

В качестве расчетной модели рассматриваются стержни с пространственными кусочно-гладкими осями (рис.1). Предполагается, что материал стержня изотропный, действует закон Гука, перемещения малы. Принимаются следующие гипотезы: поперечные сечения стержня плоские до деформации остаются плоскими и после деформации; напряжениями, действующими в плоскости поперечных сечений стержня, пренебрегаем. На основании принятых гипотез можно получить следующие формулы, определяющие перемещения и углы поворота точек поперечного сечения стержня: (1) где  $\mathbf{u}$  - вектор компонентов перемещения и углов поворота произвольной точки стержня в системе координат  $Ox_1x_2x_3$ ;  $\mathbf{u}_0$  - вектор компонентов перемещения и углов поворота оси стержня;  $l$  - длина дуги оси стержня;  $Ox_1^0x_2^0x_3^0$  - главные центральные оси инерции поперечного сечения стержня. Деформации стержня определяются через деформации оси стержня по формулам (2), (3). Деформации оси стержня находятся из соотношений Клебша: (3) где  $\epsilon$  - продольная деформация и углы сдвига;  $\gamma$  - изменения кручения и кривизн (деформации кручения и изгиба) оси стержня;  $\theta$  - кручение и кривизны оси стержня. На основании обобщенного закона Гука и введенных гипотез можно показать справедливость следующих физических соотношений, связывающих напряжения и деформации: (4) где  $E$  - модули упругости и сдвига стержня. Для решения задачи используется вариационный принцип Остроградского-Гамильтона [1], на основании которого истинное движение системы за отрезок времени  $[t_0, t_1]$  удовлетворяет вариационному уравнению: (5) Здесь  $U$  - потенциальная и кинетическая энергии стержневой системы;  $A$  - вариация работы внешних сил. Потенциальная и кинетическая энергии стержня определяются по формулам: (6) где  $\rho$  - плотность материала и объем стержня. Подставляя формулы (2)-(4) в соотношения (6) и интегрируя по площади поперечного сечения стержня, потенциальную и кинетическую энергии представим в виде: (7) (8) где  $S$  - площадь и длина стержня;  $I_{\alpha\alpha}$  - главные центральные моменты инерции поперечного сечения стержня и момент инерции при кручении;  $\alpha_{ij}$  - постоянные коэффициенты, учитывающие неравномерность распределения касательных напряжений в поперечном сечении стержня и зависящие от формы поперечного сечения стержня. В этих формулах в кинетическую энергию добавлены слагаемые, учитывающие действие сосредоточенных масс  $m_i$ , приложенных в точках оси стержня, перемещения которых  $\mathbf{u}_i$ . Второй интеграл в кинетической энергии учитывает воздействие сосредоточенной массы  $m_0$ , которая начинает двигаться в начальный момент времени из точки с координатой 0 со скоростью  $\mathbf{v}_0$ . Здесь  $\delta$  - дельта-функция Дирака. Если в уравнении (5) вычислить вариацию от кинетической энергии, определяемой по формуле (8), а затем использовать в интеграле по времени метод интегрирования по частям, то после соответствующих преобразований для вариации можно получить следующее выражение: (9) При выводе этой формулы учитывалось, что масса движется с достаточно малой скоростью по

сравнению со скоростями движения элементов стержня, вызванных колебанием, и в связи с этим во втором интеграле отброшено слагаемое, содержащее производную по времени от дельта-функции Дирака. Для решения задачи стержневая система разбивается на элементы (рис.1), оси которых являются гладкими кривыми. Введем глобальную систему координат для всей конструкции и локальные системы координат для каждого стержня, где координатная линия направлена вдоль оси стержня, линии совпадают с главными центральными осями инерции поперечного сечения стержня. Для каждого стержня за искомые неизвестные принимается вектор перемещений, заданный в глобальной системе координат. Этот вектор представляется в виде:  $\{ \delta \}$ , (10) где  $\{ \delta \}$  - вектор неизвестных функций от времени;  $\{ \delta_0 \}$  - координаты начала и конца оси стержня. Функции формы имеют вид [2-4]:  $\{ \phi \}$ . Изменяя количество слагаемых в выражении (10), можно получать аппроксимирующие функции различного порядка. Если определить значения искомой функции в узловых точках, то имеем  $\{ \delta_i \}$ . Следовательно, коэффициенты определяют значения вектора перемещений соответственно в начальной и конечной точках оси стержня в момент времени  $t$ . Это обстоятельство позволяет легко осуществлять стыковку стержней и удовлетворять геометрическим граничным условиям. Так, если положить  $\{ \delta_0 \} = \{ \delta_L \}$ , то будет выполнено условие стыковки начала -го стержня с концом -го стержня. Чтобы удовлетворить, например, граничному условию жесткого защемления на конце -го стержня, т.е. условию  $\{ \delta_0 \} = \{ 0 \}$ , следует положить  $\{ \delta_0 \} = \{ 0 \}$ . Компоненты перемещения в локальной системе координат связаны с компонентами перемещения в глобальной системе координат соотношениями:  $\{ \delta_i \} = [C] \{ \delta_j \}$ , (11) где  $[C]$  - матрица направляющих косинусов локальной системы координат в глобальной системе координат. Подставляя для каждого стержня аппроксимирующие функции (10) в формулу (11), а затем в уравнение (7) и (9), удовлетворяя кинематическим граничным условиям и условиям стыковки стержней, после соответствующих преобразований получается система дифференциальных уравнений в обычных производных относительно неизвестных функций:  $\{ \ddot{\delta} \} + [K] \{ \delta \} = \{ F \}$ , (12) где  $[M]$  - матрицы масс и жесткости стержневой системы;  $\{ \delta \}$  - вектор неизвестных функций,  $\{ F \}$  - вектор правой части, зависящий от внешних нагрузок. В случае свободных колебаний действие внешних нагрузок не учитывается, вектор неизвестных функций представляется в виде  $\{ \delta \} = \{ \delta_0 \} \cos(\omega t + \phi)$  и система уравнений (12) принимает вид:  $[-\omega^2 [M] + [K]] \{ \delta_0 \} = \{ F_0 \}$ , где  $\{ \delta_0 \}$  - вектор неизвестных постоянных,  $\omega$  - собственные значения. Это уравнение в качестве параметра содержит время  $t$ , которое определяет положение движущейся массы. Задавая конкретные значения времени  $t$ , получаем собственные значения и собственные формы для разных положений движущейся массы. Для решения этой задачи используется метод Рэлея-Ритца [5]. Для решения задач в случае вынужденных колебаний используется метод Ньюмарка [6]. В качестве примера приведены результаты расчеты плоской рамной стержневой конструкции, представленной на рис.2.

Предполагается, что все стержни одинаковые круглого поперечного сечения диаметра  $d$ . Масса движется горизонтально вправо по верхним стержням, начиная с левого верхнего шарнира. Приняты следующие числовые параметры:  $\mu = 0,001$  кг/см,  $E = 2 \cdot 10^{10}$  Па,  $I = 10^{-8}$  м<sup>4</sup>. В таблице 1 приведены минимальные собственные частоты в зависимости от положения массы на конструкции. Результаты приведены для первых двух пролетов. Таблица 1 (см) 0 25 50 75 100 125 150 175 200 (Гц) 25,3 12,0 9,55 13,5 41,5 13,9 10,2 13,4 35,9. Для минимальной частоты Гц, когда масса находится в середине первого пролета, на рис.3 приведена форма колебания для левой половины рамы. В таблице 2 приведены значения максимального напряжения, возникающего в точке приложения массы  $M$ , в момент нахождения массы в этой точке. Таблица 2 (см) 0 25 50 75 100 125 150 175 200 (МПа) 0,03 1,99 3,18 1,59 0,05 1,64 2,63 1,68 0,08