

Введение Во многих технологических процессах широко используются устройства, содержащие проницаемые поверхности. Проектирование и расчёт эффективности работы этих аппаратов связаны с описанием и решением внешних, внутренних и смешанных задач гидродинамики многофазного потока в их рабочих узлах, требуют знания гидродинамических характеристик потоков, учитывая зависимость реологических свойств среды от температуры. В этой работе рассматривается неизотермическое ламинарное тонкопленочное течение гетерогенной среды по проницаемой поверхности. Тонкопленочные неизотермические течения были рассмотрены в ряде работ[1,2] Для описания реологического состояния среды, как частный случай, можно использовать модель Оствальда де Вилля: , (1) где тензор напряжения; тензор скоростей деформаций; интенсивность скоростей деформации. Целью данной работы является построение математической модели неизотермического тонкопленочного течения двухфазных сред и построение численной схемы, реализующей данную модель. Теоретическая часть Течение рассматривается в ортогональной системе координат, у которой координатная поверхность $x_2 = \text{const}$ совпадает с поверхностью течения, а координатные линии (поверхности) $x_1 = \text{const}$ составляет семейство нормалей к ней. С учетом проведенного анализа значимости членов упрощенные размерные уравнения сохранения массы и движения дисперсной смеси и энергии для случая двухфазного пленочного течения примут вид [3,4]. (2) (3) (4) , (5) (6) (7) , (8) (9) где для простоты “вязкостный” член обозначен как здесь удельная теплоемкость ой фазы; $F(F_1, F_2, F_3)$ вектор массовых сил и его компоненты в направлении координат x_1, x_2, x_3 ; F_{12} вектор силы межфазного взаимодействия; N_i коэффициенты Ляме; эффективная динамическая вязкость; n – коэффициент нелинейности; P – давление, Па; температура ой фазы; компонента скорости по оси ; компонента скорости по оси ; -координата, м; объемная концентрация ой фазы; коэффициент теплопроводности ой фазы; приведенная плотность ой фазы, кг/м³. Система уравнений (2) (9) должна решаться при следующих граничных и начальных условиях , (10.1) , (10.2) (10.3) здесь коэффициент теплоотдачи. Уравнения движения (2) (9) образуют систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, которые в квадратурах не интегрируются. В данной работе эта система решается с помощью метода поверхностей равных расходов[5]. В соответствии с этим методом в поле течения суспензии введем линии тока и представим компоненты скорости i -ой фазы для k -ого слоя в виде , . Здесь , N число введенных линий тока. При этом линия совпадает с поверхностью течения, а последняя линия со свободной поверхностью. Сведем задачу о развитии течения слоя суспензии к численному определению полей скоростей и линии тока. Обозначим величину изменения расхода первой фазы между k -ой и $(k+1)$ -ой линиями тока через . В случае непроницаемой поверхности . По определению (11) При отсутствии

массообмена изменение расхода сплошной фазы будет определяться фильтрацией жидкости через пористую проницаемую поверхность. Систему координат выбираем таким образом, чтобы величины a_1 , d , h , U_i , V_i не зависели от координаты и обозначим $Z = H_3(x_{3k} - x_{3n})$. Тогда интегральное условие сохранения количества сплошной фазы для произвольного сечения можно записать в виде: . Продифференцируем данное соотношение по x_1 и после сравнения с результатом дифференцирования (11) получим (12) Применяя правило Лейбница, с учетом уравнения (2) вычислим интеграл (11) Отсюда, с учетом кинематического условия на свободной поверхности и соотношений (12), получим (13) Производные по независимой переменной имеют вид (14) Заменяв частную производную согласно (14) с учетом соотношений (13) запишем уравнение (3) для слоя (15) Интегрируем сумму уравнений (4) и (8) на интервале $[0, h]$ где Преобразуем результирующее соотношение в более удобную форму и дифференцируя по продольной координате, получим (16) Заменяв в уравнении (15) согласно (14) с учетом (16), и используя сумму уравнений (4) и (8), для определения поля скоростей сплошной фазы получим систему уравнений (17) Аналогично можно получить уравнения для дисперсной фазы. Отпуская промежуточные выводы, приведем окончательное выражение для распределения скоростей (18) Если размеры включений невелики и разность плотностей фаз незначительны, относительное движение фаз может оказаться незначительным. Тогда можно использовать квазигомогенную модель течения двухфазных сред. В квазигомогенном приближении линии тока вводятся вполне однозначно для некоторой эффективной среды с переменными по продольной координате характеристиками . Преобразованное уравнение движения эффективной среды можно получить сложением уравнений (17) и (18) (19) Уравнения для поверхностей равного расхода определим из (11). Для чего представим интеграл по одной из формул численного интегрирования, затем продифференцируем полученную разностную формулу по x_1 . Если проинтегрировать (11) по формуле трапеций, то уравнение для определения поверхности имеет вид (20) где . Для вычисления "вязкостного" члена сеточные решения записывались в виде разложения в ряд по полной системе базисных функций, удовлетворяющих граничным условиям (10) (21) Систему базисных функций можно выбрать в виде [5] где Систему базисных функций для температуры можно выбрать в виде: Потребуем, чтобы скорость и температура, определяемые из (21a), совпали с U и T на линиях Γ . Тогда для определения коэффициентов и получим системы алгебраических уравнений (21a) Определив значения из системы уравнений, можно вычислить вязкостный член на соответствующих линиях тока. Определив значения U и T , используя разложение (21a) можно вычислить значения температуры на соответствующих линиях тока. Система (2) (9), (19) (20) и граничные условия (10) представляют замкнутую систему уравнений, решение которых при известных правых частях можно

получить одним из численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. В уравнениях движения (17) (19), записанных для любой поверхности равных расходов, присутствует слагаемое, которое содержит неопределенную величину. В то же время производные определяются с помощью рекуррентных соотношений (20) снизу вверх, начиная с. Поэтому для вычисления правых частей системы (17) (19) необходимо использовать прогонку. Нахождения явных выражений прогоночных коэффициентов целесообразно выполнить после конкретизации области течения и определения коэффициентов Ляме H_1, H_2, H_3 . Рассмотрим реализацию схемы решения задачи (2) – (10) для неизотермического течения по плоской поверхности. Пусть слой гетерогенной среды стекает по наклонной плоскости. Выберем декартову систему координат с коэффициентами Ляме $H_1=1, H_2=1, H_3=1$. Тогда Здесь g ускорение свободного падения, m/s^2 ; α - угол наклона плоскости. Дифференциальные уравнения (9), (19) (20) для плоскости единичной толщины имеют вид Здесь коэффициент температуропроводности. Введем безразмерные переменные для данной системы с помощью подстановки (22) Указанная система в безразмерных переменных примет вид (черточки опущены) Здесь число Фруда, определяемое компонентом массовой силы, направленной по координате x_i ; μ - число Пекле; λ - числа Рейнольдса; размер области течения в направлении x_i ; Для вычисления правых частей методом прогонки первые два уравнения полученной системы приведем к виду (23) Здесь и далее номера поверхностей расходов, в обозначениях скорости, для удобства написаны в виде нижнего индекса, а штрихи означают производные по безразмерной продольной координате. Представим искомую функцию в виде прогоночного соотношения (24) и подставим в уравнение (23). После несложных преобразований получим явные выражения прогоночных коэффициентов в виде следующих рекуррентных соотношений (25) При из (24) получим Далее, обратной прогонкой вычисляются значения правых частей системы дифференциальных уравнений (23). В качестве примера рассмотрим решение данной задачи в квазигомогенном приближении, когда $\mu \gg 1$, система уравнений (2)-(9) в случае течения по наклонной плоскости запишется в виде: (26) (27) (28) (29) Система (26) (29) решается при следующих граничных и начальных условиях: $\theta|_{x=0} = \theta_0$, (30.1) $\theta|_{x=L} = \theta_L$, (30.2) $\theta|_{y=0} = \theta_0$, (30.3) Для данного примера была разработана программа и выполнены численные расчеты, результаты которых приведены ниже. Результаты вычислительного эксперимента Были рассчитаны процессы обогрева и охлаждения среды как со стороны стенки, так и со стороны свободной поверхности пленки с учетом фильтрации твердой фазы через проницаемую поверхность. На рис. 1 представлены изменения температуры на линиях тока при движении среды по “горячей” стенке. Изменение температуры начинается с нижнего слоя и передается снизу вверх. После достижения теплового пограничного слоя свободной Рис. 1 Профили температуры на линиях поверхностей равного расхода при $\mu = 10, 100, 1000, 10000$, поверхности

происходит изменение температуры на свободной поверхности пленки. Фильтрация сплошной фазы через проницаемую поверхность приводит к уменьшению толщины слоя гетерогенной среды. Это приводит к изменению положения линий поверхностей равных расходов. На рис. 2 представлены изменения температуры на линиях тока при течении гетерогенной среды по непроницаемой поверхности. Рис. 2 Профили температуры на линиях поверхностей равного расхода при $\beta = 0, 0,5, 1, 1,5, 2$. Заключение Проведена адаптация метода поверхностей равных расходов для процессов фильтрования двухфазной среды по проницаемой поверхности в неизотермических условиях, численные расчеты выполнены в квазигомогенном приближении. Построенная математическая модель позволяет рассчитать процессы неизотермического течения двухфазной среды по проницаемой поверхности при различных тепловых режимах.