

И.А. Сабанав

ФРАКТАЛЬНАЯ ГРАФИКА ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПРОЦЕССОВ И АППАРАТОВ ХИМИЧЕСКОЙ ТЕХНОЛОГИИ

Ключевые слова: фрактальная геометрия, моделирование процессов и аппаратов, CAD/CAE-системы, 3D-печать.

Представлены результаты исследования по использованию методов фрактальной геометрии при моделировании и проектировании процессов и аппаратов химических производств. Показано, что перспективными могут быть направления, связанные с моделированием микрогеометрии элементов оборудования, таких как, например, шероховатость поверхности, а также с моделированием контактных устройств массообменной аппаратуры, имеющей свойство самоподобия на всех уровнях детализации. В первом случае важными моментами являются возможность задания случайно-распределенных параметров с помощью фрактальной математики, а также возможность масштабирования и 3D-печати полученных образцов с последующим изучением. Во втором случае интерес представляет возможность использования однотипных математических моделей при описании массообменных процессов на всех уровнях детализации массообменного контактного оборудования в силу наличия фрактального самоподобия. В работе предложены несколько математических формул, которые можно использовать для формирования заправки (генератора) при построении фрактала. Фрактал формируется с помощью рекурсивной функции. Показано, что программная реализация фрактального твердотельного объекта возможна, как из внешней по отношению к CAD-системе программы, так и с помощью встроенного в CAD-систему макроязыка. Построенная 3D-модель объекта распечатывается с помощью 3D-принтера из ABS-пластика, формируя, таким образом, физическую модель предложенного фрактала, которая далее испытывается с помощью небольшой лабораторной установки. Предложенный алгоритм: «Идея фрактала – Программирование – Трехмерная модель в CAD-системе – Физическая модель, сформированная на 3D-принтере – Исследование на лабораторном стенде» позволяет оперативно подбирать наиболее эффективные варианты фрактальных моделей, корректируя их и отсеивая неработоспособные образцы.

I. A. Sabanaev

FRactal Graphics for Modeling Processes and Devices of Chemical Technology

Keywords: fractal geometry, modeling of processes and devices, CAD/CAE systems, 3D printing.

The results of a study on the use of fractal geometry methods in modeling and designing processes and devices of chemical industries are presented. It is shown that promising directions may be related to the modeling of microgeometry of equipment elements, such as, for example, surface roughness, as well as to the modeling of contact devices of mass transfer equipment having the property of self-similarity at all levels of detail. In the first case, the important points are the possibility of setting randomly distributed parameters using fractal mathematics, as well as the possibility of scaling and 3D printing of the obtained samples with subsequent study. In the second case, the possibility of using the same type of mathematical models in the description and mass transfer processes at all levels of detail of mass transfer contact equipment due to the presence of fractal self-similarity is of interest. The paper proposes several mathematical formulas that can be used to form a seed when constructing a fractal. A fractal is formed using a recursive function. It is shown that the software implementation of a fractal solid-state object is possible both from a program external to the CAD system and using a macro language built into the CAD system. The constructed 3D model of the object is printed using a 3D printer made of ABS plastic, thus forming a physical model of the proposed fractal, which is then tested using a small laboratory installation. The proposed algorithm: "The idea of fractal – Programming – A three-dimensional model in a CAD system – A physical model formed on a 3D printer - Research on a laboratory stand" allows you to quickly select the most effective options for fractal models, correcting them and screening out non-functional samples.

Введение

Фрактальная графика - графика, состоящая из фракталов. Компьютерная фрактальная графика основана на реализации алгоритмов построения изображения с помощью математической формулы, хранящейся в виде функции в файле изображения [1]. Таким образом, в таком файле не содержится ни само изображение, как это принято в растровой графике, ни графические команды для его построения, как принято в векторной графике, а только функция, уравнение или система уравнений и реализация алгоритма вывода этой функции на экран компьютера [2]. Согласно [3] при самом простом способе построения фракталов выбирается самый простой тип системы итерируемых функций,

который содержит аффинные преобразования на плоскости.

Основным свойством фракталов является дробная размерность [4]. Этим свойством обусловлено и само название таких объектов. С точки зрения геометрии фрактальных объектов, они представляют собой структуру, состоящую из частей, которые, как правило, подобны целому. Самоподобие является вторым важным свойством фракталов [5]. В простейшем случае небольшая часть фрактала содержит информацию обо всем фрактале [6].

Второе свойство позволяет создавать фрактальные объекты на основе использования механизма рекурсивного вычисления

математических функций [7].

Свойство точного самоподобия характерно лишь для регулярных фракталов. Если вместо детерминированного способа построения включить в алгоритм их создания некоторый элемент случайности, то возникают так называемые стохастические фракталы [8]. Основное их отличие от регулярных состоит в том, что свойства самоподобия справедливы только после соответствующего усреднения по всем статистически независимым реализациям объекта. При этом увеличенная часть фрактала не точно идентична исходному фрагменту, однако их статистические характеристики совпадают. Стохастические фракталы образуются путем рекурсивных повторений графических объектов способом задания случайных изменений каких-либо их параметров [9].

Анализ литературных источников показал, что целесообразно воспользоваться одним из двух практических способов формирования новых фрактальных объектов. Во-первых, можно работать со специализированными программами, которые разрабатываются сторонними компаниями [10]. Во-вторых, при наличии определенного опыта в программировании фрактальные объекты можно создавать самостоятельно [11]. В любом случае задача усложняется, если требуется получение 3D-модели этого объекта для, например, последующей распечатки на 3D-принтере.

Здесь можно воспользоваться возможностями некоторых CAD/CAE-систем [12], которые имеют встроенный макроязык. К таким системам можно отнести Аскон Компас 3D, в который встроена макросреда Python Scriptor [13].

По результатам наших исследований предлагается другой, как предполагается, более простой способ проектирования фрактальных объектов, алгоритм которого можно представить следующей девятишаговой схемой:

- 1) идея нового фрактала;
- 2) разработка алгоритма и программирование;
- 3) передача результатов в data-файл;
- 4) загрузка точек в Аскон Компас 3D;
- 5) создание поверхности по сети точек;
- 6) преобразование поверхности в 3D-объект;
- 7) передача изображения в STL-формат;
- 8) передача STL-изображения в программу-слайсер и получение Gcode-файла;
- 9) печать модели на 3D-принтере.

Опыт работы показал эффективность этой схемы – наиболее сложные процедуры передаются CAD-системе, а программирование выполняется в любой удобной визуальной среде на языке высокого уровня, например, в нашем случае – GNU Lazarus.

Экспериментальная часть

Во-первых, предлагается применение фрактальных геометрических моделей при моделировании шероховатости поверхности деталей технологических машин.

Детерминированная модель. Моделируется образец трехмерной пластины с основанием, размер

которого составляет 15.4x15.4 мкм. В качестве затравочной формулы принята функция разложения в двойной тригонометрический ряд Фурье [14].

$$Y = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^i \sin(2^i x_1) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^j \sin(2^j x_2), \quad (1)$$

где i, j – номера членов ряда;

x_1, x_2 – текущие координаты в направлении осей основания пластины;

Y – высота профиля шероховатости в точке пластины с текущими координатами.

Предполагается, что проектируемый образец должен быть распечатан на 3D-принтере, поэтому размеры модели по всем трем координатам увеличиваются в масштабе 5000:1. В результате размер основания проектируемой детали становится равным 77x77 мм.

Расчет по координатам x_1, x_2 проводится только в узлах сетки, которая наложена на основание пластины с шагом 1 мм. Ряд (1) хорошо сходится, поэтому при нахождении суммы нет смысла задавать большое число членов ряда. В программе для каждого узла рассчитывается сумма 9x9 членов. Для массива 78x78 точек программой формируется data-файл с результатами расчетов особого формата, который может быть прочитан программой Компас. Далее выполняются действия согласно приведенной ранее девятишаговой схеме.

Чтобы оценить результаты моделирования рассчитывается наиболее распространенный на практике параметр шероховатости R_a [15]. Рассмотрено три способа такого расчета.

Первый способ – по методу ГОСТ 2789-73 с использованием формулы, содержащий интеграл:

$$R_a = \frac{1}{\ell} \int_0^{\ell} |y| dx, \quad (2)$$

где ℓ – длина образца;

x – текущая координата по длине;

y – высота профиля шероховатости в точке с координатой x .

Определяется усредненный по параметр шероховатости для всего образца. В нем в одном из направлений по горизонтали выполняется 77 сечений (срезов) с шагом 1 мм (0,2 мкм – реальный размер без масштаба). Для каждого сечения интеграл рассчитывается методом трапеций по результатам расчета функции высоты профиля в 78 точках этого сечения. Пояснения к расчету площади сечения среза на глубине $X_2 = 1$ мм в качестве примера показаны на рисунке 1.

Усредненное значение параметра R_a для всех 77 срезов с учетом масштаба 5000:1 получилось равным 0.856 мкм со среднеквадратичным отклонением 0.212 мкм.

Второй способ – по формуле:

$$R_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i|, \quad (3)$$

где n – число выбранных пиков.

Расчет по ряду пиков считается традиционным, наиболее часто используемым на практике: В этом случае параметр R_a с учетом масштаба 5000:1

получается равным 2.027 мкм (в 2 с лишним раза больше, чем при расчете с помощью интеграла). Дисперсия получается тоже в два раза выше, чем в первом варианте расчета.



Рис. 1 – Пояснения к расчету параметра шероховатости по формуле (1)

Fig. 1 – Explanation of calculation of roughness parameter by formula (1)

Третий способ – расчет R_a с помощью функции МЦХ Компас 3D.

В работе предлагается рассчитывать средневзвешенное значение параметра R_a , как отношение объема образца к площади его основания. Первые два из рассмотренных способов являются достаточно трудоемкими, требующими большого числа расчетных процедур. Предлагаемый способ, очевидно, будет более простым, в силу того, что предполагает использование инструментов CAD/CAE-системы Компас 3D – «МЦХ модели» и вывод значений площади поверхностей и объема трехмерной модели.

За среднюю шероховатость примем отношение объема модели к площади основания:

$$R_a = \frac{V_{\text{мод}}}{S_{\text{основания}}}, \quad (4)$$

где $V_{\text{мод}}$ – полный объем модели; $S_{\text{основания}}$ – площадь основания модели.

Применение этого способа для той же модели дает результат: $R_a = 1,458$ мкм.

Сравнивая между собой значения параметра шероховатости, полученные тремя способами, можно заключить:

- расчет по формуле (2) дает заниженный результат;
- расчет по формуле (2) требует применения трудоемких численных методов;
- традиционный расчет усреднением высоты пиков по ряду точек по формуле (3) дает завышенный результат;
- расчет через инструмент МЦХ Компас 3D дает приблизительно равноудаленные от традиционного способа (формула 3) и по формуле через интеграл (формула 2) значения;
- расчет с помощью функции МЦХ Компас 3D наименее трудоемок.

Фрактальная размерность объекта может быть определена различными способами [16]. В работе был применен метод наложения сетки. Суть метода

состоит в том, что на изображение плоской кривой накладывается сетка с определенным размером ячейки. Подсчитывается число клеток, в которых оказался бы хотя бы один элемент кривой. Далее клетки уменьшаются, например, в два раза и снова подсчитывается число клеток с элементами кривой. На следующем этапе размер ячейки сетки снова уменьшается, например, в два раза. В третий и четвертый, а может и более разы подсчитывается число клеток, содержащих элементы фрактальной кривой. Результаты подсчетов сводятся в единую таблицу. Далее с помощью метода наименьших квадратов строится аппроксимирующая линейная функция зависимости числа клеток от размера ячейки в логарифмической системе координат. Коэффициент, находящийся при переменной X , численно равный тангенсу угла наклона аппроксимирующей линейной функции, есть размерность фрактальной кривой – в нашем случае $D = 1,216$.

Для исследования физической модели после печати на 3D-принтере можно использовать оптический металлографический микроскоп с выводом изображения на монитор компьютера. Измерения проводятся путем сравнения высот пиков, видимых на экране монитора, с эталонной шкалой (объект-микрометром), которую предварительно загрузили через объектив микроскопа на тот же экран монитора.

Стохастическая модель. В качестве затравки задается рекурсивная функция формирования пиков *crossings*, использующая генератор случайных чисел. Пластина делится на четыре части посредством двух пересекающихся линий (креста). Для каждого из сегментов креста вновь вызывается эта функция, которая делит каждый еще на четыре части. Генератор случайных чисел задает высоту сегмента, которая суммируется с предыдущей накопленной суммой. На определенном этапе рекурсивных итераций профиль создаваемых сегментов получает вид множества разных по высоте пиков. Предельная глубина рекурсии определяется разрешающей способностью 3D-принтера.

Пример одной из получившихся моделей показан на рисунке 2.

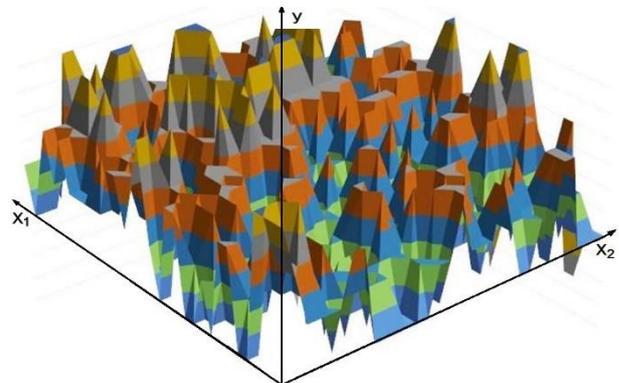


Рис. 2 – Стохастическая модель шероховатости поверхности

Fig. 2 – Stochastic model of surface roughness

Стохастическая модель позволяет формировать

различающиеся каждый раз поверхности. Однако, значение показателя шероховатости изменяется незначительно и зависит, во-первых, от глубины рекурсии, во-вторых, от константы наибольшего значения, программно установленного в генераторе случайных чисел.

Еще одним направлением, где можно использовать фрактальные объекты при моделировании элементов технологического оборудования является моделирование различных контактных устройств массообмена [17]. Здесь, как предполагается, использование самоподобных объектов позволит описывать одними математическими зависимостями процессы, происходящие на уровне отдельных контактных элементов и на уровне всего контактного устройства [18].

Реалистичные модели пористых систем можно образовать с помощью различных фрактальных объектов. Например, широко применяется модель фрактала под названием обобщенной губки Менгера. К числу достоинств этих фракталов можно отнести то, что они, во-первых, подробно исследованы; во-вторых, легко генерируются. В литературе можно найти подробные данные о различных свойствах губки, влияние различных факторов на эти свойства.

Но у этого фрактала есть недостаток, который сильно усложняет работу с ним при применении аддитивных технологий печати. Дело в том, что 3D-принтер при формировании модели вынужден распечатывать, так называемые поддержки во внутренних полостях, которые механическим способом удалить не получится – они остаются глубоко в объеме детали.

Проблема решается при использовании двухсопловых печатающих устройств. Такие 3D-принтеры первым соплом из пластика распечатывают саму деталь, а поддержки распечатываются из водорастворимого материала с помощью второго сопла. Это позволяет позже легко удалить поддержки путем промывания готовой детали в воде. Однако, такие принтеры значительно дороже и менее распространены. В нашем распоряжении есть более простой аппарат – Maestro Piccolo.

В работе предлагается фрактальная модель chamomile (ромашка), которую можно взять за основу насадок пакетного типа, внутренняя структура которых имеет фрактальную природу, но при этом в направлении одного из измерений распечатка идет без применения поддержек.

Рекурсивная функция в круглой пластине формирует базовую схему из семи отверстий. Затем она вызывается для каждого из семи отверстий. В результате образуется еще 49 новых отверстий, для каждого из которых снова вызывается функция chamomile. Получившиеся пластины накладываются друг на друга и этот элемент контактного устройства распечатывается на 3D-принтере. Из нескольких подобных элементов собирается пакетная насадка. Пакет, состоящий из трех элементов по три пластины, показан на рисунке 3. Чтобы показать

внутренне устройство, в пакете отсечен угловой сегмент, составляющий 1/6 часть (60 градусов).

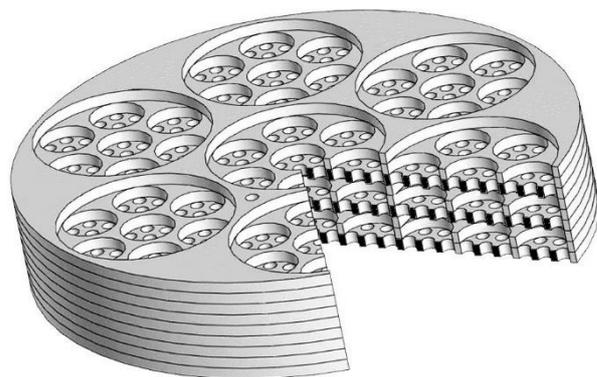


Рис. 3 – Фрактальная модель контактного устройства с отсеченным угловым сегментом

Fig. 3 – Fractal model of a contact device with a cut-off corner segment

Эффективность и гидравлическое сопротивление проектируемых устройств оцениваются экспериментально с помощью физической лабораторной модели массообменного аппарата-абсорбера. Если нужна корректировка контактного устройства, то можно легко вернуться на один из предыдущих этапов проектирования. Новая конструкция устройства после распечатки снова подвергается испытанию.

Заключение

Практические результаты исследования показали, что предложенный девятишаговый алгоритм построения фрактальных моделей достаточно эффективен, поскольку позволяет без применения трудоемких операций формировать твердотельные образцы отдельных элементов для лабораторного технологического оборудования, применяемого в исследовательских целях, с использованием аддитивных технологий.

Кроме того, показано, что предложенный способ может быть использован при изучении влияния параметров шероховатости поверхности на эксплуатационные свойства деталей. Предложен эффективный способ оценки одного из таких параметров – R_a с помощью инструментов CAD/CAE-систем, таких как Аскон Компас 3D. Применение аддитивных технологий с эффектом многократного масштабирования компьютерных фрактальных моделей позволяет исследовать такие геометрические характеристики деталей машин химического машиностроения, которые не доступны без применения специального дорогостоящего оборудования, такого, как например, сканирующий туннельный микроскоп. Проведена апробация двух классов геометрических фракталов: с детерминированной и стохастической математическими моделями формирования поверхности.

Кроме того, в работе проведена оценка возможности использования фрактальных моделей и

аддитивных технологий для оперативной разработки элементов массообменного оборудования, таких как, массообменные контактные устройства. Выдвинуто предположение, которое требует дополнительного подтверждения, о возможности применения единых математических моделей для описания массообменных процессов на микроуровне – уровне отдельных элементов контактных устройств и макроуровне – уровне всего пакета насадки в силу самоподобия фрактальных объектов.

Показано, что использование предложенного алгоритма формирования фрактальных моделей позволяет оперативно решать задачи исследовательского характера. Отбраковка и корректировка неудачных конструкций элементов оборудования, получение и внедрение новых решений на этапе исследования технологических процессов, происходит без каких-либо задержек.

Литература

1. Е.В. Ершов, Л.Н. Виноградова, Е.С. Шумилова, *Изв. вузов. Приборостроение*, **53**, 9, 19-22 (2010).
2. В.К. Балханов, *Основы фрактальной геометрии и фрактального исчисления*, Изд-во Бурятского университета, Улан-Удэ, 2013, С. 12.
3. Л.М. Коцич, В сб. *Фракталы как искусство*, Страта, СПб, 2015, С. 89.
4. Р.М. Кроновер, Р. М. *Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории*, Постмаркет, М., 2000, С. 11.
5. Г.М. Кравченко, С.М. Васильев, Л.И. Пуданова, *Инженерный вестник Дона*, 4, Article 4450 (2017).
6. Б. Мандельброт, В сб. *Фракталы как искусство*, Страта, СПб, 2015, С. 18.
7. В.В. Смирнов, Ф.Ф. Спиридонов, *Моделирование фракталов в Maple*, АлтГТУ, Бийск, 2005, С.14.
8. А.А. Егоров, *Вестник кибернетики*, **3** (27), 47-52 (2017).
9. Ф.Ф. Спиридонов, В.В. Смирнов, *ExponentaPro. Математика в приложениях*, 3–4, 138 – 141 (2004).
10. В.Ю. Ильичев, Н.В. Гридчин, *Системный администратор*, 12 (217), 86-89 (2020).
11. Ю.В. Брылкин, *Геометрия и графика*, 1, 43-50 (2017). DOI: 10.12737/25123.
12. Л.А. Жихарев, *Геометрия и графика*, 3, 51-66 (2017). DOI: 10.12737/article_59bfa55ec01b38.55497926.
13. А.А. Герасимов, Самоучитель Компас 3DV20, БХВ-Петербург, СПб., 2022, С.432.
14. Д.А. Графов. Дисс. канд. физ-мат. наук, Московский государственный университет, М., 2015, 147 с.
15. ГОСТ 2789-73 «Шероховатость поверхности. Параметры и характеристики». Стандартиформ, М., 2006, С. 7.
16. В.В. Смирнов, В сб. *Информационно-вычислительные технологии в решении фундаментальных и прикладных научных задач*, НВК «Вист», М., 2005, С. 45.
17. А.Ш. Динмухаметов, И.А. Сабанаев, *Вестник технологического университета*, **24**, 8, 56-62 (2021).
18. R. Shakirov, I. Sabanaev, *E3S Web of Conferences*, 402, Article 03054 (2023) <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202340203054>.

References

1. E.V. Ershov, L.N. Vinogradova, E.S. Shumilova, *Izv. Vuzov. Instrumentation*, **53**, 9, 19-22 (2010).
2. V.K. Balkhanov, *Fundamentals of Fractal Geometry and Fractal Calculus*, Izd. of Buryat University, Ulan-Ude, 2013, P. 12.
3. L.M. Kotsich, V sb. *Fractals as Art*, Strata, St. Petersburg, 2015, P. 89.
4. R.M. Cronover, P. M. *Fractals and chaos in dynamical systems. Foundations of the theory*, Postmarket, M., 2000, P. 11.
5. G.M. Kravchenko, S.M. Vasiliev, L.I. Pudanova, *Engineering Vestnik Don*, 4, Article 4450 (2017).
6. B. Mandelbrot, In V sb. *Fractals as art*, Strata, SPb, 2015, P. 18.
7. V.V. Smirnov, F.F. Spiridonov, *Modeling of fractals in Maple*, AltGTU, Biysk, 2005, P.14.
8. A.A. Egorov, *Vestnik cybernetiki*, **3** (27), 47-52 (2017).
9. F.F. Spiridonov, V.V. Smirnov, *ExponentaPro. Mathematics in Applications*, 3-4, 138 - 141 (2004).
10. V.Y. Ilyichev, N.V. Gridchin, *System Administrator*, 12 (217), 86-89 (2020).
11. Y.V. Brylkin, *Geometry and graphics*, 1, 43-50 (2017). DOI: 10.12737/25123.
12. L.A. Zhikharev, *Geometry and Graphics*, 3, 51-66 (2017). DOI: 10.12737/article_59bfa55ec01b38.55497926.
13. A.A. Gerasimov, *Compass 3DV20 Self-Tutorial*, BHV-Peterburg, St. Petersburg, 2022, P.432.
14. D.A. Grafov. Diss. candidate of physical and mathematical sciences, Moscow State University, Moscow, 2015, 147 p.
15. GOST 2789-73 “Surface roughness. Parameters and characteristics”. Standardinform, M., 2006, P. 7.
16. V.V. Smirnov, V sb. *Information-computing technologies in solving fundamental and applied scientific problems*, NVC “Vist”, M., 2005, P. 45.
17. A.Sh. Dinmukhametov, I.A. Sabanaev, *Herald of Technological University*, **24**, 8, 56-62 (2021).
18. R. Shakirov, I. Sabanaev, *E3S Web of Conferences*, 402, Article 03054 (2023) <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202340203054>.

© **И. А. Сабанаев** - к.т.н., доцент, кафедра Машин и аппаратов химических производств, Нижнекамский химико-технологический институт, Нижнекамск, Россия, sabanaevia@nchti.ru.

© **I. A. Sabanaev** – PhD (Technikal Sci.), Associate Professor, Department of Machines and apparatuses of chemical plants, Nizhnekamsk Institute of chemical technology, sabanaevia@nchti.ru.