

Настоящая статья посвящена изучению неустановившейся теплоотдачи при движении нагретой жидкости через бесконечно-протяженный радиально-расходящийся канал при неоднородных граничных условиях первого рода. Она продолжает серию работ [1-7] по изучению теплообмена при течении теплоносителя в каналах различной формы и отличающихся условиях на границах. Актуальность вопроса обоснована в вышеуказанных опубликованных работах. Следует подчеркнуть, что решения подобных задач актуальны не только в связи с прикладной направленностью проблемы, но еще и потому, что они имеют самостоятельное теоретическое значение как решения отдельных задач математической физики. Данная задача аналогична [7], однако, здесь в качестве исходного принимается дифференциальное уравнение, учитывающее частную производную от температуры по времени. Это позволит оценить время, необходимое для достижения стационарного режима теплообмена, а также дать теоретические формулы, пригодные для расчета неустановившегося теплообмена в радиально-расходящемся канале, если неустановившейся режим является рабочим. Физическая постановка задачи идентична приведенной в работе [6]. Начально-краевая задача (рис. 1) (1) Рис. 1 - Начальные и граничные условия (2) (3) (4) (5) (6) Здесь Вводится безразмерная температура (7) Следует заметить, что введение безразмерной температуры позволит в дальнейшем получить более компактное решение задачи, нежели ее редукция в размерной форме. Учет (7) и выражения для (8) где (9) (10) (11) (12) (13) Задача (8)-(13) решается методом разделения переменных. Сначала она редуцируется (расщепляется) при помощи замены (14) Следует также отметить, что редуцирование, именно, в виде (14) является оптимальным для получения наиболее простого (менее громоздкого) решения (1)-(6) в целом. Это связано с нахождением коэффициентов в дальнейших разложениях. Применение (14) к (8)-(13) позволяет получить (15) (16) (17) (18) (19) (20) (21) (22) (23) (24) (25) Решается задача (15)-(19) путем ее расщепления с помощью замены (26) В результате было получено (27) , (28) (29) (30) (31) (32) (33) (34) Решением (32)-(34) будет функция (35) После разделения переменных в (27)-(31) с помощью замены (36) получаются две краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений (37) (38) (39) (40) (41) (42) Здесь - константа разделения Решение дифференциального уравнения (37) выражается через бесселевы функции [8] где Для удовлетворения граничному условию на бесконечности (39) следует в этом решении положить так как Тогда для функции необходимо удовлетворить условию (38). В итоге получено (43) Решение краевой задачи (40)-(42) (44) где Таким образом общим решением (27), (29)-(31) согласно (36), (43), (44) с учетом того, что будет (45) Применение к (45) граничного условия (28) приводит к выражению (46) Умножением обеих частей выражения (46) на с последующим интегрированием по от 0 до и с учетом свойства ортогональности произведения синусов на данном интервале, получено

выражение для Вычисление интегралов дает Откуда (47) Подстановка (47) в (45) позволяет получить (48) Здесь взято суммирование от a не от 0 по очевидным причинам. На основании (26), (35), и (48) получено (49) В (20)-(25) переменные разделяются, если положить (50) Тогда можно записать Откуда получаются три задачи (51) (52) (53) (54) (55) (56) (57) Решается задача (51)-(53). Решением уравнения Бесселя (51) будет функция [8] где Удовлетворение условию (53) дает так как Условие (51) требует, чтобы Поскольку то будет иметь место следующее характеристическое уравнение (58) где Итак, частное решение задачи (51)-(53) будет иметь вид (59) Частным решением краевой задачи (54)-(56) будет (60) Кроме того (61) Решение (57) приведет к функции (62) На основании (50), (59)-(62) получено общее решение задачи (20), (22)-(25) (63) где Теперь необходимо удовлетворить начальному условию (21) и найти коэффициенты Это приводит к выражению (64) Следует отметить, что поскольку при определении постоянных используется левая часть выражения (64), то суммирование в правой части этого соотношения по n выполняется от 0 , а не 1 , как в (63). Это относится и к окончательной записи выражения (63) после определения постоянных.

Использование ортогональности тригонометрических и бесселевых функций, соответственно в интервалах $0 \leq \theta \leq \pi$ и $0 \leq r \leq R$ после интегрирования и некоторых преобразований в (64) дает (65) Следует также заметить, что ортогональность бесселевых функций действительного аргумента и J_0 с весом r в интервале от 0 до R была доказана автором данной статьи, то есть Теперь необходимо вычислить интегралы от бесселевых функций. Использование [9] позволяет найти (66) Выполненное автором статьи преобразование и интегрирование в результате дало (67) Специальным приемом с использованием дифференциальных уравнений Бесселя действительного и мнимого аргументов второго рода порядка ν было получено автором настоящей статьи выражение (68) Преобразованием (65), с учетом интегралов (66)-(68) и ранее вычисленных интегралов по r , получено (69) Использование (7), (14), (49), (63), (69) позволяет получить окончательное решение исходной задачи (1)-(6) (70) Или в размерной форме (71) Удельный тепловой поток на нижнюю стенку с температурой (72) Удельный тепловой поток на верхнюю стенку с температурой (73)

Обозначения - радиальная и осевая координаты цилиндрической системы координат, м; - текущая температура жидкости, К; - постоянная температура горячей жидкости при входе в канал, К; - постоянные температуры нижней и верхней стенок канала, обращенных к жидкости, соответственно, К; - внутренний радиус штуцера на входе в канал, м; - объемный расход жидкости, м³/с; - коэффициент температуропроводности, м²/с; - ширина канала, м; - константа, м²/с; - удельный тепловой поток, Вт/м²; - теплопроводность жидкости, Вт/(м К); - время, с; - константы разделения; - число π ; - температуры, безразмерные; - бесселева функция первого рода мнимого аргумента, порядка ν , безразмерная; - бесселевы функции второго рода мнимого аргумента порядка ν , безразмерные; - бесселевы

функции первого рода действительного аргумента, порядка ν , безразмерные; -
бесселевы функции второго рода действительного аргумента порядка ν ,
безразмерные.