Введение Многие задачи теоретического и прикладного характера, связанные, в частности, с задачами управления, состоят в построении математических моделей. Математическое моделирование является быстро развивающейся областью науки и техники. Для ее успешного развития важны отвечающие современным требованиям методы решения инженерных и математических задач с использованием компьютеров. Развитие и совершенствование такой быстро развивающейся области знания связано с разработкой систем автоматизированного моделирования. Эти системы реализуют множество стандартных и специальных математических операций, снабжены мощными графическими средствами и обладают собственными языками программирования. Все это предоставляет широкие возможности для решения задач моделирования и управления сложными системами. Управление движением системы предполагает решение трех задач: планирование траектории движения, стабилизацию движения, управление динамикой системы. К решению задачи планирования траектории движения в рабочей среде с препятствиями можно выделить два подхода. Первый позволяет получить точное решение этой задачи, либо доказать, что решения не существует. Согласно второму подходу поиск решения задачи обхода препятствий осуществляется с помощью численных методов, применение которых предполагает существенные ограничения на формы препятствий и законы их перемещения. Стоит также отметить, что алгоритмы таких методов могут не найти решение даже тогда, когда оно существует. Современный уровень развития вычислительной техники, систем автоматизации составления и решения уравнений движения открывает возможность применения аналитических методов к решению задачи планирования траектории движения в среде с препятствиями. В частности, в [1, 2] предложен метод построения системы дифференциальных уравнений по заданным интегральным многообразиям, применение которого для моделирования кинематических свойств системы, выраженных в виде дифференциальных связей, позволяет найти решение задачи обхода препятствий. Для решения задач моделирования динамики используются известные классические методы, основанные на предположении о том, что уравнения связей, наложенные на систему, выполняются как в начальный момент движения, так и при всем последующем движении. Такие методы не позволяют учитывать возможные отклонения от уравнений связей. Поэтому при моделировании динамики систем необходимым условием существования требуемого программного движения является стабилизация связей. Под задачей стабилизации понимается задача выбора управлений, под воздействием которых все движения рассматриваемой системы из начальной окрестности программного движения попадут в другую, более узкую, окрестность этого движения и в дальнейшем ее не покидают. Проблемы построения уравнений программного движения и стабилизации связей

излагаются в [3, 4, 5, 6, 7]. В частности, в [5] для стабилизации связей учитываются отклонения от уравнений связей и вводится соответствующая коррекция в правые части уравнений динамики. Уравнения программных связей, уравнений возмущений связей, рассмотренные в [3], гарантируют асимптотическую устойчивость и стабилизацию связей при численном решении. В теории управления динамикой систем, содержащей элементы различной физической природы, решаются задачи аналитического построения систем дифференциальных уравнений с требуемыми свойствами решений, заданными уравнениями связей. Программное движение, соответствующее заданным свойствам, осуществляется посредством дополнительных управляющих сил. Поэтому основная задача управления сводится к определению сил, прикладываемых к системе в соответствии с поставленной целью. В данной работе в качестве примера, иллюстрирующего эффективность изложенных методов, приводится решение задачи управления динамикой плоского манипулятора, совершающего перемещение центра схвата в соответствии с заданной программой движения. Построение и реализация соответствующей математической модели проведены в системе символьных вычислений Maple. Постановка задачи Рассматривается задача построения уравнений динамики плоского двухзвенного манипулятора (рис. 1). Необходимо определить выражения управляющих моментов и , приложенных в шарнирах и обеспечивающих приближение центра схвата из произвольной точки рабочей зоны, расположенной в правой полуплоскости, к началу координат , касаясь оси и минуя препятствие, уравнение движения которого задано в виде: . Рис. 1 – Схема плоского двухзвенного манипулятора Математическое моделирование кинематических свойств Требуемые движения системы будут осуществляться, если на координаты и скорости центра схвата манипулятора наложить дифференциальные связи, уравнения которых могут быть получены в соответствии с методом, изложенным в [2]. Для этого определяются частные интегралы искомой системы уравнений: (1) , . Учитывая, что (2) искомая система уравнений будет иметь вид: (3) Здесь (4) Коэффициенты , , , определяются выражениями: , , , (5) . Здесь , (6) . Полагая , и , , из (5) с учетом (6) и условия устойчивости получим: , . Подстановкой значений , и коэффициентов , , , в (3) с учетом (4), можно получить систему Учитывая (1.51), запишем систему в виде (7) где определяются выражениями (4). Далее приводится фрагмент программы построения уравнений (7), разработанный в системе Maple:

```

fx:=diff(f(px2,py2,t),px2); fy:=diff(f(px2,py2,t),py2); ft:=diff(f(px2,py2,t),t); dx:=p1-q*fy-fx*ft/(fx^2+fy^2); dy:=p2+q*fx-fy*ft/(fx^2+fy^2); f1:=px2+2*k*t; f2:=py2; f3:=((px2-2+k*t)^2+4*py2^2-1)/2; f12:=subs(px2=0,py2=0,t=0,f3); b2:=q/p+l1/(p*f12); c1:=-q/p+l2/(p*f12); subs(l1=-1,l2=-2,k=0.01,q=1,p=2,c1); subs(l1=-1,l2=-2,k=0.01,q=1,p=2,b2); p1:=p*b2*f1*f3; p2:=p*c1*f2*f3; f(px2,py2,t):=f1*f2*f3; dxsubs:=subs(l1=-1,l2=-2,k=0.01,q=1,p=2,dx);

```

$dysubs:=subs(l1=-1,l2=-2,k=0.01,q=1,p=2,dy)$; Положение участков манипулятора определяется углами поворота звеньев, принимаемыми за обобщенные координаты. Прямоугольные координаты центра схвата выражаются через обобщенные координаты (8) Выражения прямоугольных скоростей запишутся в виде: (9) Заменой прямоугольных координат и скоростей в (7) соответствующими выражениями в обобщенных координатах (8), (9) можно получить уравнения неголономных связей, обеспечивающие движения в соответствии с условиями задачи: (10) Построение уравнений динамики Уравнения динамики системы рассматриваются совместно с уравнениями связи (10). Для стабилизации связей необходимо ввести уравнения программных связей [3]: (10) Для построения уравнений динамики необходимо определить выражения кинетической энергии, потенциальной энергии и диссипативной функции. Для рассматриваемой системы соответствующие функции запишутся в обобщенных координатах с учетом избыточных переменных в виде , , . Уравнения динамики описываются системой уравнений вида: , (11) , (12) . (13) Используя в Maple оператор дифференцирования D и функцию diff для определения полных и частных производных функций T, P, D, можно получить дифференциальные уравнения динамики системы в виде, разрешенном относительно старших производных: (14) Здесь Управляющие воздействия в (14) определяются выражениями (15) Уравнения возмущений связей (12)-(13) примут вид (16) Множители определяются в Maple с помощью команды solve из уравнений, составленных путем дифференцирования равенств (10) с учетом выражений (14) - (16). Решение задачи Численный эксперимент проведен в системе Maple при следующих данных, , , . Начальные условия, определяются из равенств (8) при условии, что начальное положение центра схвата манипулятора соответствует точкам. Значения, выбираются с условием, что система находится в состоянии покоя в начальный момент времени. На рис. 2. приведены траектории движения центра схвата плоского манипулятора, полученные в результате решения уравнений динамики при заданных начальных условиях с помощью встроенной функции Maple DEtools/phaseportrait. Рис. 2 - Траектории движения центра схвата манипулятора с обходом подвижного препятствия