

В настоящее время теория тонкостенных стержней в достаточной мере разработана и изложена в фундаментальных работах [1,2]. Однако, при расчете предварительно напряженных конструкций возникает необходимость формулировки вариационных принципов с использованием компонент напряжений и деформаций [3-5], которых в известной автору литературе не представлены. Для описания напряженно-деформированного состояния тонкостенного стержня используем теорию, учитывающую сдвиги, возникающие при изгибе и при кручении стержня. Эта модель основывается на гипотезах принятых в теории стержней Тимошенко и в теории тонкостенных стержней открытого профиля [2]. Применяются основные гипотезы теории Тимошенко: 1. При деформировании продольные волокна стержня не взаимодействуют друг с другом в перпендикулярных к ним направлениях (гипотеза ненадавливания). 2. Поперечные сечения стержня, плоские до деформации, после деформации остаются плоскими. 3. Напряжения, связанные с изгибом в плоскости, проходящей через главную ось поперечного сечения стержня, постоянны по ширине сечения. 4. Справедлив закон Гука. Кроме этих предположений используются гипотезы, принятые в теории тонкостенных стержней с учетом сдвигов: 1. Гипотеза неизменяемости контура, в соответствии с которой, при деформировании стержня, профиль стержня в плоскости поперечного сечения перемещается как абсолютно твердое тело. 2. Гипотеза безмоментности, согласно которой, составляющие касательных напряжений, перпендикулярные к профилю поперечного сечения стержня (к срединной поверхности) равны нулю. Для описания деформирования стержня введем декартовую систему координат Ox, y, z , с осью z , перпендикулярной к плоскости поперечного сечения (рис. 1). Обозначим через e_x, e_y, e_z – орты этой системы координат. Для вычисления компонент напряженно-деформированного состояния в заданных точках M , на линии срединной поверхности поперечного сечения, вводится локальная декартова система координат, с осями ξ, η, ζ , направленными по касательной и по нормали к профилю стержня (рис. 1). Обозначим орты этих осей e_ξ, e_η, e_ζ . Полагаем, что $e_\xi = e_x \cos \alpha + e_y \sin \alpha$, $e_\eta = -e_x \sin \alpha + e_y \cos \alpha$, $e_\zeta = e_z$. В системе координат Ox, y, z , e_x, e_y, e_z . (1) где α – направляющие косинусы осей ξ, η . Справедливы равенства: $e_x = e_\xi \cos \alpha - e_\eta \sin \alpha$, $e_y = e_\xi \sin \alpha + e_\eta \cos \alpha$, $e_z = e_\zeta$. (2) Для описания перемещений и деформаций используем векторы перемещения и углов поворота поперечного сечения стержня: u, v, w . (3) Здесь u, v, w – перемещения в направлении осей Ox, Oy, Oz , $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ – углы поворота поперечных сечений стержня относительно этих осей. С учетом (3) и принятых гипотез, возникающие при изгибе и растяжении-сжатии перемещения точек в поперечном сечении стержня M , в направлении осей Ox, Oy, Oz , определяются по формулам: $u = u_0 + \theta_y z - \theta_z y$; $v = v_0 + \theta_z x - \theta_x z$; $w = w_0 + \theta_x y - \theta_y x$. (4) При кручении тонкостенного стержня возникает деплонация, появляются перемещения в направлении продольной оси Ox . В соответствии с теорией тонкостенных стержней с учетом сдвигов [2], (5) где ϕ – функция меры деплонации; A – секториальная площадь профиля. Кроме деплонации, при кручении, в плоскости поперечного сечения стержня возникают перемещения,

связанные с поворотом сечения. Для описания этих перемещений введем, двумерный вектор $\vec{r}$. (7) Здесь - перемещения в некоторой точке профиля (на линии пересечения срединной поверхности стержня с поперечным сечением) в направлении осей Ox и Oy (рис. 1). В соответствии с гипотезой неизменяемости контура, получается, что при кручении, тонкостенный стержень в плоскости поперечного сечения поворачивается как абсолютно жесткое тело. Следовательно, вектор может быть представлен в следующем виде [2] (рис. 2): $\vec{r} = r_x \vec{e}_x + r_y \vec{e}_y$. (8) Здесь - вектор перемещения точки поперечного сечения, которая называется центром кручения; - компоненты вектора перемещения точек в системе координат $Oxyz$; - вектор углов поворота сечения вокруг оси проходящей через полюс и параллельной оси Ox ; - вектор, проведенный из полюса в точку профиля. Выполняя операцию векторного умножения в формуле (8) и приравнявая правые части соотношений (7) и (8), получаем (9) Умножая это уравнение скалярно на вектора $\vec{e}_x$ и $\vec{e}_y$, определяем перемещения в направлениях осей Ox и Oy : $r_x = \dots$, $r_y = \dots$. С учетом формул (1), (2) находим (10) В дальнейшем полагаем, что полюс совпадает с началом системы координат $Oxyz$. Следовательно, $r_x = \dots$, $r_y = \dots$. (11) С учетом равенств (11), формулы (10) принимают следующий вид: (12) Таким образом, перемещения точек срединной линии поперечного сечения стержня в плоскости сечения описываются соотношениями (12). Для точек, лежащих на оси (рис. 3), величины r_x , r_y такие же, как и для точки, поэтому полученный результат в виде соотношений (12) можно использовать и для определения перемещений, в точках, лежащих на оси (на линии перпендикулярной к срединной линии поперечного сечения стержня). Полагая в формулах (12), получим (13) В этом случае секториальная характеристика (площадь) профиля J_ω . (14) Здесь - длина дуги линии, отсчитываемая от некоторой точки (рис. 3); - длина перпендикуляра, проведенного из начала координат $Oxyz$ к касательной к линии в точке. Так как стержень тонкостенный, то в дальнейшем полагаем $J_\omega = \dots$. Таким образом получается, что при растяжении-сжатии, изгибе и кручении тонкостенного открытого профиля в направлении нормали к поперечному сечению (в направлении оси Ox) возникают перемещения вызванные растяжением-сжатием, изгибом и деформацией сечения при кручении: (15) Деформации и напряжения будем вычислять в системе координат $Oxyz$. Используем формулы теории упругости: $\epsilon_x = \dots$, $\epsilon_y = \dots$, $\epsilon_z = \dots$. (16) Обратим внимание на то, что по формулам (16) вычисляются деформации в фиксированной точке и в фиксированной локальной системе координат. В этом случае, в точке (рис. 1 - 3), следовательно $\epsilon_x = \dots$. С учетом этого равенства и выражений (2), (13), (15), (16) находим $\sigma_x = \dots$, $\sigma_y = \dots$, (17). Так как принята гипотеза безмоментности, следует полагать $\sigma_z = 0$. В соответствии с гипотезой ненадавливания, продольные волокна стержня не взаимодействуют в нормальном по отношению к ним направлениям, следовательно, нормальные напряжения в направлении осей Ox и Oy , равны нулю: $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$. Таким образом, в тонкостенном стержне возникают только напряжения σ_z и τ_{xz} , действующие в его поперечном

сечении. С учетом формул (17), получаем , ; (18) . Подчеркнем, что формулы (17), (18) справедливы для точек поперечного сечения стержня, лежащих на оси , т.к. для них выполняется равенство . Координаты точек, лежащих на оси () вычисляются по формулам . Подставляя эти выражения в соотношение (18) для , с учетом того, что получим Здесь , . Следовательно, касательные напряжения можно представить в виде суммы , где - постоянное по толщине стенки среднее касательное напряжение, - напряжение чистого кручения, распределенное по толщине стенки по линейному закону: . (19) Обозначим координаты точек на линии через (), соответствующую координату - , а длину дуги, которая соответствует точке - . Следовательно, для точек, лежащих на оси , ; (20) , . Потенциальная энергия деформации стержня в точке (21) Здесь Введение в выражение для потенциальной энергии деформации (21) слагаемого , вместо объясняется следующим. Как известно [2], при чистом кручении узкой полосы, касательные напряжения ; вносят одинаковый вклад в величину момента чистого кручения . Согласно принятой гипотезе безмоментности, полагалось , следовательно, момент чистого кручения в этом случае будет создаваться только напряжением , причем справедливо равенство . Для компенсации отсутствия в формуле для потенциальной энергии деформации (21) напряжения , вместо используются . При этом получается . Для некоторых профилей величина коэффициент может быть уточнена на основе экспериментальных данных по формуле , где - поправочный коэффициент. Вариация потенциальной энергии деформации (22) Для точки (), вариация работы внешних сил, распределенных по длине и по площади поперечных сечений стержня , (23) где - проекции внешних сил на оси координат , , . Подставляя в (23) выражения для перемещений (13), (15), получим (24) Учитывая, что , а усилия выражаются через проекции внешних сил на оси координат , , по формулам , , , вариацию работы внешних (24) можно представить в следующем виде: (25) Для расчета напряженно-деформированного состояния стержневой системы используем вариационный принцип Лагранжа: . (26) Здесь - вариация потенциальной энергии деформации системы, - вариация работы внешних сил. Для стержня длиной и с площадью поперечного сечения , . (27) Для вычисления интегралов , используем численное интегрирование. При этом получается , . (28) Здесь - весовые множители, зависящие от используемой для численного интегрирования квадратурной формулы, размеров и формы поперечного сечения. С учетом равенств (25), (22), (27) (28), находим ; (29) Полагая в последнем выражении , , , , получаем вариацию работы распределенных по длине стержня внешних сил , моментов и бимомента : Аналогично, для сил сосредоточенных сил , приложенных в точках продольной оси стержня с координатой и моментов, , действующих в точках с координатой вариация работы внешних сил Таким образом, вариация работы распределенных и сосредоточенных в точках внешних сил (30) Вариационный принцип Лагранжа

(26) можно записать с использованием формул (29), (30), в которых напряжения и деформации вычисляются в локальной декартовой системе координат . Получилось, что основные положения предложенного в статье [6] метода расчета криволинейных, естественно-закрученных стержней, основанного на соотношениях для прямолинейного стержня, можно распространить и для тонкостенных стержней с криволинейным профилем. Представим выражение для потенциальной энергии деформации стержня в усилиях и моментах для случаев, когда выполняются равенства (31) Полагаем, что оси Oy , Oz являются главными центральными осями поперечного сечения стержня. Для выбранных осей координат , . (32) Используя формулы (18) - (19), (21), (31), (32), учитывая, что , выражение для потенциальной энергии деформации стержня можно представить в следующем виде: (33) Для выбранной системы координат $Oxuz$, усилия и моменты в поперечных сечениях стержня вычисляются по формулам: , , (34) , , где , . С учетом соотношений (34), формула для потенциальной энергии деформации (33) принимает вид: (35) Здесь , , . Получилось, что выражение для потенциальной энергии деформации (35) имеет «нестандартный» вид, в него входят поперечные силы , момент стесненного кручения , а также . Указанная особенность объясняется тем, что при выводе основных соотношений теории тонкостенных стержней было принято . Для уточнения распределения касательных напряжений по длине поперечного сечения можно использовать формулы, полученные на основе уравнений равновесия отсеченной части стержня [2]: . Здесь , - площадь отсеченной части сечения (Рис. 4)