$$\psi(u) = \begin{cases} 0, & u = \xi, |\xi| \leq c \\ 1, & u = \xi, d \leq |\xi| \leq 1; u = e^{i\sigma}, 0 \leq \sigma \leq \pi \end{cases}$$

$$\phi(u) = \begin{cases} 0, & u = \xi, c \leq \xi \leq d \\ \phi_0, & u = \xi, -d \leq \xi \leq -c \end{cases}.$$

Область изменения функции $W(u)$ – прямоугольник $D_W = \{\varphi + i\psi | 0 \leq \varphi \leq \varphi_0, 0 \leq \psi \leq 1\}$.

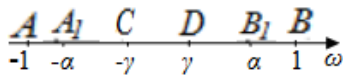


Рис. 3 – Область D_ω

Для определения производной dW/du комплексного потенциала отобразим область D_u на верхнюю полуплоскость D_ω с соответствием точек, указанном на рис. 2, 3, преобразованием

$$\omega(u) = \frac{2u}{1+u^2} \quad (5)$$

и, используя формулу Кристоффеля-Шварца [8], найдём функцию, отображающую область D_ω на область изменения функции $W(u)$:

$$W(\omega) = N \int_{\gamma}^{\omega} \frac{d\omega}{\sqrt{(\omega^2 - \alpha^2)(\omega^2 - \gamma^2)}},$$

$$N = \left(\frac{1}{\gamma} K(\alpha/\gamma) - \frac{1}{\alpha} K(\gamma/\alpha) \right)^{-1},$$

$$\varphi_0 = \frac{2K(\gamma/\alpha)}{\gamma K(\gamma/\alpha) - \alpha K(\alpha/\gamma)},$$

$$K(k) = \int_0^1 \frac{d\omega}{\sqrt{(\omega^2 - 1)(k^2 \omega^2 - 1)}},$$

где $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода [9]. Дифференцируя $W(\omega)$ по переменной ω и учитывая зависимость (5), получим:

$$\frac{dW}{du} = \frac{2N(1-u^2)}{\sqrt{4u^2 - a^2(1+u^2)^2} \sqrt{4u^2 - c^2(1+u^2)^2}}.$$

Для функции Жуковского $\chi(u)$ имеем следующие граничные условия

$$\theta(u) = \begin{cases} \pi/2, & u = \xi, -1 \leq \xi \leq -a \\ 0, & u = \xi, |\xi| < a \\ -\pi/2, & u = \xi, a \leq \xi \leq 1 \end{cases},$$

$$r(u) = -\ln \left(1 + \frac{b_0}{a_0} \cos \theta(u) \right),$$

$$u = e^{i\sigma}, 0 \leq \sigma \leq \pi.$$

Функцию Жуковского $\chi(u)$ будем искать в виде $\chi(u) = \chi_0(u) + f(u)$, где функция $\chi_0(u) = r_0(u) + i\theta_0(u)$ удовлетворяет граничным условиям

$$\theta_0(u) = \theta(u), \quad u = \xi, |\xi| \leq 1,$$

$$r_0(u) = 0, \quad u = e^{i\sigma}, 0 \leq \sigma \leq \pi$$

и имеет в области D_u те же особенности, что и $\chi(u)$, функция $f(u)$ – аналитическая в D_u и

непрерывная в $\bar{D}_u$. Построим $\chi_0(u)$ методом особых точек [5]:

$$\chi_0(u) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{u^2 - a^2}{1 - a^2 u^2} \right) + A_0 u + B_0.$$

Сравнивая граничные условия для функций $\chi(u)$ и $\chi_0(u)$, получим граничные условия для неизвестной функции $f(u) = \lambda(u) + i\mu(u)$:

$$\mu(u) = 0, \quad u = \xi, |\xi| \leq 1, \quad (6)$$

$$\lambda(u) = -\ln \left(1 + \frac{b_0}{a_0} \cos \theta(u) \right),$$

$$u = e^{i\sigma}, 0 \leq \sigma \leq \pi. \quad (7)$$

Учитывая граничные условия (6), (7) и симметрию фиктивного течения, функцию $f(u)$ можно аналитически продолжить на весь круг и представить в виде ряда Лорана:

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} u^{2n},$$

где c_{2n} – действительные коэффициенты. Из

условия $f(1) = 0$ находим $c_0 = -\sum_{n=1}^{\infty} c_{2n}$.

Условие (7), с учётом представления функции $f(u)$ в виде ряда, имеет вид

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} \cos(2n\sigma) = -\ln \left(1 + \frac{b_0}{a_0} \cos \theta(\sigma) \right) \quad (8)$$

Умножая обе части равенства (8) на $\cos(2n\sigma)$, интегрируя по σ в пределах $0, \pi/2$, получим бесконечную систему уравнений для определения коэффициентов c_{2n} :

$$c_{2n} = -\frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \ln \left(1 + \frac{b_0}{a_0} \cos(\theta_0(\sigma) + \mu(\sigma)) \right) \cos(2n\sigma) d\sigma,$$

$$n = \overline{1, \infty}.$$

Безразмерные координаты точек границы анода AB определяем из (4) по формуле

$$z(u) = \frac{1}{a_0} \int_1^u \frac{dW}{du} \exp(\chi(u)) du, \quad u = e^{i\sigma}, 0 \leq \sigma \leq \pi. \quad (9)$$

Для решения задачи необходимо определить математические параметры c и a . Это можно сделать, задав расстояния $|CD|$ и $|A_1 B_1|$:

$$z(-c) - z(c) = |CD|, \quad z(-a) - z(a) = |A_1 B_1|.$$

Массу диспергированного порошка можно определить, приближенно считая стержень осесимметричным, используя формулу для вычисления площади поверхности вращения.

$$m = 4\pi a_0 \rho H^2 \int_0^{\pi/2} x(\sigma) \exp(-r(\sigma)) \left| \frac{dz}{d\sigma} \right| d\sigma \quad (10)$$

где ρ – плотность металла.

Результаты расчетов формы границы анодной поверхности для различных частных случаев представлены в работе [7].

Для задачи по схеме (рис. 1) решение строится аналогично предыдущему, но оно зависит от большего числа параметров. Область вспомогательного переменного $u = \xi + i\tau$ будет иметь вид (рис.2) и, в силу отсутствия симметрии, в задаче появятся 3 параметра (a, b, c) , которые определяются из задания геометрических размеров на схеме (рис.1).

Некоторые результаты расчета формы криволинейного участка электродов AB представлены на рис. 4.

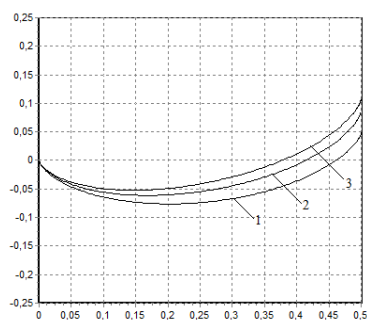


Рис. 4 - Результаты расчётов формы границы анода H_1 – ширина анода ($H_1 = |A_1B_1|$), H_2 – ширина катода ($H_2 = |CD|$), L – ширина МЭП в окрестности точки A_1 $a = 0.8$, $b = 0.8$, $H_1 = 0.5$, $H_2 = 2$ 1. $L = 0.5$; 2. $L = 0.3$; 3. $L = 0.2$

В этой задаче нельзя воспользоваться приближенной формулой для расчета массы порошка, так как, форма криволинейного участка

электрода не симметрична относительно его оси (см. рис.4). Для расчета линейного расхода массы используются полученные формулы (9) и подинтегральное выражение из (10).

Литература

1. Гайсин А.Ф., Абдуллин И.Ш., Фахрутдинова И.Т., Гайсин А.Ф., Гайсин Ф.М. *Об особенностях получения наночастиц с использованием электрического разряда с жидкими электродами*. Вестник Казанского технологического университета. 2012. Т. 15. № 22. С. 64-65.
2. Гайсин А.Ф., Абдуллин И.Ш., Гайсин Ф.М. *Электронная обработка стоматологических зубных мостов и коронок*. Вестник Казанского технологического университета. 2012. Т. 15. № 21. С. 47-48.
3. Давыдов А.Д., Козак Е. *Высокоскоростное электрохимическое формообразование*. М. Наука, 1990.
4. Седыкин Ф.В. *Размерная электрохимическая обработка деталей машин*. М. Машиностроение, 1976.
5. Гуревич М.И. *Теория струй идеальной жидкости*. М. Наука, 1979.
6. Котляр Л.М., Миназетдинов Н.М. *Определение формы анода с учётом свойств электролита в задачах электрохимической размерной обработки металлов*. ПМТФ., 2003, Т.44 №3. С.179-184.
7. Котляр Л. М., Мельничук Е.Д., Шакирова Г.Ю., Шакиров Ю.И. *Математическая модель диспергирования металла в электрическом разряде с жидким электролитом*. Монография под редакцией Tadeusz Zaborowski, Gorzow Wllkp., 2012г.
8. Лаврентьев М. А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного*. М. Наука, 1987.
9. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. *Специальные функции*. М. Наука, 1977.

© **Л. М. Котляр** – д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математики, Набережночелнинский институт Казанского (Приволжского) федерального университета, kotlyar-leonid@mail.ru; **Г. Ю. Шакирова** – старший преподаватель кафедры сервиса транспортных систем, Набережночелнинский институт Казанского (Приволжского) федерального университета, guzya81@mail.ru; **И. Х. Исрафилов** – д-р техн. наук, профессор кафедры высокоэнергетических процессов и агрегатов, Набережночелнинский институт Казанского (Приволжского) федерального университета, irmaris@yandex.ru; **М. Ф. Шаехов** – д-р техн. наук, профессор кафедры плазмохимических и нанотехнологий высокомолекулярных материалов, КНИТУ, shaechov@kstu.ru.

© **L. M. Kotlyar** – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Department of Mathematics, Institute of Naberezhnye Chelny Kazan (Volga Region) Federal University, kotlyar-leonid@mail.ru; **G. Yu. Shakirov** – Senior Lecturer of the department of Service of transport systems, Institute of Naberezhnye Chelny Kazan (Volga Region) Federal University; guzya81@mail.ru; **I. H. Israfilov** - Doctor of Technical Sciences, Professor of the Department of high-energy processes and units, Institute of Naberezhnye Chelny Kazan (Volga Region) Federal University, irmaris@yandex.ru; **M. F. Shaehov** – Doctor of Technical Sciences, Professor of the department plazmohimicheskimi macromolecular materials and nanotechnology, KNITU, shaechov@kstu.ru.