УДК 539.3 *DOI 10.55421/3034-4689_2025_28_3_111*

М. К. Сагдатуллин, Х. С. Гумерова

НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ СВОЙСТВА МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ В ПОЛУПЛОСКОСТИ В ДВУМЕРНОЙ ПОСТАНОВКЕ

Ключевые слова: метод граничных элементов, задача Кельвина, напряжения, деформации.

При численном анализе задач теории упругости методом граничных элементов, широко используемое в настоящее время, граничное интегральное уравнение формулируется с использованием фундаментального решения Кельвина в бесконечном пространстве. Однако для многих практических задач, где объекты полубесконечного или конечного размера, фундаментальное решение в полуплоскости также может использоваться вместо фундаментального решения Кельвина. В модели фундаментального решения полуплоскости, мы видим, как точка нагружения, так и точка наблюдения определяются относительно свободной поверхности полуплоскости, так что фундаментальное решение полуплоскости определяется не только расстоянием между двумя точками, но и их относительным положением относительно поверхности. Таким образом, можно исследовать различные численные свойства метода граничных элементов, основанных на фундаментальном решении полуплоскости, по сравнению с решениями, основанными на фундаментальном решении Кельвина. В данной статье изучаются некоторые численные свойства фундаментального решения в полуплоскости при анализе двумерных объектов конечных размеров. Из приведенного в работе численного анализа и примеров мы видим, что фундаментальное решение в полуплоскости может удовлетворительно использоваться и с меньшим количеством элементов для численного анализа двумерных задач конечного размера. Кроме того, отмечаются следующие интересные численные свойства по сравнению с фундаментальным решением Кельвина: в отличие от двумерного решения Кельвина, фундаментальное решение в полуплоскости дает «направленный» эффект рассчитанной деформации. При этом следует уделить внимание расположению оси симметрии деформированного состояния объектов (если таковая имеется), параллельной оси симметрии полуплоскости модели, погрешность численных результатов увеличивается по мере увеличения расстояния объекта от поверхности модели полуплоскости, что также делает невозможным использование фундаментального решения. Поэтому лучше располагать объект как можно ближе к поверхности модели полуплоскости. Наконец, следует также отметить, что приведенные выше численные свойства решений с использованием фундаментального решения в полуплоскости оказались верными в случае использования любых элементов более высокого порядка, хотя представленные здесь данные получены только с использованием постоянных элементов.

M. K. Sagdatullin, Kh. S. Gumerova

SOME NUMERICAL PROPERTIES OF THE BOUNDARY ELEMENT METHOD USING FUNDAMENTAL SOLUTIONS IN A HALF-PLANE IN A TWO-DIMENSIONAL FORMULATION

Keywords: boundary element method, Kelvin problem, stress, strain.

In the numerical analysis of elasticity problems by the boundary element method, the boundary integral equation, which is widely used at present, is formulated using the Kelvin fundamental solution in infinite space. However, for many practical problems where the objects are of semi-infinite or finite size, the half-plane fundamental solution can also be used instead of the Kelvin fundamental solution. In the half-plane fundamental solution model, we see that both the loading point and the observation point are defined relative to the free surface of the half-plane, so that the half-plane fundamental solution is determined not only by the distance between the two points, but also by their relative position with respect to the surface. Thus, it is possible to investigate the different numerical properties of the boundary element method based on the half-plane fundamental solution compared to solutions based on the Kelvin fundamental solution. In this paper, some numerical properties of the half-plane fundamental solution in the analysis of two-dimensional objects of finite size are studied. From the numerical analysis and examples presented in the paper, we see that the fundamental half-plane solution can be used satisfactorily even with a smaller number of elements for the numerical analysis of two-dimensional finite-size problems. In addition, the following interesting numerical properties are noted in comparison with the fundamental Kelvin solution: in contrast to the two-dimensional Kelvin solution, the fundamental half-plane solution gives a "directional" effect of the calculated deformation. In this case, attention should be paid to the location of the symmetry axis of the deformed state of the objects (if any), parallel to the symmetry axis of the half-plane of the model, the error of the numerical results increases with the increase in the distance of the object from the surface of the half-plane model, which also makes it impossible to use the fundamental solution. Therefore, it is better to place the object as close as possible to the surface of the half-plane model. Finally, it should also be noted that the above numerical properties of the solutions using the fundamental half-plane solution turned out to be correct in the case of using any higher-order elements, although the data presented here were obtained only using constant elements.

Введение

При численном анализе задач теории упругости методом граничных элементов [1-2], широко используемое в настоящее время, граничное интегральное уравнение формулируется с использованием фундаментального решения

Кельвина в бесконечном пространстве. Однако для многих практических задач, где объекты полубесконечного или конечного размера, фундаментальное решение полуплоскости также может использоваться вместо фундаментального решения Кельвина. Особенно эффективно анализировать такие объекты, которые имеют плоские поверхности без сцепления, поскольку нет необходимости дискретизировать те части поверхностей конечного тела, которые совпадают с поверхностью полуплоскости [3-4].

В модели фундаментального решения полуплоскости, схематически показанной на рис. 1, мы видим, как точка нагружения, так и точка наблюдения определяются относительно свободной поверхности полуплоскости, так что фундаментальное решение полуплоскости определяется не только расстоянием между двумя точками, но и их относительным положением относительно поверхности. Таким образом, можно исследовать различные численные решения метода граничных элементов, основанных на фундаментальном решении полуплоскости, по сравнению с решениями, основанными на фундаментальном решении Кельвина. В данной статье изучаются некоторые численные свойства фундаментального решения полуплоскости при анализе двумерных объектов конечных размеров.

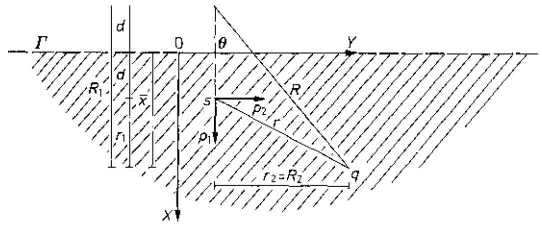

Рис. 1 – Модель фундаментального решения в полуплоскости

Fig. 1 – Model of the fundamental solution in the half-plane

Здесь $|P_1| = |P_2| = 1$, $\theta = arctg(R_2 / R_1)$, s: точка нагружения, s': точка наблюдения.

Граничное интегральное уравнение

Формулировка граничного интеграла в отсутствие массовых сил может быть задана формулой

$$c_{ij} u_i(s) + \int_{\Gamma} p_{ij}^h(s,q) u_j(q) d\Gamma(q) = = \int_{\Gamma} u_{ij}^h(s,q) p_j(q) d\Gamma(q), \tag{1}$$

где Г представляет собой границу изучаемого объекта, $u_{ij}^h(s,q)$ и $p_{ij}^h(s,q)$ - компоненты перемещения и силы фундаментального решения в полуплоскости, u_j и p_j - значения на границе Г.

Фундаментальное решение полуплоскости было предложено Меланом в терминах напряжений [5], а Теллес и др. распространили его на перемещения. [3]. Было показано, что фундаментальное решение полуплоскости $(\ )^h$ можно представить добавлением дополнительной части $(\ )^c$ к известному двумерному решению Кельвина $(\ )^k$ следующим образом:

$$u_{ij}^h(s,q) = u_{ij}^k(s,q) + u_{ij}^c(s,q), \tag{2}$$

$$p_{ij}^h(s,q) = p_{ij}^k(s,q) + p_{ij}^c(s,q) \tag{3}$$

Из рис. 1 видно, что модель полуплоскости имеет свободную поверхность и симметрична только относительно оси Y. Следовательно, направление нагрузки может влиять на деформацию объектов; На численное решение задачи конечного размера также может влиять расстояние объектов от поверхности полуплоскости.

Численные результаты и обсуждение

Чтобы проверить эффективность вычислений и исследовать численные свойства упомянутого выше фундаментального решения полуплоскости, анализируется несколько простых задач. Для простоты рассчитываются только граничные решения с использованием «постоянных» граничных элементов.

Сперва рассмотрим квадратную пластину, находящуюся в плоско-деформированном состоянии, которая с одной стороны подвергается поверхностному растяжению, как показано на рис. 2. Чтобы оценить точность численных решений, E_{ux} и E_{uy} определяются как средние относительные погрешности в перемещениях u_x и u_y на границах, перпендикулярных оси X и Y соответственно, по сравнению с точными решениями u_x^e и u_y^e следующим образом (аналогичные меры были использованы в некоторых примерах, приведенных ниже):

$$E_{ux} = \frac{u_x - u_x^e}{u_x^e} \cdot 100\%, \quad E_{uy} = \frac{u_y - u_y^e}{u_y^e} \cdot 100\%. \tag{4}$$

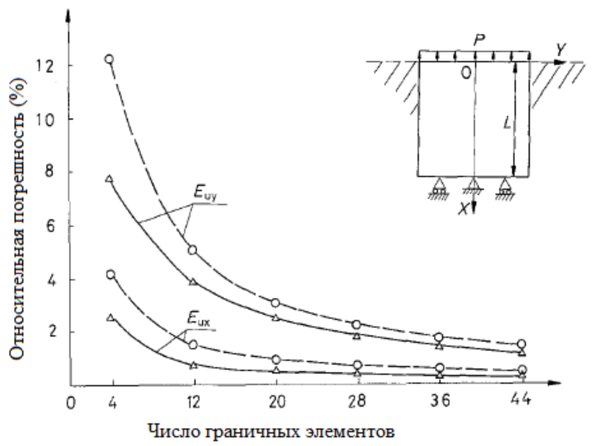

Рис. 2 – Сравнение результатов решения полуплоскости и решения Кельвина

Fig. 2 – Comparison of the results of the half-plane solution and the Kelvin solution

В данном примере $P = 79,78 МПа$. $G = 26,46 МПа$, $L = 10 мм$, $\mu = 0,34$.

Показано сравнение численных результатов и их сходимость, полученная как для решения в полуплоскости, так и для решения Кельвина. Здесь пунктирные линии представляют результат решения Кельвина, а сплошные линии — решение в полуплоскости (аналогично для примеров ниже). Очевидно, что меньшая погрешность и более быстрая сходимость достигаются при использовании фундаментального решения в полуплоскости.

Изменение погрешности численных результатов для рассмотренной выше задачи с учетом расстояния d показано на рис. 3 в случае четырех постоянных элементов. Результаты фундаментального решения в полуплоскости приближаются к результатам решения Кельвина по мере того, как расстояние d становится большим. Та же тенденция справедлива и для большого числа элементов. Следовательно, наилучшее расположение объектов конечного размера — разместить их как можно ближе к поверхности модели полуплоскости.

На рис. 4 показаны погрешности перемещений в случае, когда пластина нагружена в направление Y. Средние погрешности перемещения при сжатии двух соответствующих сторон a и c различны, хотя равные погрешности перемещения при сжатии получаются, если пластина нагружена в направлении X, как показано на рис. 2. То же самое относится и к внутренним перемещениям и напряжениям. Как упоминалось выше, важным преимуществом решения в полуплоскости перед решением Кельвина является то, что дискретизация одной плоской поверхности без силы больше не требуется. Если пластина загружена в направлении Y, как показано на рис. 4, нет необходимости дискретизировать сторону a, но остальные три стороны b, c и d остаются с теми же результатами, а время вычислений было уменьшено на 30–40%.

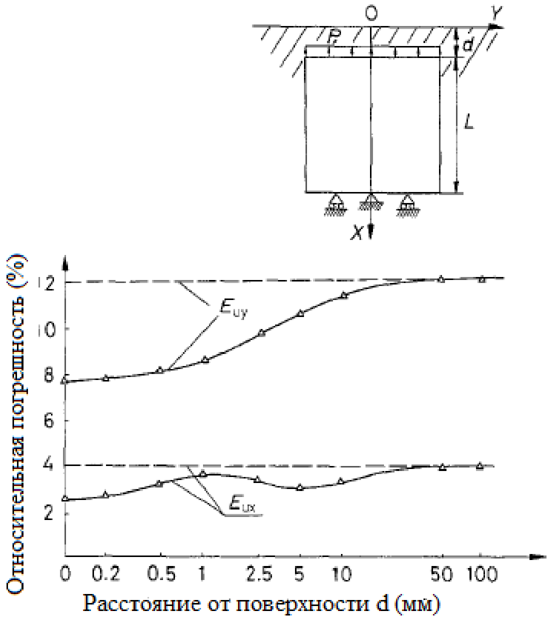

Рис. 3 – Изменение погрешности перемещений с учетом расстояния d

Fig. 3 – Variation of displacement error taking into account the distance d

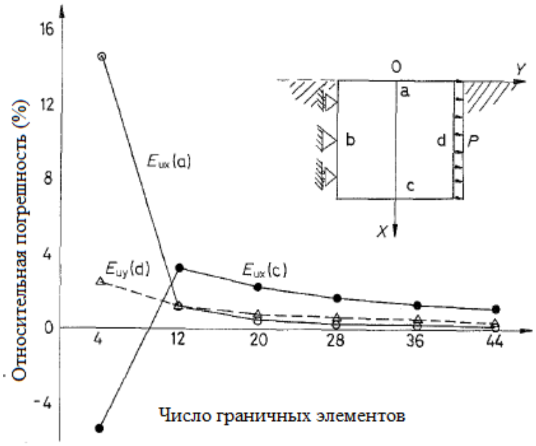

Рис. 4 – Квадратная пластина под силой в направлении оси Y

Fig. 4 – Square plate under the force in the direction of the axis

На рисунке 5 показано влияние положения фиксированных граничных условий. Погрешности малы в случае, когда фиксированные границы располагаются внутри полуплоскости (вариант 1). Это связано с тем, что вклад дополнительных частей уменьшается с увеличением расстояния d. Если фиксированные границы заданы снаружи полуплоскости (вариант 2), то погрешность перемещений сравнительно велика из-за того, что относительно большой вклад обнуляется в процессе составления матричного уравнения. Это справедливо и для большего числа граничных элементов. Поэтому лучше поставить фиксированное граничное условие внутри полуплоскости.

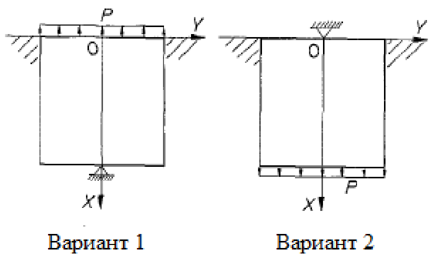

Рис. 5 – Влияние учета фиксированной стороны пластины

Fig. 5 – Effect of taking into account the fixed side of the plate

Ниже в таблице 1 приведены относительные погрешности для случаев 1 и 2 (для четырех граничных элементов).

Таблица 1

Table 1

Вариант	E_{ux} (%)	E_{uy} (%)
1	2,56	7,71
2	3,31	8,54

Второй пример — квадратная пластина, находящаяся под двухосным растяжением. Погрешность результатов для фундаментального решения Кельвина и для решения в полуплоскости показаны на рис. 6. Относительные погрешности перемещений u_x и u_y для решения в полуплоскости различны из-за направленного эффекта по сравнению с равными значениями этих перемещений по решению Кельвина.

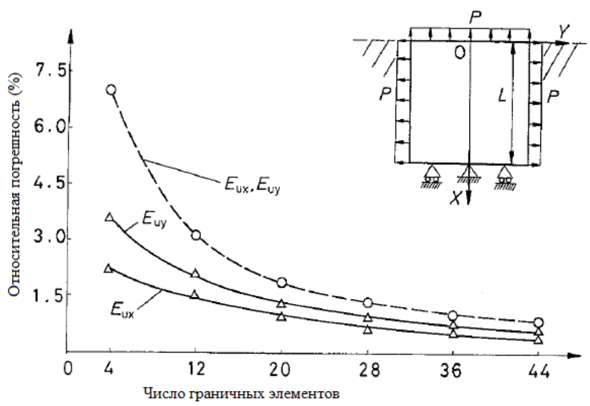

Рис. 6 – Квадратная пластина под двухосным растяжением

Fig. 6 – Square plate under biaxial tension

В данном примере $P = 165,38 МПа$. $G = 83,3 МПа$, $L = 10 мм$, $\mu = 0,3$.

Заключение

Следует отметить, что задача Кельвина в бесконечной плоскости и задача в полуплоскости имеют множество практических применений, включая проектирование и анализ конструкций, исследование поведения материалов под нагрузкой, оценка прочности и устойчивости материалов и конструкций. Эта задача является основной в теории упругости и помогает инженерам и ученым понимать сложные механические явления в материалах.

Из приведенного выше численного анализа и примеров мы видим, что фундаментальное решение в полуплоскости может удовлетворительно использоваться и с меньшим количеством элементов для численного анализа двумерных задач конечного размера. Кроме того, отмечаются следующие интересные численные свойства по сравнению с фундаментальным решением Кельвина.

(1) В отличие от двумерного решения Кельвина, фундаментальное решение в полуплоскости дает «направленный» эффект рассчитанной деформации. При этом следует уделить внимание расположению оси симметрии деформированного состояния объектов (если таковая имеется), параллельной оси симметрии полуплоскости модели.

(2) Погрешность численных результатов увеличивается по мере увеличения расстояния объекта от поверхности в модели полуплоскости, что также делает невозможным использование фундаментального решения. Поэтому лучше располагать объект как можно ближе к поверхности в модели полуплоскости.

Наконец, следует также отметить, что приведенные выше численные свойства решений с использованием фундаментального решения в полуплоскости оказались верными в случае использования любых элементов более высокого порядка, хотя представленные здесь данные получены только с использованием постоянных элементов.

Литература

1. М.К. Сагдатуллин, Вестник Казанского технологического университета. **16,** 5, 210-215 (2013).
2. М.К. Сагдатуллин, Вестник Казанского технологического университета. **19**, 20, 156-161 (2016).
3. К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Вроубел Методы граничных элементов. Москва «МИР», 1987. 524 с.
4. К. Бреббия, С. Уокер Применение граничных элементов в технике. Москва «МИР», 1982. 248 с.
5. E. Melan Z. Angew. Math. Mech. **12**, 343-346 (1932).
6. Л. Коллатц Численные методы решения дифференциальных уравнений. Москва «МИР», 1953.
7. С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер Теория упругости. Москва «Наука», 1975. 576 с.
8. С. Г. Михлин Интегральные уравнения. Москва «Гостехиздат», 1947.
9. С. Г. Михлин Вариационные методы в математической физике. Москва «Наука», 1970.
10. К. Ланцош Вариационные принципы механики. Москва «МИР», 1965. 408 с.
11. А. С. Вольмир Гибкие пластинки и оболочки. Москва «Гостехиздат», 1956.

References

1. M.K. Sagdatullin, Herald of Kazan Technological University, **16,** 5, 210-215 (2013).
2. M.K. Sagdatullin, Herald of Technological University, **19**, 20, 156-161 (2016).
3. K. Brebbia, J. Telles, L. Vroubel Methods of boundary elements. Moscow “MIR”, 1987. 524 p.
4. K. Brebbia, S. Walker Application of Boundary Elements in Engineering. Moscow “MIR”, 1982. 248 p.
5. E. Melan Z. Angew. Math. Mech. **12**, 343-346 (1932)
6. L. Collatz Numerical methods for solving differential equations. Moscow “MIR”, 1953.
7. C. P. Timoshenko, J. Goodyear Theory of elasticity. Moscow “Nauka”, 1975. 576 p.
8. C. G. Mikhlin Integral equations. Moscow “Gostekhizdat”, 1947.
9. S. G. Mikhlin Variation Methods in Mathematical Physics. Moscow “Nauka”, 1970.
10. K. Lantsosh Variational principles of mechanics. Moscow “MIR”, 1965. 408 p.
11. A. S. Volmir Flexible plates and shells. Moscow “Gostekhizdat”, 1956.

© **М. К. Сагдатуллин** - канд. физ.-мат. наук, доцент, кафедра Основ конструирования и прикладной механики (ОКПМ), Казанский национальный исследовательский технологический университет (КНИТУ), Казань, Россия, ssmarat@mail.ru; **Х. С. Гумерова** – канд. физ.-мат. наук, доцент, кафедра ОКПМ, КНИТУ, khalidagumerova@rambler.ru.

© **M. K. Sagdatullin** – PhD (Physical and Mathematical Sci.), Associate Professor, Department of Basic Construction and Applied Mechanics (BCAM), Kazan National Research Technological University (KNRTU), Kazan, Russia, ssmarat@mail.ru; **Kh. S. Gumerova** – PhD (Physical and Mathematical Sci.), Associate Professor, the BCAM department, KNRTU, khalidagumerova@rambler.ru.

Дата поступления рукописи в редакцию –20.02.25.
Дата принятия рукописи в печать – 05.03.25.