

Введение При построении физических моделей многослойных ортотропных оболочек, вводятся всевозможные подходы, основанные как на различных гипотезах для каждого слоя оболочки [1-3], так и на единых гипотезах для всех слоев тонкостенной конструкции [2,4-9]. В первом случае порядок разрешающей системы зависит от количества слоев. Во втором случае порядок системы не зависит от числа слоев, что открывает, в частности возможности, для эффективного применения МКЭ в расчетах ортотропных многослойных оболочек. Данный ортотропный многослойный конечный элемент (КЭ) получен на основе трехмерного изотропного восьмиузлового КЭ оболочки [10], состоящего в дискретизации трехмерных уравнений теории упругости в криволинейной системе координат и использовании некоторых оболочечных гипотез. Применение подобных подходов к расчету оболочек средней толщины посвящены работы [11-18], введение ортотропности и многослойности в расчетную схему оболочек описано в публикациях [17-21]. Для расчета комбинированных конструкций и конструкций существенно переменной толщины методом конечных элементов целесообразно использовать как трехмерные конечные элементы (КЭ) [22], так и оболочечные. Для их стыковки в единую расчетную модель используются различные способы. В [23] описывается создание и исследование переходных трехмерных КЭ, используемых при решении термоупругих задач, в [24] используются переходные конечные элементы, связывающие в единую расчетную модель квадратичные трехмерные элементы сплошной среды и элементы оболочек типа Тимошенко, в качестве узловых степеней свободы которых выбираются три проекции вектора перемещений и два угла поворота нормали, в [25] для расчета напряженно-деформированного состояния пространственных конструкций применяется комбинированная модель, где кинематические условия упругого сопряжения с оболочечными элементами учитываются при помощи метода штрафа. В [26] необходимые условия сопряжения по границе между трехмерными и оболочечными КЭ реализуются путем введения в исходный функционал задачи множителей Лагранжа, параметры которых исключаются из числа варьируемых величин на уровне сборки конструкции. Обзор некоторых алгоритмов создания переходных КЭ приведен в [27]. В настоящей работе вводятся аппроксимации радиус-вектора, ковариантных и контравариантных базисных векторов, метрических тензоров, перемещений, тензоров деформаций и напряжений. Технология использования метода двойной аппроксимации по точкам суперсходимости и методика «понижения порядка аппроксимаций» деформаций поперечного сдвига в трехмерной постановке подробно описаны в [10]. Гипотеза малости напряжений обжатия описана в приближенном виде, «упрощенный закон Гука», связывающий напряжение обжатия с деформацией обжатия, не используется. Определяется матрица упругих констант для ортотропного материала. Упругие характеристики и угол намотки могут быть в общем случае

различны для каждого слоя конечного элемента. Описаны соотношения сборки матрицы жесткости для многослойного ортотропного КЭ. Предполагается рассмотрение технологии построения переходного конечного элемента. Суть методики заключается в наложении оболочечных гипотез (гипотеза малости напряжений обжатия, усечение деформаций поперечного сдвига, «упрощенный закон Гука», сокращенное интегрирование и т.д.) на квадратурные точки, которые затем интерполируются в узлы в месте стыковки элемента с оболочечным конечным элементом. Узлы, в которых происходит стыковка переходного конечного элемента с массивными трехмерными элементами, освобождаются от наложения оболочечных гипотез. Таким образом, происходит сглаживание перемещений в пределах конечного элемента, но не гарантирует сглаживание напряжений в пределах данного переходного КЭ, то есть подразумевается, что такая операция должна применяться для участков, удаленных от реально исследуемых мест концентраций напряжений. Критерием оценки напряжений в данной зоне является исследование значений напряжений при разбиении данной зоны различными типами конечных элементов (трехмерными, оболочечными, переходными). Решено несколько тестовых задач, на которых апробируется работоспособность предложенного КЭ и проходит верификация с решениями других авторов. Результаты показывают приемлемость применения данной методики для определения НДС тонкостенных конструкций. Для иллюстрации приведены результаты статического расчета стабилизатора легкомоторного самолета, состоящего из многослойных оболочек.

1. Кинематические соотношения В пределах каждого элемента вводится локальная система координат, переводящая искривленный параллелепипед в единичный куб. Определим вектор-функцию произвольной материальной точки тонкостенной конструкции, которая бы обеспечивала непрерывность её и её первых производных, т.е. базисных векторов, при переходе межэлементных границ. Проекция радиус-вектора аппроксимируем следующим образом где - функции формы КЭ оболочки. Определим ковариантные базисные векторы Компоненты соответствующего базиса запишем в виде а ковариантный базис вычислим по формулам Метрические тензоры в различных базисах, характеризующие геометрию можно представить в виде следующих соотношений Введем аппроксимации вектора и градиента вектора перемещений Компоненты тензора деформаций определим в следующем виде где Технология понижения порядка аппроксимации для деформаций поперечного сдвига, где подробно описана в [10]. Обобщенный закон Гука запишем в следующем виде (1) Введем гипотезу малости напряжений обжатия (2) Используя соотношение (1), запишем выражение (2) в следующем виде (3) Представим (3) в виде выражения (4) Выразим из (4) деформацию обжатия (5) Подставляя (5) в (1) получим (6) Запишем (6) в более простом виде где Записанная в таком виде гипотеза малости напряжений обжатия позволяет в

явном виде ввести в расчетную схему физические постоянные как для изотропного, так и для ортотропного материала. 2. Ортотропность и многослойность Среди множества способов расчета слоистых композитных оболочек, особое место занимают численные методы, в частности МКЭ. Главное достоинство подобных алгоритмов состоит в возможности расчета тонкостенных конструкций сложной геометрии с переменными механическими характеристиками под действиями различных нагрузок. Для анизотропного материала в общем случае соотношения теории упругости имеют довольно сложную структуру и записываются в виде компонент матрицы упругих констант размерностью . Ортотропный материал имеет три взаимно перпендикулярные плоскости упругой симметрии. В связи с этим вводится ортогональная система координат, определяющая оси ортотропии, относительно которых определяются деформации и напряжения. Обобщенный закон Гука для ортотропного тела имеет следующий вид Здесь упругие постоянные выражены, через применяемые в технике показатели: модули упругости и сдвига , а также коэффициента поперечной деформации . Таким образом, для установления связей между тензорами напряжений и деформаций необходимо 12 упругих постоянных, из которых 9 постоянно независимы. При этом коэффициенты Пуассона и модули упругости связаны соотношениями Тогда компоненты матрицы упругости для ортотропного материала запишутся в следующем виде (7) где (8) Наиболее часто в практике расчетов многослойных конструкций встречается преобразование коэффициентов матрицы упругости ортотропного тела при повороте системы координат вокруг своей оси (которая совпадает с нормалью к плоскости слоя) на угол . Матрица коэффициентов упругости в осях слоя имеет вид (7), (8). Преобразование коэффициентов упругости осуществляется следующим образом (9) где для случая поворота вокруг оси коэффициенты матрицы угла поворота имеют следующий вид: (10) где Подставив (10) в (9), получим следующие соотношения для ненулевых компонентов симметричной матрицы : Так как на практике большинство материалов имеют слоистую структуру с различными по толщине механическими характеристиками, в общем случае не симметричными, то целесообразнее применять многослойный конечный элемент. Значения толщин каждого слоя удобнее задавать в виде их относительных значений где количество слоев. Если толщина каждого слоя одинакова, то . Межслойные координаты по толщине внутри КЭ можно определить следующим образом При вычислении матрицы жесткости применяется квадратурная формула Гаусса-Лежандра порядка , где количество слоев. Таким образом, координаты квадратурных точек в направлении оси определяются в середине толщины каждого слоя Тогда компоненты матрицы жесткости можно вычислить следующим образом где Компоненты напряжений вычисляются в четырех квадратурных точках, определенных в середине каждого слоя и далее интерполируются в узлы. Так как при расчете НДС

тонкостенных конструкций используется однослойная аппроксимация, то приемлемая точность достигается уже при количестве слоев . 3.

Линеаризованная задача устойчивости
Возможность потери устойчивости для элементов подконструкций является весьма опасной ситуацией, т.к. зачастую это приводит к исчерпанию несущей способности всей конструкции. Среди множества различных схем исследования этого явления следует отметить подход Эйлера, как наиболее простой, но позволяющий определить верхнюю критическую нагрузку и соответствующую ему форму потери устойчивости. При постановке линеаризованной задачи об устойчивости возмущенного равновесного состояния упругих деформируемых тел вводится стандартное предположение о том, что тело до потери устойчивости напряжено, но не деформировано, а внешние силы неизменного направления не совершают работу на приращениях перемещений при переходе из невозмущенного в возмущенное равновесное состояние. Наиболее общая постановка этой задачи предусматривает построение геометрически и физически нелинейного решения во всем диапазоне задаваемой нагрузки с анализом равновесного состояния на каждом этапе. Потеря устойчивости при этом представляется либо как точка бифуркации (разветвления) решения уравнений равновесия, либо как предельная точка на диаграмме нагрузка-перемещение. Поиск этих точек различен, и поэтому целесообразно заранее предугадать, какой тип потери устойчивости будет реализовываться в рассматриваемой конструкции. Не вдаваясь в подробности можно выделить важный класс задач, который позволяет ограничиться лишь линейными уравнениями для определения докритического НДС и линеаризованными уравнениями для определения критических нагрузок. Исходными уравнениями для этой задачи являются уравнения виртуальных работ для основного и возможного смежного равновесного состояний , (11) в которых для деформаций используются геометрически нелинейные соотношения. Например, исходное деформированное состояние характеризуется тензором , а смежное – тензором где - вектор дополнительных перемещений, характеризующих форму потери устойчивости. В исходном состоянии варьируемой функцией является вектор перемещений , и разрешающее вариационное уравнение имеет вид (12) В смежном равновесном состоянии варьируется приращение перемещений , и уравнение виртуальных работ имеет вид (13) где - приращение напряжений, вызванных перемещением . Вычитая из уравнения (13) уравнение (12) с учетом равенства (в силу их произвольности) вариаций и , получим уравнение нейтрального равновесия (14) Сделаем некоторые предположения, которые с одной стороны ограничивают класс решаемых задач, а с другой – позволяют свести объем вычислений до минимума. Первое предположение ограничивает величину приращений перемещений условием , что означает близость смежного равновесного состояния - так называемая задача устойчивости в малом. Второе

предположение ограничивает перемещение условием, что эквивалентно линейности докритического состояния. С учетом этих неравенств уравнения (12), (14) сводятся к линейным уравнениям (11) и (15) где (16). (17)

Использование конечно-элементной техники для уравнения (11) приводит к известной матричной задаче (18) где K - матрица жесткости, U - вектор узловых перемещений, F - вектор внешних сил. Из этого уравнения определяется первоначальное НДС. Уравнение (15) приводит к однородной системе уравнений (19) где ΔU - вектор приращений перемещений, K - матрица геометрической жесткости. Появление в уравнении (19) той же самой матрицы жесткости, что и в (18), обусловлено двумя факторами: во-первых, физические соотношения в докритическом состоянии и при выпучивании одинаковы, что можно записать в виде $\sigma = E \epsilon$, во-вторых, вследствие (16), (17) отличие между деформациями и лишь в физическом смысле векторов и при одинаковой аппроксимации для них, т.е., получим $\Delta \epsilon = \epsilon$. Матрица геометрической жесткости является функцией решения задачи (18), т.к. в нее входят значения ϵ , характеризующие докритическое напряженное состояние. В зависимости от величины этих напряжений возможны такие ситуации, когда матрица системы уравнений (19) вырождается и эта система допускает ненулевое решение. Физически это означает, что возможно появление нового равновесного состояния, отличного от найденного из (18), с полем перемещений на величину U . Математически условие вырождения системы (19) имеет вид $\det K = 0$. Используя линейность всех зависимостей, считаем, что вектор нагрузки пропорционален некоторому параметру λ , т.е., (20) где U_0 - вектор единичной нагрузки, характеризующий ее распределение по области; - из решения задачи (18) определяем ϵ , что позволяет записать матрицу геометрической жесткости в виде $K = K(\lambda)$; (21) - подставляя (21) в (19), получаем обобщенную задачу на собственные значения; (22) - решая эту задачу по приведенной далее схеме, находим минимальное собственное значение (или спектр собственных значений) и соответствующий ему собственный вектор U . Наименьшая критическая нагрузка, в соответствии с (20), будет определяться как λ_{cr} , а вектор характеризует форму потери устойчивости с точностью до постоянного множителя. Минимальное собственное число и соответствующий ему собственный вектор задачи (22) определяют наименьшую критическую нагрузку и соответствующую ей форму потери устойчивости (до постоянного множителя).

4. Метод итерации подпространств

Задача определения всего спектра собственных частот задачи (22) является излишней и вполне достаточно ограничиться определением лишь части спектра, которая соответствует минимальным λ . Для решения этой частичной проблемы собственных значений разработано семейство методов, известных в литературе как методы итераций подпространств. Используается одна из простейших схем такого метода. 1. Имеем некоторую систему линейно независимых векторов U_i , (23) размерность которых совпадает с размерностью задачи (22), и число которых значительно

меньше этой размерности . 2. Будем искать решение задачи (22) в виде линейной комбинации (23), т.е. . (24) 3. Составляется отношение Релея, определяющее квадрат частоты колебаний, наиболее близкое по форме к приближению (24) , (25) где . 4. Параметры разложения (24) находятся из условия минимальности отношения Релея (25), т.е. из условия минимальности по величине определяемой частоты собственных колебаний Из условия равенства нулю числителя с учетом обозначения (25) получаем алгебраическую задачу , (26) которая по своей природе тоже является обобщенной задачей на собственные значения. Из ее решения необходимо найти спектр собственных значений и соответствующих собственных векторов . Число параметров существенно меньше неизвестных в системе уравнений (22). 5. Приведенная собственная проблема (26) решается методом вращений Якоби (т.к. матрицы и являются симметричными, а матрица к тому же является положительно определенной.) и находятся и . Найденные значения , упорядоченные по возрастанию, определяют нижнюю часть спектра критических нагрузок, а соответствующие формы потери устойчивости определяются как разложения . (27) Точность решения (27) целиком и полностью зависит от качества выбора векторов , т.е. от базиса в n -мерном пространстве векторов, в котором ищется решение задачи (22). Как правило, весьма затруднительно сразу определить этот базис (совокупность векторов) наилучшим образом. Поэтому предусматривается процедура изменения этого базиса. 6. Определяется новая совокупность векторов , как решения системы уравнений . Далее, повторяются все действия, начиная с пункта 2. Критерием остановки процесса является проверка вычисления величин на уточнение их значений на двух соседних итерациях. 5. Расчет стабилизатора и руля высоты легкомоторного самолета на прочность и устойчивость В качестве примера приведен расчет напряженно-деформированного состояния руля высоты и стабилизатора легкомоторного самолета. Стабилизатор и руль высоты представляют собой сложную комбинированную оболочечную конструкцию (рис. 1), усиленную корневыми нервюрами и лонжеронами. При дискретизации расчетной области используется как многослойный КЭ (для моделирования обшивки стабилизатора и руля высоты), так и трехмерный КЭ сплошной среды (для моделирования элементов корневых нервюр и лонжеронов). Рис. 1 - Стабилизатор и руль высоты (вид сверху) Расчет на прочность стабилизатора и руля высоты проводится для приводимых в СНиПах уравнивающих и маневренных нагрузках, схема приложения которых приведена на рисунке 2. Рассматриваются только симметричные случаи приложения нагрузки. Рис. 2 – Схемы нагружения Схема крепления стабилизатора к фюзеляжу приведена на рисунке 3 (руль высоты крепится к стабилизатору). Исходя из симметрии конструкции, приведена только половина стабилизатора. Крепление к фюзеляжу (для половины стабилизатора) производится в трех точках , и (рис.3). В точке реализован скользящий шарнир, в

точке - обыкновенный шарнир, в точке стабилизатор крепится к килю с помощью расчалки. Рис. 3 - Схема кинематического закрепления стабилизатора

Для верификации программы было проведено сравнение решения задачи с результатами, полученными в ППП ANSYS на основе конечного элемента SHELL181. В таблице 1 приведено сравнение реакций, и, возникающих в точках крепления стабилизатора к фюзеляжу в точках и. Таблица 1 - Реакции (Н) в точках крепления и, передаваемые на фюзеляж со стабилизатора для трех случаев нагружения

№	progr	ansys	progr	ansys	progr	ansys
1	A	-5841	-5062	63,2	-9,2	B
2	A	-9124	-8615	-21	-16	B
3	A	-7811	-7223	-18	-13,8	B

Анализ результатов расчета показывает, что разница в результатах расчета силовых факторов при статическом расчете сложной конструкции между полученными по разработанной методике и в ППП ANSYS не превышает 15%. Для иллюстрации результатов расчета на рисунке 4 приведено распределение прогибов для половины конструкции стабилизатора (в метрах) для схемы нагружения 2. Рис. 4 - Общая картина прогибов половины конструкции стабилизатора для схемы нагружения 2

Также был проведен расчет стабилизатора на линейную устойчивость. В таблице 2 приведены отношения первых четырех значений величин критических нагрузок к статическим для трех случаев нагружения. Таблица 2 - Отношения первых четырех значений величин критических нагрузок к статическим.

Номер критической нагрузки	1	2	3	4
Схема нагружения 1	1,3931	1,4027	1,6569	1,6576
Схема нагружения 2	1,0251	1,0334	1,0991	1,1079
Схема нагружения 3	1,2361	1,2489	1,3136	1,3263

Можно отметить, что наиболее опасным с точки зрения расчета на устойчивость является вариант нагружения по схеме 2. В этом случае все четыре минимальных критических нагрузки превышают расчетную не более, чем на 10%. Заключение Исходя из полученных результатов, следует отметить, что разработанная численная методика исследования напряженно-деформированного состояния ортотропных многослойных оболочек сложной геометрии, дает результаты, хорошо согласующиеся с данными, полученными в других прикладных пакетах программ, в частности в ППП ANSYS. Следовательно, на ее основе можно рассчитывать подобные конструкции и получать достоверные результаты. Для результатов, полученных в ППП ANSYS использовалась лицензионная версия (license-ansys_9-13-2012-6.57.22), установленная в Казанском (Приволжском) федеральном университете.